Челябинский физико-математический журнал

ISSN 2500-0101 (print),
2619-0117 (online)
doi.org/10.47475/2500-0101
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Основан в 2016 году
2025
Том 10, выпуск 4

УЧРЕДИТЕЛЬ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

В. Д. Бучельников, Челябинский государственный университет (главный редактор);
Ю. В. Гуляев, академик РАН, Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва;
С. В. Матвеев, академик РАН, Челябинский государственный университет;
А. К. Муртазаев, член-корреспондент РАН, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДНЦ РАН, Махачкала;
Ю. С. Попков, академик РАН, Институт системного анализа РАН, Москва;
В. Н. Ушаков, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург;
А. Фавини, University of Bologna, Italy;
А. Яги, Osaka University, Japan.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

И. В. Бычков, Челябинский государственный университет;
В. Е. Вольфенгаген, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва;
С. М. Воронин, Челябинский государственный университет;
Н. Н. Горькавый, National Aeronautics and Space Administration, USA;
А. Дебуш, Университет Гельмы, Алжир;
О. Н. Дементьев, Челябинский государственный университет;
М. А. Загребин, Челябинский государственный университет (ответственный секретарь);
А. Т. Заяк, Bowling Green State University, USA;
В. И. Кобер, Ensenada Center for Scientific Research and Higher Education, Mexico;
А. И. Кожанов, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
М. Костич, Университет Нови-Сада, Сербия;
В. А. Лобаскин, University of Dublin, Ireland;
Д. В. Лузгин, Tohoku University, Japan;
А. Е. Майер, Челябинский государственный университет;
А. В. Мельников, Югорский НИИ информационных технологий, Ханты-Мансийск (заместитель главного редактора);
Н. Г. Мигранов, Башкирский государственный медицинский университет, Уфа;
Г. С. Осипов, Институт системного анализа РАН, Москва;
В. Н. Павленко, Челябинский государственный университет;
А. В. Псху, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик;
С. М. Ситник, Белгородский государственный университет;
С. В. Смирнов, Институт проблем управления сложными системами РАН, Самара;
Т. Такаги, Tohoku University, Japan;
С. В. Таскаев, Челябинский государственный университет;
И. В. Тихонов, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
В. Е. Федоров, Челябинский государственный университет (заместитель главного редактора);
Е. А. Фоминых, Санкт-Петербургский государственный университет;
В. Б. Шерстюков, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Журнал публикует научные статьи на русском и английском языках по всем основным разделам математики, механики, астрономии, физики, информатики, вычислительной техники и управления.

Журнал выходит
4 раза в год

Адрес издателя:
Россия, 454001, Челябинск,
ул. Братьев Кашириных, 129

Адрес редакции:
Россия, 454001, Челябинск,
ул. Братьев Кашириных, 129,
ком. 222 а
Тел. (351) 799-72-35
e-mail: cpmj@csu.ru

С требованиями к оформлению
статей можно ознакомиться
на сайте журнала cpmj.csu.ru

Ответственность за содержание
статей и качество перевода
несут авторы публикаций

Журнал зарегистрирован
в Федеральной службе
по надзору в сфере связи,
информационных технологий
и массовых коммуникаций.
Свидетельство
ПИ № ФС77-64248
25.12.2015

Индекс 33082
в каталоге «Пресса России»

Корректура М. В. Трифоновой
Вёрстка М. А. Загребина

Подписано в печать 30.10.25.
Выход в свет 07.11.25.
Формат $60 \times 84\frac{1}{8}$.
Бумага офсетная.
Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 24,2.
Уч.-изд. л. 20,0.
Тираж 500 экз. Заказ 682.
Цена свободная

Отпечатано:
в издательстве Челябинского
государственного университета
Россия, 454001, Челябинск,
ул. Молодогвардейцев, 57б

16+

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal

ISSN 2500-0101 (print), 2619-0117 (online)
doi.org/10.47475/2500-0101
ACADEMIC PERIODICAL
Founded in 2016
2025
Volume 10, issue 4

FOUNDER
Chelyabinsk State University

EDITORIAL COUNCIL

V.D. Buchelnikov, Chelyabinsk State University, Russia (Editor-in-Chief);
Yu. V. Gulyaev, V.A. Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia;
S.V. Matveev, Chelyabinsk State University, Russia;
A.K. Murtazaev, Kh.I. Amirkhanov Institute of Physics of DSC RAS, Russia;
Yu.S. Popkov, Institute of System Analysis of RAS, Russia;
V.N. Ushakov, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS;
A. Favini, University of Bologna, Italy;
A. Yagi, Osaka University, Japan.

EDITORIAL BOARD

I.V. Bychkov, Chelyabinsk State University, Russia;
V.E. Volfengagen, National Research Nuclear University MEPhI, Russia;
S.M. Voronin, Chelyabinsk State University, Russia;
N.N. Gorkavy, National Aeronautics and Space Administration, USA;
A. Debbouche, Gelma University, Algeria;
O.N. Dementyev, Chelyabinsk State University, Russia;
M.A. Zagrebin, Chelyabinsk State University, Russia (Executive Secretary);
A.T. Zayak, Bowling Green State University, USA;
V.I. Kober, Ensenada Center for Scientific Research and Higher Education, Mexico;
A.I. Kozhanov, Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
M. Kostić, Novi Sad University, Serbia;
V.A. Lobaskin, University of Dublin, Ireland;
D.V. Luzgin, Tohoku University, Japan;
A.E. Mayer, Chelyabinsk State University, Russia;
A.V. Melnikov, Ugra Research Institute of Information Technologies, Russia (Deputy Editor-in-Chief);
N.G. Migranov, Bashkir State Medical University, Ufa, Russia;
G.S. Osipov, Institute of System Analysis of RAS, Russia;
V.N. Pavlenko, Chelyabinsk State University, Russia;
A.V. Pskhu, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, Russia;
S.M. Sitnik, Belgorod State University, Russia;
S.V. Smirnov, Institute of Control Problems for Complex Systems of RAS, Russia;
T. Takagi, Tohoku University, Japan;
S.V. Taskaev, Chelyabinsk State University, Russia;
I.V. Tikhonov, Lomonosov Moscow State University, Russia;
V.E. Fedorov, Chelyabinsk State University, Russia (Deputy Editor-in-Chief);
E.A. Fominykh, St Petersburg State University, Russia;
V.B. Sherstyukov, Lomonosov Moscow State University, Russia.

The journal publishes scientific articles in Russian and English on all basic sections in Mathematics, Mechanics, Astronomy, Physics, Informatics, Computer Engineering and Control.

The journal is published 4 times per year

Address of Publisher:
129 Bratiev Kashirinykh St.,
Chelyabinsk, 454001, Russia

Editorial office address:
Room 222 a
129 Bratiev Kashirinykh St.,
Chelyabinsk, 454001, Russia
Tel.: +7 (351) 799-72-35
e-mail: cpmj@csu.ru

All the requirements
are available on the web-site
cpmj.csu.ru

Authors are responsible
for the article content and quality
of translation

Academic periodical
is registered
in the Federal Service
for Supervision
of Communications,
Information Technology
and Mass Media
Certificate ПИ № ФС77-64248
25.12.2015

Index 33082
in Unified Catalog
of Russian Printed Press

Proofreading by M.V. Trifonova
Imposition: M.A. Zagrebin

Passed for printing 30.10.25.
Date of publication 07.11.25.
Format $60 \times 84\frac{1}{8}$. Litho paper.
Font Times.
Conventional print. sh. 24,25.
Ac.-publ. sh. 20,0.
Circulation 500 copies.
Order 682. Open price

Printed:
Publishing House of
Chelyabinsk State University
57b Molodogvardeytsev St.,
Chelyabinsk, 454001, Russia

16+

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Механика

Физика

CONTENTS

Mathematics

Mechanics

Physics

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 609–633.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-609-633

О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОЛЕГА ИГОРЕВИЧА МАРИЧЕВА: К 80-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ

С. В. Рогозин[1,a], **С. М. Ситник**[2,3,b], **Э. Л. Шишкина**[2,4,c]

[1] *Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2] *Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия*
[3] *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*
[4] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[a] *rogosin@bsu.by,* [b] *sitnik@bsuedu.ru,* [c] *shishkina@amm.vsu.ru*

Статья представляет собой биографию и анализ научного вклада выдающегося советского и американского математика Олега Игоревича Маричева. Освещается его путь от школьных лет в Минске, где проявился интерес к математике, через обучение в аспирантуре БГУ под руководством академика Ф. Д. Гахова, к фундаментальным работам в области специальных функций и интегрирования. Подробно описывается создание монументальных справочников по интегралам и рядам, а также ключевой монографии по дробному исчислению. Особое внимание уделено работе О. И. Маричева в Wolfram Research, где он разработал алгоритмы символьного интегрирования и создал крупнейшую в мире коллекцию математических формул (Wolfram Functions Site). Статья подчеркивает новаторский подход О. И. Маричева к унификации математических функций через G-функции Мейера и его роль в развитии компьютерной алгебры.

Ключевые слова: *Маричев, Wolfram Mathematica, интегральное исчисление, специальные функции, символьное исчисление.*

1. Детство, учёба, работа и защиты диссертаций: 1945–1990 годы

Олег Игоревич Маричев родился 7 сентября 1945 г. в городе Великие Луки Псковской области. В 1949 г. он вместе с родственниками переехал в Минск, столицу Белоруссии. С 1952 по 1963 г. обучался в минской школе № 42. Интерес к математике у Олега пробудился в восьмом классе, когда учительница Александра Ивановна Багреева познакомила его с методом математической индукции и биномом Ньютона, а также посоветовала посещать занятия по математике для школьников при Белорусском государственном университете (БГУ). С этого времени он стал активно участвовать в математических олимпиадах, входя в число их победителей. Во время одного из таких мероприятий он познакомился со своей будущей супругой Анной, также посещающей занятия по математике при БГУ.

В 1963 г. Олег окончил школу с золотой медалью и поступил на математический факультет БГУ, где завершил обучение в 1968 г. Поступив в аспирантуру, продолжил заниматься научной деятельностью под руководством профессора и академика

Академии наук Белоруссии Фёдора Дмитриевича Гахова. Впоследствии Маричев и его соавторы написали статьи [1; 2], посвящённые академику Ф. Д. Гахову.

Олег Игоревич Маричев

Ф. Д. Гахов прославился тем, что в 1937 г. решил классическую краевую задачу Римана для аналитических функций в замкнутой форме. Монография Ф. Д. Гахова «Краевые задачи» трижды переиздавалась (в 1958, 1963 и 1977 г., причём второе издание было переведено на английский и испанский языки). Фёдор Дмитриевич организовал и руководил тремя научными школами по краевым задачам и особым интегральным уравнениям — в Ростове-на-Дону, Казани и Минске. Под его руководством в течение десятилетий проходил научный семинар, который стал кузницей кадров для всего Советского Союза. Будучи учёным с мировым именем, Фёдор Дмитриевич был педагогом с большой буквы. 52 его ученика стали кандидатами наук (причём 20 из них в Беларуси), а 18 из них — докторами наук.

Ф. Д. Гахов сразу оценил способности Олега, его самостоятельность и работоспособность, предложил ему исследовать краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа (эллиптико-гиперболические уравнения). Развивая это направление, О. И. Маричев показал, что краевые задачи для уравнений в частных производных смешанного типа можно свести к сингулярным интегральным уравнениям, которые, в свою очередь, решаются с помощью методов, основанных на краевых задачах Римана [3–6]. К своей научной работе он относился с поразительным энтузиазмом. Студенты того времени вспоминают его вечно обложенным массой бумаг с записью результатов. Его научный руководитель выделял его среди наиболее успешных и талантливых учеников, наряду с С. Г. Самко, И. И. Комяком (1937–1980 г.) и А. А. Килбасом (1948–2010 г.).

В 1980 г. ушел из жизни академик Фёдор Дмитриевич Гахов (19 февраля 1906, Черкесск — 30 марта 1980, Минск). Олег Игоревич сделал многое для увековечивания памяти своего любимого учителя. В 1981 г. он был одним из организаторов научного семинара, посвящённого 75-летию Ф. Д. Гахова. По итогам этого семинара был издан сборник трудов [7]. Олег Игоревич был ответственным секретарём редколлегии этого сборника и отвечал за сбор материалов. Эта конференция стала в дальнейшем базой для проведения конференций, связанных с именем Ф. Д. Гахова (конференция «Краевые задачи, дробное исчисление и специальные функции» (1996 г.) и серия конференций АМАДЕ, одной из которых — в 1999 г. — был участником и О. И. Маричев).

Во время работы над диссертацией О. И. Маричев увлёкся тем, что впоследствии стало делом всей его жизни — специальными функциями. Его интерес к гипергеометрическим функциям ${}_pF_q$, а также функциям Бесселя, Лежандра, Аппеля, Мейера и Фокса был пробуждён после знакомства с книгой Люси Джоан Слейтер «Обобщённые гипергеометрические функции» (1966). Применение интегральных уравнений и специальных функций к решению уравнений в частных производных в конечном итоге легло в основу его кандидатской диссертации на тему «Краевая задача Трикоми для некоторых уравнений смешанного типа и интегральные уравнения со специальными функциями в ядрах», которую он успешно защитил в 1973 году. После успешной защиты диссертации О. И. Маричев был приглашен для работы в БГУ.

О. И. Маричев работал на кафедре теории функций и функционального анализа математического факультета БГУ с 1968 по 1975 г. Одним из его первых студентов (в 1969–1970 г.) был Сергей Васильевич Рогозин, который сейчас является доцентом кафедры аналитической экономики и эконометрики БГУ. Другим успешным студентом О. И. Маричева являлся И. Е. Садригайло (1952–1976), который получил первую премию во Всесоюзном конкурсе студенческих научных работ.

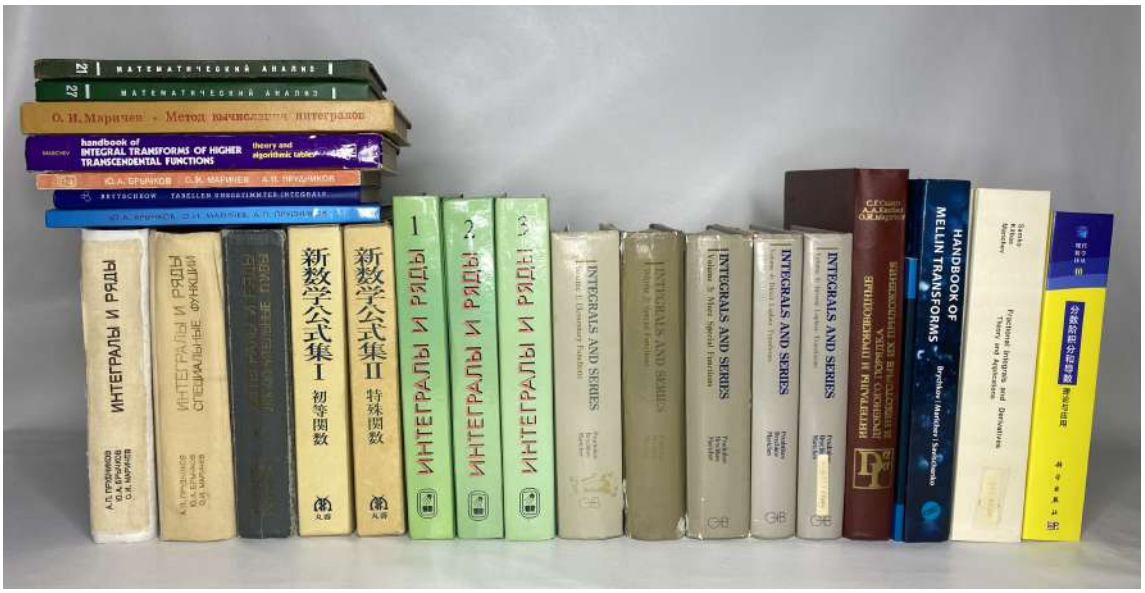
В 1975 г. кафедра теории функций и функционального анализа была разделена на кафедру теории функций и кафедру функционального анализа. С 1975 по 1990 г. О. И. Маричев работал на кафедре теории функций. В 1976 г. ему присуждено звание доцента, и в 1987 г. он стал исполняющим обязанности профессора.

1981–1990 г. были годами интенсивной научной работы О. И. Маричева и группы из 6 его аспирантов (Нгуен Тьи Тхань, Ву Ким Туан, Виктор Адамчик, Семён Якубович, Галина Гринкевич и Нгуен Тхань Хай). В 1986–1988 г. аспиранты О. И. Маричева защитили кандидатские диссертации. В частности, Ву Ким Туан, окончив БГУ в 1984 г., защитил кандидатскую диссертацию в 1985 г. и докторскую диссертацию в 1987 г. в возрасте 26 лет, имея к тому времени более 30 научных статей в авторитетных журналах. Ву Ким Туан впоследствии занимал должность профессора кафедры в Университете Западной Джорджии США (Engineering Department, University of Southern California), Семён Якубович работает в университете Порто, Португалия (Faculty of Science, University of Porto), Галина Гринкевич до ухода на пенсию преподавала в Витебском государственном университете, деятельность Нгуен Тьи Тханя и Нгуен Тхань Хая в последние годы не была связана с наукой и образованием.

В 1990 г. О. И. Маричев защитил докторскую диссертацию по теме «Функции гипергеометрического типа и некоторые их приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям». Защита состоялась в Йенском университете им. Ф. Шиллера, Германия, родном университете его давнего коллеги и соавтора, профессора Х.-Ю. Глеске. Это был один из первых случаев защиты докторской диссертации советским учёным за рубежом. Кроме того, О. И. Маричев сделал доклад на конференции в Лейпциге, вызвавший интерес у представителя американской компании Wolfram Research (WRI), которая искала специалиста по символьному интегрированию.

2. Статьи и книги

Свои первоначальные исследования специальных функций, интегральных преобразований, проведённые в 1974–1978 г., О. И. Маричев представил в работах [8–17] и завершил монографией [18], которая была опубликована на русском языке в 1978 г., а затем переведена на английский в 1983 г. [19]. В монографии [18] были развиты



Полка с книгами Олега Игоревича Маричева

идеи К. С. Мейера, которые он высказал в 1940-х г. Эта книга была оценена академиком Гаховым как «не имеющая аналогов в русской или зарубежной литературе». Алгоритм на основе `MeijerG` позволил впервые в системах компьютерной алгебры вычислять определённые интегралы, содержащие эту функцию и ее частные случаи в аналитическом виде при общих параметрах. Например, интегралы вида $\int x^a(1-x)^b {}_pF_q(...)\,dx$.

Основное содержание книги [18] — это метод вычисления интегралов от специальных функций на основе преобразования Меллина и теоремы Слейтер, с унифицированным выражением результатов через G-функции Мейера. О. И. Маричев уточнил доказательство теоремы Слейтер, применил преобразования Меллина к вычислению интегралов, составил таблицы этого преобразования, с использованием функций Мейера.

Книга состоит из теоретической части, многочисленных подробных примеров вычисления интегралов, а также таблиц преобразований Меллина различных элементарных и специальных функций. Многие результаты выражаются через G-функции Мейера, что позволило представить большинство интегралов, приведённых в таких справочниках, как «Таблицы интегралов, рядов и произведений» И. С. Градштейна и И. М. Рыжика, в виде частных случаев G-функции Мейера. Проведённое исследование не только расширило теоретические горизонты, но и сыграло ключевую роль в формировании фундаментального вклада О. И. Маричева в последующее развитие системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Результаты этой замечательной книги позволили большому числу математиков продвинуться в явном решении различных задач, особенно по теории интегральных и дифференциальных уравнений, численному описанию различных прикладных моделей, основанному на аналитических методах. Вклад этой монографии в аналитическую теорию дифференциальных уравнений невозможно переоценить. Книга [18] послужила также во многом основой для последующего известного обзора [20], где изложен универсальный метод вычисления интегралов от элементарных и специальных функций.

После монографии [18] О. И. Маричев опубликовал работы [21; 22] по вычислению интегралов от гипергеометрических функций и приступил к гораздо более масштабному проекту по составлению интегральных таблиц, более полных, чем у И. С. Градштейна и И. М. Рыжика, вычисляя и проверяя вручную тысячи слож-

нейших интегралов. Результатом стал трёхтомник [23–25], изданный на русском языке с 1981 по 1986 г. и переизданный [26–28] в 2002–2003 г. В этих справочниках О. И. Маричев занимался вычислением интегралов, Ю. А. Брычков составлял формулы для рядов, произведений и др., а А. П. Прудников (14 января 1927, Ульяновск — 10 января 1999, Москва) обеспечил администрирование и проверку всех частей проекта.

С 1986 по 1992 г. вышел пятитомник [29–33] «Integrals and Series» на английском языке, первые три тома которого представляли перевод трёхтомника [23–25], а два других были посвящены прямому и обратному преобразованию Лапласа (см. также [34]). Эти книги содержали значительно больше формул и более общие интегралы, чем те, которые были представлены до этого в справочниках:

— Бейтмен Г., Эрдейи А. «Высшие трансцендентные функции» и «Таблицы интегральных преобразований»,

— Оберхеттингер Ф. «Преобразования Фурье распределений и их обращения»,

— Двайт Г. Б. «Таблицы интегралов и другие математические формулы»,

— Смолянский М. Л. «Таблицы неопределённых интегралов», и др.

В 1991 г. первые два тома [29; 30] были изданы в Токио на японском языке [35; 36]. В 1986 г. Ю. А. Брычков выделил из многотомника [23–25] маленький справочник для студентов «Таблицы неопределённых интегралов» [37; 38]. Он переведён на английский [39] и немецкий [40] языки.

После завершения работы с пятью томами справочника «Интегралы и ряды» организатор проекта профессор А. П. Прудников предложил соавторам сделать шестой том книги «Справочник по преобразованиям Меллина». Но обстоятельства помешали этому проекту, и позже такое предложение взялся реализовывать Анатолий Александрович Килбас. В 2010 г. он и Юрий Александрович Брычков посетили Wolfram Research, а Анатолий Александрович предложил Олегу Игоревичу и Юрию Александровичу участвовать в проекте по написанию книги «Справочник по преобразованиям Меллина». Через несколько месяцев проф. А. А. Килбас трагически погиб. Тот текст, который имелся у А. А. Килбаса и на базе которого было решено писать справочник, был написан А. А. Килбасом на основе архивных материалов А. П. Прудникова.

Только спустя годы Олег Игоревич и Юрий Александрович стали изучать, оставленный Анатолием Александровичем материал для книги, содержащий большое количество переделанных формул пятитомника [29–33]. Все эти формулы были введены и проверены на Mathematica, к ним было добавлено много новых формул. В результате этой большой работы был опубликован справочник по преобразованиям Меллина [41].

В течение десятилетия, с 1982 по 1992 г., О. И. Маричев активно публиковался с такими соавторами, как Ву Ким Туан, Виктор Саввич Адамчик, Семён Борисович Якубович, Игорь Леонидович Васильев, Юрий Александрович Брычков, Валентина Ивановна Азаматова, Ганс-Юрген Глеске, Шьям Лал Калла, Мэгуми Сайго, Нгуен Тхань Хай, Роберт Г. Бушман, Хари Мохан Сривастава и др. [20; 42–70]. Среди публикаций были статьи об интегрировании и специальных функциях, написанные совместно с аспирантами (Игорь Леонидович Васильев был студентом Олега Игоревича, но не аспирантом, он умер несколько лет назад). Остальные статьи были опубликованы со всемирно известными математиками, работающими в области специальных функций: Ю. А. Брычков, С. Л. Калла, Г.-Ю. Глеске, М. Сайго, Р. Г. Бушман, Х. М. Сривастава.

Огромную роль в жизни Олега Игоревич Маричева сыграла его работа в 1984–1987 г. над монографией «Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения» [71] совместно с Анатолием Александровичем Килбасом (доцентом кафедры теории функций БГУ) и профессором Ростовского государственного университета Стефаном Григорьевичем Самко. Среди специалистов эта монография получила заслуженное название «Библия дробного исчисления». Через пять лет расширенный вариант книги (с дополнительными 300 страницами) был переведён на английский язык [72], а в 2025 г. книга была переведена на китайский язык профессором кафедры математики Шанхайского университета Чанпином Ли и переиздана в Китае [73]. Это издание дополнено большим разделом «Обзор дробного исчисления и его компьютерной реализации в Wolfram Mathematica», написанным О. И. Маричевым и Э. Л. Шишкиной. Этот обзор на английском языке опубликован в журнале «Fractional Calculus and Applied Analysis» [74].

Книга [71] имеет десятилетнюю предысторию: в 1976 г. по материалам кандидатской диссертации О. И. Маричев написал монографию о краевых задачах для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами, в которой была глава о дробных производных. Эта монография не была издана в 1976 г., но с её содержанием ознакомился Анатолий Александрович Килбас (она была опубликована в расширенном варианте при участии соавторов 32 года спустя, см. [75]). В поездке из Минска в Одессу на конференцию Олег Игоревич и Анатолий Александрович говорили о пособии для студентов по дробным производным на базе главы о дробных производных этой неизданной книги. Анатолий Александрович предложил включить соавтором Стефана Григорьевича Самко, имеющего солидные результаты по теории потенциалов и гиперсингулярным интегралам, реализующим дробные степени многомерных дифференциальных операторов. В результате была написана уникальная книга — первое обширное справочное издание по дробному исчислению на русском языке. В написании отдельных параграфов книги [71] принимали участие Ву Ким Туан, В. С. Адамчик и С. Б. Якубович, которые являлись аспирантами Олега Игоревича.

Монография О. И. Маричева по материалам кандидатской диссертации включала исследование задач для обобщённых уравнений Эйлера — Пуассона — Дарбу. Маричев пытался опубликовать этот текст в 1976 г., но в это же время его другая книга [18] публиковалась в другом издательстве. Публиковать две книги в одном году было запрещено. В результате, спустя 32 года (в 2008 г.), дополненная и переработанная версия этой книги была опубликована в соавторстве с А. А. Килбасом и О. А. Репиным в Самаре [75].

Публикация статьи [76] имеет особую историю. Олег Игоревич два года общался с известным физиком Сергеем Юрьевичем Славяновым [77]. С. Ю. Славянов — автор четырёх монографий, две из которых изданы в России (одна из них переведена на английский язык), а две — за рубежом (одна переведена на русский: С. Ю. Славянов, В. Лай. Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб. : Невский Диалект, 2002). В последние месяцы его жизни Сергей Юрьевич предложил опубликовать статью о полиномах Белла. Эти полиномы выступают в качестве коэффициентов при дифференцировании сложных функций, а именно, частичный полином Белла может быть использован для выражения производной композиции двух функций через формулу Фаа ди Бруно. Эти полиномы были реализованы в системе Mathematica как функция `BellY` Сашей Павлыком и Дэном Макдональдом по инициативе Олега Игоревича Маричева. Их можно использовать для описания замкнутых формул разложения в ряд функций Мейера

и Фокса в логарифмических случаях с полюсами произвольного порядка. Однако описание основных формул со свойствами полиномов Белла, возможно, впервые было представлено в статье [76].

3. Работа в Wolfram: 1991–2018

Работая над составлением таблиц интегралов и обобщением результатов своих исследований, О. И. Маричев стремился автоматизировать алгоритмы вычисления интегралов. В 1980 г. у него появилась такая возможность: совместно с Эрнстом Давидовичем Крупниковым он начал реализацию этой идеи на высокопроизводительном компьютере «МИР» в Новосибирске. Эрнст Давидович родился в Москве в 1938 г. Окончил МГУ. В 1986 г. пришёл в вычислительный центр СибГУТИ на должность инженера-программиста. Вместе с Маричевым они разработали программу интегрирования, основанную на применении теоремы о свёртке с двумя G-функциями Мейера. Спустя несколько лет О. И. Маричев оказал существенную помощь своему бывшему аспиранту В. С. Адамчику в создании прототипа системы автоматического интегрирования в среде компьютерной алгебры REDUCE [70].

Как результат, в 1990 г. Олег Игоревич Маричев и Виктор Саввич Адамчик были приглашены в Шампейн, США, для демонстрации возможностей системы REDUCE в компании Wolfram Research. После того, как они продемонстрировали свою программу по вычислению интегралов, Стивен Вольфрам предложил продлить их визит на три месяца, чтобы поэкспериментировать с реализацией их алгоритмов в Mathematica. Они продолжили работу над этим проектом, и оба получили временные визы на следующие несколько месяцев. Жена Олега Игоревича Анна и сын Сергей (тогда ему было 8 лет) присоединились к нему в Шампейне в марте 1991 г., а Олег Игоревич получил статус постоянного резидента в 1992 г.

С 1992 по 1997 г. О. И. Маричев активно работал в Wolfram Research, сосредоточившись на задачах символьного интегрирования и численного анализа функции Мейера, которая используется в Mathematica под именем `MeijerG` — одной из самых сложных и универсальных специальных функций, реализованных в Mathematica.

Прежде чем написать программу для вычисления G-функции Мейера, О. И. Маричев, по специальному заказу Стивена Вольфрама, разработал программы для нахождения неопределённых интегралов, которые могут быть представлены через эллиптические интегралы или другие специальные функции, в основном через функции гипергеометрического типа, такие как G-функции Мейера. Он нашёл общие формулы для нахождения интегралов вида

$$\int (ax^3 + bx^2 + cx + d)^r dx$$

через функцию Аппеля F_1 (`AppellF1`) двух переменных. Более общие интегралы, связанные с выражениями $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)^r$ и $\prod_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^{r_k}$, стало возможным найти с помощью гипергеометрической функции Лауричеллы F_D (`LauricellaFD`, см. [78]) по формулам О. И. Маричева после внедрения этой функции в систему Mathematica. В настоящее время он также работает с гораздо более общими интегралами от $\prod_{k=1}^{n} H_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}(a_k x^{r_k})$ (произведений H-функций Фокса).

О. И. Маричев изучал Mathematica и разрабатывал её операции, такие как: `Integrate` (с помощью Келли Роуч, Эмили Мартин, Алексея Бочарова, Виктора Адамчика, Дэниела Лихтблау), `FunctionExpand` и `PowerExpand` (с Адамом Стрже-

бонски), `Series` и `Limit` (с Дэниелом Лихтблау), `BellY` (с Александром Павликом и Дэном Макдональдом) и другие. Большую помощь в написании кода для численной оценки функции `MeijerG` ему оказал руководитель группы исследований и разработок в области числовых вычислений в Wolfram Research Джерри Кейпер (1953–1995 г.), трагически погибший в автокатастрофе.

Гораздо позже, после разработки кода для `MeijerG`, Олег Игоревич обратился к Майклу Тротту с просьбой помочь в написании кода для H-функции Фокса. «Нулевая версия» этого кода долгое время использовалась Олегом Игоревичем без включения в систему Wolfram Mathematica, пока Тигран Нерсесян по инициативе О. И. Маричева в 2018 г. не доработал её до уровня включения в систему.

Работая с программой для `Series`, Олег Игоревич реализовал свои новые формулы. Одна группа формул описывала поведение функций вблизи особых точек, а другая — вблизи линий разрывов. Эти формулы зависят от аргумента функций и могут быть найдены на сайте Wolfram Functions [79]. В системе Wolfram Mathematica, например, команда

`Series[BesselJ[`ν`, z], {z, -2, 0}]`

даёт показательную функцию, зависящую от `Floor` и аргумента `Arg`:

$e^{2i\pi\nu\mathrm{Floor}\left[\frac{\mathrm{Arg}[2+z]}{2\pi}\right]}$ `BesselJ[`ν`, -2]+O[z+2]` [1].

В 1991–1993 г. Виктор Адамчик работал над реализацией алгоритма Маричева для интегрирования функций Мейера и создал программы для вычисления сумм, Алексей Бочаров нашёл элегантное решение, как из кусочного результата неопределённого интегрирования сделать непрерывный результат определённого интегрирования.

Маричев также работал над развитием цепных дробей. До 2010 г. было опубликовано несколько десятков книг и множество статей, где функции разлагались в цепные дроби, а соответствующая теория была разработана и описана формулами и теоремами. В 2012–2014 г. Олег Игоревич заметил, что практически никто не пытался систематически вычислять обратное: цепные дроби через известные функции, и он начинает собирать и выводить такие формулы, преобразуя их в код Mathematica. Часть этих формул была размещена на сайте Wolfram Functions. Но эта работа не была завершена. Спустя 12 лет Брюс Берндт и Джебум Сон представили к публикации книгу, включающую в себя первую в литературе достаточно полную таблицу цепных дробей (`ContinuedFractionK`), содержащую около 200 формул. Однако эти формулы, вероятно, не включают многие формулы коллекции Маричева, например значение

`ContinuedFractionK[c*k^2 + d*k + e, a*k + b, {k, 1, Infinity}]`.

4. Пять постеров, сайт Wolfram Functions в 1997–2025 г. и «Два мира математических функций»

Исследования Олега Игоревича Маричева в области специальных функций получили новое направление развития в 1997 г., когда он объединился с экспертом по специальным функциям Майклом Троттом для реализации амбициозного проекта: систематического описания и классификации всех математических функций, представленных в Mathematica [80]. Целью было создание наглядного справочного ресурса с формулами, графиками и взаимосвязями между функциями.

Первоначально планировалось выпустить серию из пяти настенных плакатов, однако объём собранного материала вскоре значительно превзошёл доступное на стенах пространство. В результате проект был сфотографирован (общая длина пла-

ката оказалась 36 футов, около 11 метров) и перенесён в онлайн-формат. Его фото можно увидеть на страницах [81] (четвёртая фотография). Таким образом, этот проект превратился в The Wolfram Functions Site [80] — крупнейшую в мире коллекцию математических формул (более 307000 формул на 2025 г.), доступную для всех пользователей (см. также [81]).

У сайта Wolfram Functions богатая история. Большую часть своей карьеры О. И. Маричев посвятил выводу интегралов и формул для математических функций. Когда Олег Игоревич жил в Советском Союзе, он был соавтором некоторых из самых больших книг формул, которые содержали в общей сложности около 5000 страниц и около 30000 формул и были переизданы на нескольких языках. Пока он с соавторами писал эти работы, он надеялся в конечном итоге автоматизировать процесс вычисления интегралов и разработал несколько прототипов программ. Попав в компанию Wolfram Research, Маричев открыл для себя фантастический новый мир вывода формул и посвятил себя созданию программ, которые постоянно расширяли возможности Mathematica в области символических операций с математическими функциями.

Всю научную жизнь О. И. Маричев собирал (как люди собирают почтовые марки) и выводил формулы представления различных функций через G-функцию Мейера и H-функцию Фокса. Эти формулы в настоящее время работают в программах `ResourceFunctions[‘‘MeijerGForm’’]` и `ResourceFunctions[‘‘FoxHForm’’]`. К 2025 г. Маричевым было протестировано более 5000 функций.

После трагической гибели Майкла Тротта в июне 2025 г. Олег Игоревич надеется обновить «серию из пяти настенных плакатов», добавив туда недавно появившиеся функции `HeunG`, `FoxH` (внедрённые в Mathematica Тиграном Нерсесяном) и другие (около 50) и поместив всё это в облачный сервис для хранения файлов, в память о «ходячей энциклопедии Mathematica», фантастическом программисте и человеке Майкле Тротте (см. [82–85]).

В 2005 г. в корпорации «Wolfram Research» была проведена конференция, посвящённая 60-летию О. И. Маричева. В пленарном докладе руководителя «Wolfram Research», Стивена Вольфрама приведены воспоминания о том, как Олег Игоревич оказался в корпорации и о его дальнейшей работе. Эти воспоминания очень хорошо характеризуют стиль работы О. И. Маричева, его увлечённость и преданность науке. С. Вольфрам вспоминал: «Я думаю, что я впервые услышал об Олеге в 1985 г. Кто-то сказал мне, что опубликованы таблицы интегралов, большие, чем таблицы Градштейна — Рыжика, в связи с чем было названо имя Маричева. В моей жизни я был энтузиастом интегрирования, но именно в этот период мой энтузиазм был несколько умерен, поскольку я работал над чем-то типа мобильного телефона. Однако в 1986 г. я начал работать над программой “Mathematica” и в 1988 г. вышла первая версия этой программы. Потому я вновь вернулся к мыслям об интегралах. В начале 1990 г. я получил письмо об Олеге Маричеве. Затем после длительного обмена факсами мы организовали приезд Олега Маричева и его ученика Виктора Адамчика. Первое время было для них очень трудным — они с трудом понимали некоторые стандарты американского стиля жизни. Я также помню наши разговоры о G-функции Мейера — они рассказывали нам с некоторой долей мистики, что через эту функцию могут быть вычислены многие интегралы. Это звучало как безумие. Я, конечно, слышал о функции Мейера, но не мог представить, что через неё можно вычислить практически все известные интегралы. Существуют известные алгоритмы для вычисления неопределённых интегралов от элементарных функций (и мы включили их в программу), но для интегралов от специальных функций и

для определённых интегралов — это только набор трюков, никакой систематики. Потому мне это показалось интересным, и я сказал: давайте посмотрим, сможем ли мы инкорпорировать эти вещи, связанные с G-функцией Мейера, в программу. Таким образом, Олег и Виктор начали работать над этим внедрением. В то время — как раз после падения Берлинской стены — многие талантливые советские учёные приехали работать в нашу компанию. С другой стороны, не все местные были довольны, что появился ещё один Олег. Я замечал, что существуют какие-то «советские» особенности поведения. Так, я видел, как Олег, приходя рано утром на работу, начинал неистово колотить по клавишам клавиатуры, как по допотопной пишущей машинке (я думаю, эти клавиатуры быстро выходили из строя). Но время шло и код G-функции Мейера приобрёл окончательный вид. Через несколько лет мы смогли перепроверить все интегралы из справочника Градштейна — Рыжика. Ни один компьютер до этого не был в состоянии проделать такое. Более того, мы смогли даже опубликовать опечатки таблиц (в этом нам помогли Олег и его жена Анна). Мы продолжили развивать это направление, включив многие новые идеи и алгоритмы. Это очень забавно думать, что все дети, которые используют “Mathematica” для нахождения интегралов, имеют дело с G-функцией Мейера. Когда вы погружены в интегрирование, вы автоматически связаны со специальными функциями. В нашем проекте мы очень серьёзно относимся к развитию теории специальных функций. Так, ко Всемирному математическому конгрессу в 1990 г. мы создали постер длиной почти 2 метра, содержащий вычисленные значения дзета-функции. К Конгрессу 1994 г. мы представили полученное с помощью “Mathematica” решение уравнения 5-й степени. В 1998 г. была начата работа над созданием постера, описывающего около 250 специальных функций. Майкл Тротт и Олег Маричев начали эту работу. Проект начал разрастаться, необходимые соотношения доказывались шаг за шагом. За короткое время ими были созданы целых пять постеров с девятью тысячами формул в предварительной версии и длиной более 8 метров (сейчас на сайте “Mathematica” постер о свойствах специальных функций содержит около 27000 формул). В прошлые времена в Советском Союзе была традиция создавать таблицы интегралов. Олег, по-видимому, последний представитель этого направления. Он — наиплодотворнейший производитель математических формул. Потому, я назвал мой доклад «История и будущее специальных функций», посвятив его «гуру» нашей компании, Олегу Маричеву».

Работая над содержанием сайта, О. И. Маричев вывел большое число новых формул для элементарных и специальных функций. Многие из них имеют концептуальные отличия от опубликованных в литературе формул. Например, известная формула «логарифм от произведения равен сумме логарифмов от сомножителей» не верна для комплексных чисел и правильная формула была найдена Олегом Игоревичем и имеет вид (см. [86])

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) + 2i\pi \left\lfloor \frac{-\arg(z_1) - \arg(z_2) + \pi}{2\pi} \right\rfloor, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

где $\lfloor x \rfloor = \texttt{Floor}[x]$ — округление до ближайшего целого числа, не превосходящего x.

Такое отличие выражений, представленных на сайте [80], от привычных формул из известных книг, вызвано тем, что современные системы компьютерной алгебры, включая Wolfram Mathematica, оперируют с функциями и числами $z \in \mathbb{C}$, аргумент которых $\arg(z)$ ВСЕГДА удовлетворяет условию $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$. Эта «аксиома» вынудила корректировать почти половину имеющихся известных формул, потому

что они связаны с обратными функциями и степенной функцией z^a. Такие исправленные формулы имеют численную поддержку во всех комплексных областях (см., например, [87–89]).

Олег Игоревич Маричев в 2005 г. начал работу по реализации дробного интегродифференциального исчисления в системе Wolfram Mathematica [90]. Эта работа была частью большой исследовательской работы по интегральным преобразованиям с G-функциями Мейера в ядре, поскольку преобразования Меллина ядер в дробном интегро-дифференцировании включают только отношение с двумя гамма-функциями одного вида (для других преобразований такие ядра могут включать больше гамма-функций с переменными другого вида). В результате О. И. Маричев составил несколько вариантов программ для преобразования функций в G-функцию Мейера (в форму `MeijerG`). Лучшие из них были позже включены в упомянутые выше `ResourceFunctions["MeijerGForm"]` и `ResourceFunctions["FoxHForm"]` и протестированы к 2025 г. на более чем 5000 функциях. Целью этой работы было не только преобразовать почти все существующие в литературе именованные функции в одну или две суперфункции — G-функции Мейера `MeijerG` и H-функции Фокса `FoxH`, но и обеспечить максимальные удобства в операциях типа `Integrate` со всеми этими функциями одновременно.

Параллельно с сайтом [80] Олегом Игоревичем Маричевым и Майклом Троттом были реализованы несколько других важных проектов. Например, они создали самую большую в мире коллекцию формул теории вероятностей (более 31000 формул для 500 распределений) (см. [91] «The Ultimate Univariate Probability Distribution Explorer», 1 февраля 2013 г.) Часть этих формул была опубликована в справочнике [92].

Будучи на конференции в Японии в 1989 г., О. И. Маричев познакомился с одним из известных специалистов по интегральным уравнениям, профессором Свободного университета Берлина Рудольфом Горенфло. Профессор Горенфло был всегда готов помочь молодым учёным — стажировку в Свободном университете прошли многие ученики и коллеги О. И. Маричева. В 2000 г. В. Кирякова, А. А. Килбас, С. Г. Самко и О. И. Маричев написали юбилейную статью, посвящённую Р. Горенфло [93].

5. Работа: с 2019 по настоящее время

Основным результатом работы Олега Игоревича является разработка алгоритма вычисления интегралов, основанного на свёртке Меллина G-функций Мейера, с его последующей реализацией на компьютере. Этот алгоритм позволяет находить около 80 % интегралов, опубликованных в справочниках и статьях. О. И. Маричев собрал и разработал крупнейшую в мире таблицу основных элементарных и специальных функций, каждая пара которых позволяет вычислить интеграл от этой пары с обеспечением его сходимости. Все функции из этой таблицы представляют собой случаи более общих функций с четырьмя списками параметров (G-функция Мейера и H-функция Фокса).

Из других впечатляющих результатов Олега Игоревича мы отметим обобщения классических известных формул — упомянутая выше формула для $\ln(xy)$ и аналогичные формулы для $(xy)^a$, а также другие формулы «двух миров математических функций» (мир формул из учебников и мир реализованных на компьютере формул), таких, как формула Стирлинга для асимптотики гамма-функции между полюсами.

О. И. Маричев был занят реализацией нескольких проектов. Пользователи программы Mathematica могут найти на Wolfram Functions Site около 307 000 формул, описывающих свойства функций, более 31 000 формул для 500 основных вероятностных распределений (Wolfram Blog), около 1000 разложений в непрерывные дроби, представленных на WolframAlpha website, большинство формул из Wolfram Functions Site внедрены в систему Mathematica с использованием символьного языка Wolfram (для версии 10.3 внедрение было произведено Paco Jain). Среди направлений работы О. И. Маричева отметим следующие:

1) постоянная поддержка, улучшение и разработка общих формул для интегрирования и символического дифференцирования (в том числе и дробного порядка);
2) вывод и проверка общих формул для интегральных преобразований, включая преобразования с функциями `MeijerG`, `FoxH` в ядре, создание программ на их основе;
3) внедрение в модуль `MathematicalFunctionData` около 500 математических констант и сотен новых функций с их определениями и формулами;
4) представление уравнений Лапласа, Гельмгольца и других уравнений в частных производных в более чем 50 различных координатных системах (независимо от О. И. Маричева этот проект был разработан и реализован Итаи Сеггевом);
5) адаптация формул из теории q-гипергеометрических функций;
6) создание программ вычисления разложений в цепные дроби посредством специальных функций;
7) разработка различных типов конверторов для математических функций (из одной в другую) и их визуализаций в Интернете с использованием программы Mathematica (прототип этой идеи был реализован в 1993–1995 г. в The Poster The Mathematical Functions of Mathematica, где линиями с номерами указано, как функции связаны друг с другом, а номера соответствуют формулам связи, приведённым на плакате);
8) вывод общей формулы распределения Пирсона с шестью параметрами и описание свойств абстрактных вероятностных распределений (см. [91]);
9) работа с ортогональными классическими и q-полиномами для расширения известной схемы Аски (Askey Scheme) https://en.wikipedia.org/wiki/Askey_scheme;
10) работа с обзором [74] для перевода монографии [72] на китайский язык позволила разработать и описать концепцию интегродифференциации дробного порядка Римана — Лиувилля — Адамара в системе Mathematica;
11) амбициозная цель — «оживить» очень сложные общие формулы для H-функции Фокса

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1), & \ldots, & (a_n,\alpha_n), & (a_{n+1},\alpha_{n+1}), & \ldots, & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1), & \ldots, & (b_m,\beta_m), & (b_{m+1},\beta_{m+1}), & \ldots, & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right] = H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\ (b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]$$

и более 100 её частных именованных случаев (таких как ln, exp, sin, G-функция Мейера и др.) — побудила О. И. Маричева и Пако Джайна разработать нетривиальное расширение в технологии программирования, введя

объединение табличных и списочных форм для описания наборов параметров в формах, которые люди видят в публикациях.

Все формулы, которые Олег Игоревич нашёл в литературе или получил сам, проходят несколько этапов: трансформирование в формат Mathematica, верификация, возможное расширение на более широкую область с минимумом ограничений и, наконец, конверсия в `TraditionalForm`. После этих шагов формула классифицируется и помещается в соответствующую подсекцию нужного файла или другого документа. На всех этапах такой деятельности О. И. Маричев старается реализовать общий аксиоматический подход — в каждой из областей (функции, интегралы, распределения вероятностей, цепные дроби, системы координат, дифференциальные уравнения и т. д.) он находит и работает с максимально общими или абстрактными функциями и, после проведения манипуляций с соответствующими свойствами, возвращается к конкретным частным случаям. Этот подход был реализован в работе с тождествами для функций и интегрирования, в котором он использовал G-функцию Мейера (которую он ввёл в программу Mathematica) и более общую H-функцию Фокса (которую внедрил в программу Mathematica Тигран Нерсесян). Такой стиль работы, талант, терпение и почти фанатичное упорство в решении задач позволили Олегу Игоревичу внести огромный вклад в развитие математических функций и операций с ними на современной компьютерной системе Mathematica.

Список литературы

1. **Зверович Е. И., Комяк И. И., Маричев О. И.** Федор Дмитриевич Гахов (к 70-летию со дня рождения) // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 1. С. 131–133.
2. **Килбас А. А., Маричев О. И.** Федор Дмитриевич Гахов // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1980. № 4. С. 130–132.
3. **Маричев О. И.** Уравнение смешанного типа с двумя линиями вырождения в несимметричной области // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1969. № 6. С. 74–78.
4. **Маричев О. И.** Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1970. № 5. С. 21–29.
5. **Маричев О. И.** Два уравнения Вольтерра с функциями Горна // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 546–549.
6. **Маричев О. И.** Сингулярные краевые задачи для обобщённого двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 3. С. 523–526.
7. Научные труды Юбилейного семинара по краевым задачам, посвящённого 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Минск : Изд-во «Университетское», 1985.
8. **Маричев О. И.** Об одном классе интегральных уравнений типа свёртки Меллина со специальными функциями в ядрах // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 1. С. 126–127. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, вып. 7308. 18 с.
9. **Маричев О. И.** Уравнение Вольтерра типа свёртки Меллина с F_3-функцией в ядре // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 1. С. 128–129. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, № 7307, 23 с.
10. **Маричев О. И., Данг Дин Куанг.** Краевая задача для уравнения смешанного типа четвёртого порядка в смешанной области с тремя особыми точками // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 1. С. 127–128. Деп. в ВИНИТИ № 29, с. 35–75.
11. **Маричев О. И.** Некоторые интегральные уравнения типа свёртки Меллина, содержащие в ядрах специальные функции // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 6. С. 119–120. Деп. в ВИНИТИ 02.04.76, № 1640, 85 с.

12. **Маричев О. И.** Весовые задачи Неймана и Дирихле в полуплоскости для обобщённого уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 4. С. 128–13.
13. **Маричев О. И., Нгуен Ти Тхань.** Однородная краевая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе в полосе типа пилы с бесконечным количеством особых точек // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 1. С. 128–130. Деп. в ВИНИТИ № 29, с. 36–75.
14. **Маричев О. И.** Полные сингулярные интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, решённые в замкнутой форме // Вестн. Белорус. гос. ун-та. 1978. Сер. 1. № 1. С. 8–14.
15. **Маричев О. И.** Интегральные операторы с ядрами, обобщающими операторы комплексного порядка // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 2. С. 38–44.
16. **Маричев О. И.** Интегральное представление решений обобщённого двуосно-симметричного уравнения Гельмгольца и формулы его обращения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1824–1831.
17. **Маричев О. И.** Сингулярные краевые задачи для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу и двуосно-симметричного уравнения Гельмгольца // Тр. Всесоюз. конф., посвящ. 75-летию академика И. Г. Петровского. М. : МГУ, 1978. С. 373–374.
18. **Маричев О. И.** Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск : Наука и техника, 1978.
19. **Marichev O. I.** Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables. Chichester : Ellis Horwood, 1983.
20. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Вычисление интегралов и преобразование Меллина // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1989. Т. 27. С. 3–146.
21. **Маричев О. И.** Метод вычисления интегралов от гипергеометрических функций // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 7. С. 590–593.
22. **Маричев О. И.** Вычисление интегральных преобразований гипергеометрических функций // Обобщённые функции и их приложения в математической физике. М. : ВЦ АН СССР, 1981. С. 323–331.
23. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. : Наука, 1981.
24. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. М. : Наука, 1983.
25. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: Специальные функции. Дополнительные главы. М. : Наука, 1986.
26. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2002.
27. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2003.
28. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды: Специальные функции. Дополнительные главы. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2003.
29. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 1: Elementary Functions. New York, London, Paris, Montreux, Tokyo : Gordon and Breach, 1986.
30. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 2: Special Functions. New York, London, Paris, Montreux, Tokyo : Gordon and Breach, 1986.
31. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 3: More Special Functions. New York, NJ : Gordon and Breach, 1990.
32. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 4: Direct Laplace Transforms. New York, NJ : Gordon and Breach, 1992.

33. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series, Vol. 5: Inverse Laplace Transforms. New York, NJ : Gordon and Breach, 1992.
34. **Kölbig K. S.** Table Errata: Integrals and Series. Vol. 4 [Gordon and Breach, New York, 1992] by A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. Mathematics of Computation. 1997. Vol. 66, no. 220. P. 1765–1766.
35. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions. (Japaneese). Tokyo : Maruzen Co., Ltd., 1991.
36. **Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.** Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions. (Japaneese). Tokyo : Maruzen Co., Ltd., 1991.
37. **Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.** Таблицы неопределённых интегралов. М. : Наука, 1986.
38. **Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.** Таблицы неопределённых интегралов. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2003.
39. **Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Prudnikov A. P.** Tables of indefinite integrals. New York, London : Gordon & Breach Science Publ./CRC Press, 1989.
40. **Brytschkow J. A., Maritschew O. I., Prudnikow A. P.** Tabellen unbestimmter Integrale. (German). Verlag Harri Deutsch, 1992.
41. **Brychkov Yu., Marichev O., Savischenko N.** Handbook of Mellin transforms. New York : Chapman and Hall/CRC, 2018.
42. **Маричев О. И., Туан В. К.** Некоторые свойства q-гамма-функции $\Gamma_q(z)$ // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 6. С. 488–491.
43. **Маричев О. И.** Условия обратимости интегралов Меллина — Барнса // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 3. С. 205–208.
44. **Marichev O. I., Tuan V. K.** The problems of definitions and symbols of G- and H-functions of several variables // Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia. (Special Issue). 1983. Vol. 6. P. 144–151.
45. **Адамчик В. С., Маричев О. И.** Представления функций гипергеометрического типа в логарифмических случаях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. Т. 5. С. 29–35.
46. **Marichev O. I.** Major terms of the asymptotic integral expansions of the hypergeometric functions. Short communications (Abstracts) of ICM-82. Warsazawa. 1983. Part 7. Sect. 9. P. 54.
47. **Маричев О. И.** Асимптотическое поведение функций гипергеометрического типа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. Т. 4. С. 18–25.
48. **Маричев О. И., Ву Ким Туан.** Определение общей G-функции двух переменных, её главные случаи и дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. Т. 19, № 10. С. 1797–1799. Деп. в ВИНИТИ 08.02.83, № 687-83, 20 с.
49. **Bryčkov J. A., Glaeske H.-J., Maričev O. I.** Die Produktstruktur einer Klasse von Integraltransformationen. Complex Analysis and Its Applications to Partial Differential Equations. Congress und Tagungsberichte der Martin Luther Universität Halle-Wittenberg. 1984. P. 59–60.
50. **Marichev O. I.** On the representation of Meijer's G-function in the vicinity of singular unity. Complex Analysis and Applications. Varna, 1981. Sofia : Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 383–398.
51. **Marichev O. I., Kalla S. L.** Behaviour of hypergeometric function ${}_pF_{p-1}(z)$ in the vicinity of unity // Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia. 1984. Vol. 7, no. 2. P. 1–8.
52. **Glaeske H.-J., Maričev O. I.** The Laguerre transform of some elementary functions // Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen. 1984. Vol. 3, no. 3. P. 237–244.
53. **Адамчик В. С., Маричев О. И.** Фундаментальная система решений оператора $L_n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n + z$ // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 6. С. 1082–1083.

54. **Брычков Ю. А., Глеске Х.-Ю., Маричев О. И.** Факторизация интегральных преобразований типа свёртки // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1983. Т. 21. С. 3–41.

55. **Маричев О. И., Туан В. К.** Некоторые уравнения Вольтерра с функцией Аппеля F_1 в ядре // Тр. Юбилейного семинара по краевым задачам. Минск : Университетское образование, 1985. С. 169–172.

56. **Азаматова В. И., Маричев О. И.** Результаты работ белорусских математиков по интегральным уравнениям типа свёртки и их приложения // Тр. Юбилейного семинара по краевым задачам. Минск : Университетское образование, 1985. С. 27–30.

57. **Маричев О. И., Туан В. К.** Композиционная структура некоторых интегральных преобразований типа свёртки // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та приклад. математики им. И. Н. Векуа. Тбилисский гос. ун-т, Тбилиси. 1985. Т. I, № 1. С. 139–142.

58. **Marichev O. I., Tuan V. K.** The factorization of G-transform in two spaces of functions // Complex Analysis and Applications. Varna. Sofia : Bulgarian Academy of Sciences, 1986. P. 418–433.

59. **Brychkov Y. A., Marichev O. I., Yakubovich S. B.** Integral Appell F_3-transformation with respect to parameters // Complex Analysis and Applications. Varna. Sofia : Bulgarian Academy of Sciences, 1986. P. 135–140.

60. **Brychkov Y. A., Marichev O. I., Yakubovich S. B.** Factorization of integral transformations // Publicationes Mathematicae. Reports of International Conference on Generalized Functions (Debrecen, 1984). 1986. Vol. 33. P. 161.

61. **Маричев О. И., Адамчик В. С., Туан В. К.** Решения обобщённого гипергеометрического дифференциального уравнения // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30, № 10. С. 876–956.

62. **Bryčkov J. A., Glaeske H.-J., Maričev O. I.** Die Produktstruktur einer Klasse von Integral transformationen // Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen. 1986. Vol. 5, no. 2. P. 119–123.

63. **Marichev O. I.** Compositions of fractional integrals and derivatives with power weights. Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications. Abstracts of Conference, Novi Sad. Dubrovnik, 1987. P. 37.

64. **Yakubovich S. B., Tuan V. K., Marichev O. I., Kalla S. L.** A class of index integral transforms // Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia. 1987. Vol. 10, no. 1. P. 105–118.

65. **Saigo M., Marichev O. I., Hài N. T.** Asymptotic representations of Gaussian series ${}_2F_1$, Clausenian series ${}_3F_2$, and Appell series F_2 and F_3 near boundaries of their convergence regions // Fukuoka University Science Reports. 1989. Vol. 19, no. 2. P. 83–90.

66. **Marichev O. I.** Compositions of fractional integrals and derivatives with power weights // Fractional Calculus and Its Applications. Proceedings of International Conference, Nihon University, Tokyo, 1981, ed. K. Nishimoto. College of Engineering, Nihon University, 1990. P. 94–99.

67. **Васильев И. Л., Маричев О. И.** Операционный метод суммирования рядов на основе преобразования Лорана // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35, № 4. С. 296–299.

68. **Hài N. T., Marichev O. I., Buschman R. G.** Theory of the general H-function of two variables // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1992. Vol. 22, no. 4. P. 1317–1327.

69. **Hài N. T., Marichev O. I., Srivastava H. M.** A note on the convergence of certain families of multiple hypergeometric series // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. Vol. 164, no. 1. P. 104–115.

70. **Adamchik V. S., Marichev O. I.** The algorithm for calculating integrals of hypergeometric type functions and its realization in REDUCE system. Proceedings of International Conference ISAAC'90, Tokyo, 1990. New York, ACM. 1990. P. 212–224.

71. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987.
72. **Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. L.** Fractional Integrals and Derivatives. Amsterdam : Gordon and Breach Science Publ., 1993.
73. **Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.** Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications. Translation on Chinese by prof. Changpin Li with "Overview of fractional calculus and its computer implementation in Wolfram Mathematica" by O. I. Marichev, E. L. Shishkina, China Science Publishing & Media Ltd. (Science Press), Beijing, 1993.
74. **Marichev O., Shishkina E.** Overview of fractional calculus and its computer implementation in Wolfram Mathematica // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2024. Vol. 27. P. 1995–2062.
75. **Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.** Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами. Самара : Изд-во Самар. гос. эконом. ун-та, 2008.
76. **Маричев О. И., Славянов С. Ю., Брычков Ю. А.** Полиномы Белла в системе Mathematica и асимптотические решения интегральных уравнений // Теорет. и мат. физика. 2019. Т. 201, № 3. С. 446–456.
77. **Яковлев С. Л., Андронов И. В., Суслина Т. А., Федотов А. А., Итс А. Р., Мотовилов А. К., Фарафонов В. Г., Казаков А. Я.** Памяти Сергея Юрьевича Славянова // Теорет. и мат. физика. 2019. Т. 201, № 2. С. 151–152.
78. URL: https://mathworld.wolfram.com/LauricellaFunctions.html (дата обращения: 01.09.2025).
79. URL: https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/BesselJ/06/01/03/01/0006/ (дата обращения: 01.09.2025).
80. URL: http://functions.wolfram.com (дата обращения: 01.09.2025).
81. URL: https://blog.wolfram.com/2008/05/06/two-hundred-thousand-new-formulas-on-the-web/ (дата обращения: 01.09.2025).
82. URL: https://blog.wolfram.com/author/michael-trott/ (дата обращения: 01.09.2025).
83. **Trott M.** The Mathematica guidebook for programming. New York : Telos-Springer, 2004.
84. URL: https://blog.wolfram.com/2013/05/17/making-formulas-for-everything-from-pi-to-the-pink-panther-to-sir-isaac-newton/ (дата обращения: 01.09.2025).
85. URL: https://blog.wolfram.com/2013/07/19/using-formulas-for-everything-from-a-complex-analysis-class-to-political-cartoons-to-music-album-covers/ (дата обращения: 01.09.2025).
86. URL: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Log/16/04/01/0008/ (дата обращения: 01.09.2025).
87. URL: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Power/16/04/ (дата обращения: 01.09.2025).
88. URL: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Sqrt/16/03/01/0007/ (дата обращения: 01.09.2025).
89. URL: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Power/16/04/01/01/0008/ (дата обращения: 01.09.2025).
90. **Marichev O. I.** Fractional integro-differentiation for Mathematica // Book of Abstracts. International Symposium on Analytic Function Theory, Fractional Calculus and Their Applications (In Honour of Professor H. M. Srivastava on his 65th Birth Anniversary), University of Victoria, PIMS, 2005. P. 33.
91. URL: https://blog.wolfram.com/2013/02/01/the-ultimate-univariate-probability-distribution-explorer/ (дата обращения: 01.09.2025).
92. **Брычков Ю. А., Маричев О. И., Софотасиос П. Х.** Функции распределения вероятностей и их характеристики. Справочник. М. : Макс-Пресс, 2018.

93. **Kiryakova V., Kilbas A. A., Samko S. G., Marichev O. I.** 70th anniversary of Professor Rudolf Gorenflo // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2000. Vol. 3, no. 4. P. 339–342.

Поступила в редакцию 03.09.2025.
После переработки 24.09.2025.

Сведения об авторах

Рогозин Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аналитической экономики и эконометрики, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь; e-mail: rogosin@bsu.by.

Ситник Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; профессор кафедры высшей математики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, Москва, Россия; e-mail: sitnik@bsu.edu.ru.

Шишкина Элина Леонидовна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Института инженерных и цифровых технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; e-mail: shishkina@amm.vsu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 609–633.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-609-633

ABOUT THE SCIENTIFIC ACTIVITIES OF OLEG IGOREVICH MARICHEV: TO THE 80TH ANNIVERSARY

S.V. Rogosin[1,a], **S.M. Sitnik**[2,3,b], **E.L. Shishkina**[2,4,c]

[1] *Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2] *Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*
[3] *National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*
[4] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[a] *rogosin@bsu.by,* [b] *sitnik@bsu.edu.ru,* [c] *shishkina@amm.vsu.ru*

This article presents a detailed biography and analysis of the scientific contributions of the outstanding mathematician Oleg Igorevich Marichev (born 1945). It covers his journey from his school years in Minsk, where he developed an interest in mathematics, through his studies at Belarusian State University under the supervision of Academician F.D. Gakhov, to his fundamental works in the field of special functions and integral equations. The article describes in detail the creation of monumental reference books on integrals and series, as well as a key monograph on fractional calculus. Particular attention is paid to Marichev's work at Wolfram Research, where he developed symbolic integration algorithms and created the world's largest collection of mathematical formulas (the Wolfram Functions Site). The article highlights Marichev's innovative approach to unifying mathematical functions through Meyer G-functions and his significant role in the development of computer algebra.

Keywords: *Marichev, Wolfram Mathematica, integral calculus, special functions, symbolic calculus.*

References

1. **Zverovich E.I., Komyak I.I., Maričev O.I.** Fedor Dmitrievich Gakhov (k 70-litiyu so dnya rozhdeniya) [Fedor Dmitrievich Gakhov (on his 70th birthday)]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1976, vol. 1, pp. 131–133. (In Russ.).
2. **Kilbas A.A., Maričev O.I.** Fedor Dmitrievich Gakhov. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1980, vol. 4, pp. 130–132. (In Russ.).
3. **Maričev O. I.** Uravneniye smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozhdeniya v nesimmetrichnoy oblasti [A mixed type equation with two lines of degeneracy in a nonsymmetrical domain]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1969, vol. 6, pp. 74–78. (In Russ.).
4. **Maričev O.I.** Krayevye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozhdeniya [Boundary value problems for a mixed type equation with two curves of degeneracy]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1970, vol. 5, pp. 21–29. (In Russ.).
5. **Maričev O.I.** Two Volterra equations with Horn functions. *Soviet Mathematics Doklady*, 1972, vol. 13, no. 3, pp. 703–707.

6. **Maričev O.I.** Singular boundary value problems for a generalized biaxially symmetric Helmholtz equation. *Soviet Mathematics Doklady*, 1976, vol. 17, no. 5, pp. 1342–1346.
7. Scientific works of the Jubilee Seminar on Regional Problems, dedicated to the 75th anniversary of the birth of Academician of the Academy of Sciences of the BSSR F.D. Gakhov. Minsk, Universitetskoye, 1985. (In Russ.).
8. **Maričev O.I.** Ob odnom klasse integral'nykh uravneniy tipa svyortki Mellina so spetsial'nymi funktsiyami v yadrakh [A class of integral equations of Mellin convolution type with special functions in the kernels]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1974, no. 1, pp. 126–127. (In Russ.).
9. **Maričev O.I.** Uravneniye Vol'terra tipa svyortki Mellina s F_3-funktsiyey v yadre [A Volterra equation of Mellin convolution type with F_3-function in the kernel. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1974, no. 1, pp. 128–129. (In Russ.).
10. **Maričev O.I., Dang Din Kuang.** Krayevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa chetvyortogo poryadka v smeshannoy oblasti s tremya osobymi tochkami [A boundary value problem for the mixed type equation of fourth order in the confounded domain with three singular points]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1974, no. 1, pp. 127–128. (In Russ.).
11. **Maričev O.I.** Nekotorye integral'nye uravneniya tipa svyortki Mellina, soderzhashchiye v yadrakh spetsial'nye funktsii [Some integral equations of Mellin convolution type containing the special functions in the kernels]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1976, no. 6, pp. 119–120. (In Russ.).
12. **Maričev O.I.** Vesovye zadachi Neymana i Dirikhle v poluploskosti dlya obobshchyonnogo uravneniya Eylera–Puassona–Darbu [Neumann and Dirichlet weight problems in the half-plane for the generalized Euler–Poisson–Darboux equation. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1976, no. 4, pp. 128–130. (In Russ.).
13. **Maričev O.I., Nguyen Ti Thanh.** Odnorodnaya krayevaya zadacha Trikomi dlya uravneniya Lavrent'yeva–Bitsadze v polose tipa pily s beskonechnym kolichestvom osobykh tochek [Homogeneous Tricomi boundary value problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation in the strip similar to saw with infinite quantity of singular points]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1976, no. 1, pp. 128–130. (In Russ.).
14. **Maričev O.I.** Polnye singulyarnye integral'nye uravneniya so stepenno-logarifmicheskimi yadrami, reshyonnye v zamknutoy forme [Full singular integral equations with power-logarithmic kernels solved in the closed form]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1978, vol. 1, no. 1, pp. 8–14. (In Russ.).
15. **Maričev O.I.** Integral'nye operatory s yadrami, obobshchayushchimi operatory kompleksnogo poryadka [Integral operators with kernels generalizing the operators of complex order]. *Vesti Akademii Nauk BSSR Ser. Fiziko-matematicheskikh nauk* [New of Academy of Sciences of Belorussian SSR. Ser. of physical and mathematical sciences], 1978, no. 2, pp. 38–44. (In Russ.).
16. **Maričev O.I.** Integral'noye predstavleniye resheniy obobshchyonnogo dvuosno-simmetrichnogo uravneniya Gel'mgol'tsa i formuly yego obrashcheniya [An integral representation of the solutions of a generalized biaxially symmetric Helmholtz equation

and formulas for its inversion]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1978, vol. 14, no. 10, pp. 1824–1831. (In Russ.).

17. **Maričev O.I.** Singulyarnye krayevye zadachi dlya uravneniya Eylera–Puassona–Darbu i dvuosno-simmetrichnogo uravneniya Gel'mgol'tsa [Singular boundary value problems for Euler–Poisson–Darboux equation and biaxially symmetric Helmholtz equation]. *Proceedings of All-Union Conference devoted to 75th birthday of academician I.G. Petrovskii*, Moscow, Moscow State University, 1978. Pp. 373–374. (In Russ.).
18. **Maričev O.I.** *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul)* [Method of calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1978. (In Russ.).
19. **Marichev O.I.** *Handbook of integral transforms of higher transcendental functions: theory and algorithmic tables.* Chichester, Ellis Horwood, 1983.
20. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** Vychisleniye integralov i preobrazoniye Mellina [Calculation of integrals and Mellin transformation]. *Itogi nauki i tekhniki. Matematicheskiy analiz* [Results of science and technology. Mathematical analysis], 1989, vol. 27, pp. 3–146. (In Russ.).
21. **Marichev O.I.** Metod vychisleniya integralov ot gipergeometricheskikh funktsiy [A method for calculating integrals of hypergeometric functions]. *Doklady Akademii Nauk BSSR* [Reports of Academy of Sciences of Belorussian SSR], vol. 25, no 7, pp. 590–593. (In Russ.).
22. **Marichev O.I.** Vychisleniye integral'nykh preobrazovaniy gipergeometricheskikh funktsiy [Calculation of integral transformations of hypergeometric functions]. *Obobshchyonnye funktsii i ikh prilozheniya v matematicheskoy fizike* [Generalized functions and their applications in mathematical physics]. Moscow, Computing Center of Academy of Sciences of USSR, 1981. Pp. 323–331. (In Russ.).
23. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka, 1981. (In Russ.).
24. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and series. Special functions]. Moscow, Nauka, 1983. (In Russ.).
25. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and series. Special functions. Additional chapters]. Moscow, Nauka, 1986. (In Russ.).
26. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Second edition. Moscow, Fizmatlit, 2002. (In Russ.).
27. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and series. Special functions]. Second edition, Moscow, Fizmatlit, 2003. (In Russ.).
28. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and series. Special functions. Additional chapters]. Second edition, Moscow, Fizmatlit, 2003. (In Russ.).
29. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions.* New York, London, Paris, Montreux, Tokyo, Gordon and Breach, 1986.
30. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions.* New York, London, Paris, Montreux, Tokyo, Gordon and Breach, 1986.
31. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 3. More Special Functions.* New York, NJ, Gordon and Breach, 1990.
32. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 4. Direct Laplace Transforms.* New York, NJ, Gordon and Breach, 1992.
33. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series, Vol. 5. Inverse Laplace Transforms.* New York, NJ, Gordon and Breach, 1992.

34. **Kölbig K.S.** *Table Errata: Integrals and Series. Vol. 4.* [Gordon and Breach, New York, 1992] by A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. *Mathematics of Computation*, 1997, vol. 66, no. 220, pp. 1765–1766.
35. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions.* Tokyo, Maruzen Co., Ltd, 1991. (In Japaneese).
36. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions.* Tokyo, Maruzen Co., Ltd, 1991. (In Japaneese).
37. **Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Prudnikov A.P.,** *Tablitsy neopredelyonnykh integralov* [Tables of indefinite integrals]. Moscow, Nauka, 1986. (In Russ.).
38. **Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Prudnikov A.P.,** *Tablitsy neopredelyonnykh integralov* [Tables of indefinite integrals]. Second edition. Moscow, Fizmatlit, 2003. (In Russ.).
39. **Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Prudnikov A.P.** *Tables of Indefinite Integrals.* New York, London, Gordon & Breach Science Publishers/CRC Press, 1989.
40. **Brytschkow J.A., Maritschew O.I., Prudnikow A.P.** *Tabellen unbestimmter Integrale.* Verlag, Harri Deutsch. 1992. (In German).
41. **Brychkov Yu., Marichev O., Savischenko N.** *Handbook of Mellin transforms.* New York, Chapman and Hall/CRC, 2018.
42. **Marichev O.I., Tuan V.K.** Nekotorye svoystva q-gamma-funktsii $\Gamma_q(z)$ [Some properties of the q-gamma-function $\Gamma_q(z)$]. *Doklady Akademii Nauk BSSR* [Reports of Academy of Sciences of Belorussian SSR], 1982, vol. 26, no. 6, pp. 488–491. (In Russ.).
43. **Marichev O.I.** Usloviya obratimosti integralov Mellina–Barnsa [Conditions for the reversibility of Mellin–Barnes integrals]. *Doklady Akademii Nauk BSSR* [Reports of Academy of Sciences of Belorussian SSR], 1982, vol. 26, no. 3, pp. 205–208. (In Russ.).
44. **Marichev O.I., Tuan V.K.** The problems of definitions and symbols of G- and H-functions of several variables. *Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia.* (Special Issue). 1983, vol. 6, pp. 144–151.
45. **Adamchik V.S., Marichev O.I.** Predstavleniye funktsiy gipergeometricheskogo tipa v logarifmicheskikh sluchayakh [Representations of functions of hypergeometric type in logarithmic cases]. *Izvestiya Akademii Nauk BSSR. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [News of Academy of Sciences. Ser. of physical and mathematical sciences], 1983, vol. 5, pp. 29–35. (In Russ.).
46. **Marichev O.I.** Major terms of the asymptotic integral expansions of the hypergeometric functions. *Short communications (Abstracts) of ICM-82.* Warsazawa, 1983, part 7, sect. 9, p. 54.
47. **Marichev O.I.** Asimptoticheskoye povedeniye funktsiy gipergeometricheskogo tipa [Asymptotic behavior of functions of hypergeometric type]. *Izvestiya Akademii Nauk BSSR. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [News of Academy of Sciences. Ser. of physical and mathematical sciences], 1983, vol. 4, pp. 18–25. (In Russ.).
48. **Marichev O.I., Vu Kim Tuan.** Opredeleniye obshchey G-funktsii dvukh peremennykh, yeyo chastnye sluchai i differentsial'nye uravneniya [The definition of general G-function of two variables, its principal cases and differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1983, vol. 19, no. 10, pp. 1797–1799. (In Russ.).
49. **Bryčkov J.A., Glaeske H.-J., Maričev O.I.** Die Produktstruktur einer Klasse von Integraltransformationen. *Complex Analysis and Its Applications to Partial Differential Equations.* Congress und Tagungsberichte der Martin Luther Universität Halle-Wittenberg, 1984, pp. 59–60.
50. **Marichev O.I.** On the representation of Meijer's G-function in the vicinity of singular unity. *Complex Analysis and Applications*, 1981, Varna. Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1984, pp. 383–398.
51. **Marichev O.I., Kalla S.L.** Behaviour of hypergeometric function ${}_pF_{p-1}(z)$ in the vicinity of unity. *Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia*, 1984, vol. 7, no. 2, pp. 1–8.

52. **Glaeske H.-J., Maričev O.I.** The Laguerre transform of some elementary functions. *Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen*, 1984, vol. 3, no. 3, pp. 237–244. Фундаментальная система решений для оператора
53. **Adamchik V.S., Marichev O.I.** Fundamental'naya sistema resheniy dlya operatora $L_n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n + z$ [Fundamental system of solutions for the operator $L_n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n + z$]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1984, vol. 20, no. 6, pp. 1082–1083.
54. **Brychkov Y.A., Glaeske H.J., Marichev O.I.** Factorization of integral transformations of convolution type. *Journal of Mathematical Sciences*, 1985, vol. 30, pp. 2071–2094.
55. **Marichev O.I., Tuan V.K.** Nekotorye uravneniya Vol'terra s funktsiey Appelya F_1 v yadre [Some Volterra equations with the Appell function F_1 in the kernel]. *Proceedings of a commemorative seminar on boundary value problems*, Minsk, 1985. Pp. 169–172. (In Russ.).
56. **Azamatova V.I., Marichev O.I.** Rezul'taty rabot belorusskikh matematikov po integral'nym uravneniyam tipa svyortki i ikh prilozheniya [The results of Belorussian mathematicians on integral equations of convolution type and their applications]. *Proceedings of a commemorative seminar on boundary value problems*, Minsk, 1985. Pp. 27–30. (In Russ.).
57. **Marichev O.I., Tuan V.K.** Kompozitsionnaya struktura nekotorykh integral'nykh preobrazovaniy tipa svyortki [Composition structure of some integral transformations of convolution type]. *Reports of the extended sessions of a seminar of the I. N. Vekua Institute of Applied Mathematics*. Tbilisi, Tbilisi State University, 1985, vol. I, no. 1, pp. 139–142. (In Russ.).
58. **Marichev O.I., Tuan V.K.** The factorization of G-transform in two spaces of functions. *Complex Analysis and Applications*. Varna, 1986. Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1986. Pp. 418–433.
59. **Brychkov Y.A., Marichev O.I., Yakubovich S.B.** Integral Appell F_3-transformation with respect to parameters. *Complex Analysis and Applications*. Varna, 1986. Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1986. Pp. 135–140.
60. **Brychkov Y.A., Marichev O.I., Yakubovich S.B.** Factorization of integral transformations. *Publicationes Mathematicae*, Reports of International Conference on Generalized Functions (Debrecen, 1984), 1986, vol. 33, p. 161.
61. **Marichev O.I., Adamchik V.S., Tuan V.K.** Resheniya obobshchyonnogo gipergeometricheskogo differentsial'nogo uravneniya [Solutions of a generalized hypergeometric differential equation]. *Doklady Akademii Nauk BSSR* [Reports of Academy of Sciences of Belorussian SSR], 1986, vol. 30, no. 10, pp. 876–956.
62. **Bryčkov J.A., Glaeske H.-J., Maričev O.I.** Die Produktstruktur einer Klasse von Integral transformationen. *Zeitschrift Fur Analysis Und Ihre Anwendungen*, 1986, vol. 5, no. 2, pp. 119–123.
63. **Marichev O.I.** Compositions of fractional integrals and derivatives with power weights. *Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications.* Novi Sad, Abstracts of Conference. Dubrovnik, 1987. P. 37.
64. **Yakubovich S.B., Tuan V.K., Marichev O.I., Kalla S.L.** A class of index integral transforms. *Revista Técnica Facultad de Ingenieria. Universidad del Zulia*, 1987, vol. 10, no. 1, pp. 105–118.
65. **Saigo M., Marichev O.I., Hài N.T.** Asymptotic representations of Gaussian series ${}_2F_1$, Clausenian series ${}_3F_2$, and Appell series F_2 and F_3 near boundaries of their convergence regions. *Fukuoka University Science Reports*, 1989, vol. 19, no. 2, pp. 83–90.
66. **Marichev O.I.** Compositions of fractional integrals and derivatives with power weights. *Fractional Calculus and Its Applications*. Proceedings of International Conference, Nihon University, Tokyo, 1981, ed. K. Nishimoto. College of Engineering, Nihon University, 1990. Pp. 94–99.

67. **Vasiliev I.L., Marichev O.I.** Operatsionnyy metod summirovaniya ryadov na osnove preobrazovaniya Lorana [An operational method for the summation of series based on the Laurent transform]. *Doklady Akademii Nauk BSSR* [Reports of Academy of Sciences of Belorussian SSR], 1991, vol. 35, no. 4, pp. 296–299.
68. **Hài N.T., Marichev O.I., Buschman R.G.** Theory of the general H-function of two variables. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1992, vol. 22, no. 4, pp. 1317–1327.
69. **Hài N.T., Marichev O.I., Srivastava H.M.** A note on the convergence of certain families of multiple hypergeometric series. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, vol. 164, no. 1, pp. 104–115.
70. **Adamchik V.S., Marichev O.I.** The algorithm for calculating integrals of hypergeometric type functions and its realization in REDUCE system. *Proceedings of International Conference ISAAC'90*, Tokyo, 1990. New York, ACM, 1990. Pp. 212–224.
71. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987. (In Russ.).
72. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional integrals and derivatives.* Amsterdam, Gordon and Breach Science Publ., 1993.
73. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications.* Translation on Chinese by prof. Changpin Li with "Overview of fractional calculus and its computer implementation in Wolfram Mathematica" by O.I. Marichev, E.L. Shishkina. Beijing, China Science Publishing & Media Ltd. (Science Press), 1993.
74. **Marichev O., Shishkina E.** Overview of fractional calculus and its computer implementation in Wolfram Mathematica. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2024, vol. 27, pp. 1995–2062.
75. **Marichev O.I., Kilbas A.A., Repin O.A.** *Krayevye zadachi dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koeffirsientami* [Boundary value problems for partial differential equations with discontinuous coefficients]. Samara, Samara State Economic University, 2008. (In Russ.).
76. **Marichev O.I., Slavyanov S.Yu., Brychkov Yu.A.** Bell polynomials in the Mathematica system and asymptotic solutions of integral equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 201, no. 3, pp. 1798–1807.
77. **Yakovlev S.L., Andronov I.V., Suslina T.A., Fedotov A.A., Its A.R., Motovilov A.K., Farafonov V.G., Kazakov A.Ya.**. In memory of Sergei Yuryevich Slavyanov. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2019, vol. 201, pp. 1543–1544.
78. Available at: https://mathworld.wolfram.com/LauricellaFunctions.html, accessed: 01.09.2025.
79. Available at: https://functions.wolfram.com/Bessel-TypeFunctions/BesselJ/06/01/03/01/0006/, accessed: 01.09.2025.
80. Available at: http://functions.wolfram.com, accessed: 01.09.2025.
81. Available at: https://blog.wolfram.com/2008/05/06/two-hundred-thousand-new-formulas-on-the-web/, accessed: 01.09.2025.
82. Available at: https://blog.wolfram.com/author/michael-trott/, accessed: 01.09.2025.
83. **Trott M.** *The Mathematica Guidebook for Programming.* New York, Telos-Springer, 2004.
84. Available at: https://blog.wolfram.com/2013/05/17/making-formulas-for-everything-from-pi-to-the-pink-panther-to-sir-isaac-newton/, accessed: 01.09.2025.
85. Available at: https://blog.wolfram.com/2013/07/19/using-formulas-for-everything-from-a-complex-analysis-class-to-political-cartoons-to-music-album-covers/, accessed: 01.09.2025.
86. Available at: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Log/16/04/01/0008/, accessed: 01.09.2025.

87. Available at: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Power/16/04/, accessed: 01.09.2025.
88. Available at: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Sqrt/16/03/01/0007/, accessed: 01.09.2025.
89. Available at: https://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Power/16/04/01/01/0008/, accessed: 01.09.2025.
90. **Marichev O.I.** Fractional Integro-Differentiation for Mathematica. *Book of Abstracts. International Symposium on Analytic Function Theory, Fractional Calculus and Their Applications (In Honour of Professor H.M. Srivastava on his 65th Birth Anniversary)*, University of Victoria, PIMS, 2005. P. 33.
91. Available at: https://blog.wolfram.com/2013/02/01/the-ultimate-univariate-probability-distribution-explorer/, accessed: 01.09.2025.
92. **Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Sofotasios P.H.** *Funktsiya raspredeleniya veroyatnostey i ikh kharakteristiki. Spravochnik* [Probability distribution functions and their characteristics. Handbook]. Moscow, Max-Press, 2018. (In Russ.).
93. **Kiryakova V., Kilbas A.A., Samko S.G., Marichev O.I.** 70th anniversary of Professor Rudolf Gorenflo. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000, vol. 3, no. 4, pp. 339–342.

Article received 03.09.2025.
Corrections received 24.09.2025.

МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 634–641.

УДК 517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-634-641

ОБРАЩЕНИЕ ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА

Х. Алкади

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

hamsaphd.hassan44@gmail.com

Впервые рассматривается дробно дифференциальный полиномиальный оператор, обобщающий многочлен с целочисленным дифференцированием Эйлера. Исследуется его обратимость в пространствах функций, ограниченных со степенным весом на отрезке. Устанавливается существование ограниченного обратного к рассматриваемому оператору в этих пространствах. Результаты применяются к доказательству корректной разрешимости задачи без начальных условий для неоднородного обобщённого уравнения Эйлера с дробным дифференцированием Маршо. Получены интегральное представление и оценка решения через правую часть.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение Эйлера, сильно непрерывная полугруппа, дробная степень оператора, корректная задача, ортогональные многочлены.*

1. Введение

В [1] для дифференциального уравнения

$$P_n(\mathbb{D}_x^\nu)u = \sum_{m=0}^{n} a_m({}_0\mathbb{D}_x^\nu)^m u(x) = f(x), \qquad x \in (0,\infty), \tag{1}$$

где ${}_0\mathbb{D}_x^\nu$ — дробная производная Капуто порядка $\nu \in (0,1)$, $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, модуль которой растёт не быстрее экспоненты на $[0,\infty)$, рассматривается однородная задача Коши с условиями

$$u(0) = u^{(1)}(0) = \ \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

и показывается, что задача имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$u(x) = \int_0^x q(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^x q(\xi)f(x-\xi)d\xi,$$

где $q(x)$ — дробная функция Грина, найденная из характеристического полинома $P_n(p) = \sum_{m=0}^{n} a_m p^m$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Заметим, что при этом не обсуждается устойчивость к погрешности решения $u(x)$ в зависимости от погрешности задания $f(x)$, что необходимо при численной реализации задачи для обоснования корректной разрешимости по Адамару.

В [2] для исследования задач без начальных условий рассматриваются уравнения на $(-\infty,\infty)$ вида

$$P_n(\overline{a},\overline{\nu})u(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^{\nu_m}}{dx^{\nu_m}}u(x) = f(x), \qquad x \in (-\infty,\infty), \tag{2}$$

где $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_m \geqslant 0$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_m \in (0,1)$, $\frac{d^{\nu_m}}{dx^{\nu_m}}$ — производная Маршо. Для этой задачи в [2] показано, что если f принадлежит пространству $C_\mu[-\infty, \infty]$ с нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} e^{-\mu x}|f(x)|, \quad \mu \geqslant 0,$$

то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in C_\mu[-\infty, \infty]$ и оно имеет вид

$$u = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n U(s, A_m)U(s, A)f ds = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n \int_0^\infty h_{\alpha_m, a_m s}(\xi_m) f(t-\xi) d\xi ds,$$

где $h_{\alpha_m, a_m s}(\xi_m)$ — функция Иосиды. При этом для решения справедлива оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{\sum\limits_{m=0}^n a_m \mu^{\nu_m}}.$$

1.1. Постановка задачи и формулировка результата

С целью продолжения исследования задач без начальных условий для уравнений с дробными производными с применением операторных методов функционального анализа в настоящей заметке изучается корректная разрешимость по Адамару задачи без начальных условий для дробно-полиномиального уравнения Эйлера

$$L_n u(x) = \sum_{m=0}^n a_m (\mathbb{D}^\nu)^m u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где $\mathbb{D}^\nu$ — дробная степень порядка $\nu \in (0,1)$ оператора $\mathbb{D}$, заданного выражением $x\frac{d}{dx}$ и областью определения $D(\mathbb{D}) = \{u \in C_\mu[0,1] : x\frac{du}{dx} \in C_\mu[0,1]\}$, где $C_\mu[0,1]$ — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $[0,1]$ функций с нормой

$$\|u\|_\mu = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|u(x)|}{x^\mu}, \quad \mu \geqslant 0.$$

Как известно, корректная разрешимость по Адамару эквивалентна существованию ограниченного обратного оператора L_n^{-1} в $C_\mu[0,1]$.

В данной работе доказано, что справедлива следующая теорема корректности.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_\mu[0,1]$ и корни $\{p_k\}_{k=1}^n$ характеристического полинома $L_n(p) = \Sigma_{m=0}^n a_m p^m$ удовлетворяют условию*

$$p_k < \mu^\nu, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) *имеет единственное решение $u \in C_\mu$, и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_\mu \leqslant M \sum_{k=1}^n \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k)|P_n'(p_k)|}. \tag{5}$$

2. Предварительные сведения

2.1. C_0-полугруппы операторов

При исследовании корректной разрешимости задач для уравнений в банаховых пространствах важную роль играют методы теории сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных преобразований.

Напомним, что семейство $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ линейных ограниченных преобразований в банаховом пространстве E называется C_0-полугруппой операторов, действующей в E, если оно удовлетворяет условиям

1) $U(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$;

2) $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$, $\varphi \in E$, $s, t \geqslant 0$;

3) $\lim\limits_{t\to 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0$, $\varphi \in E$.

Для C_0-полугруппы операторов существуют такие $M \geqslant 0$ и $w \in \mathbb{R}$, что

$$\|U(t)\varphi\| \leqslant Me^{wt}\|\varphi\|.$$

Если $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ — C_0-полугруппа операторов, то существует оператор

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[U(t)\varphi - \varphi] := A\varphi,$$

определённый на векторах $\varphi \in E$, при которых указанный предел существует. Этот оператор A называется генератором полугруппы $U(t)$. Как известно, область определения $D(A)$ генератора A C_0-полугруппы операторов плотна в E.

Известно также [3], что если оператор $-A$ является генератором C_0-полугруппы операторов $U(t, -A)$ с оценкой

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leqslant me^{-wt}\|\varphi\|, \quad w > 0,\ t \geqslant 0,$$

то для A определены дробные степени, определяемые формулой Балакришнана

$$A^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha}[U(t, -A) - I]\varphi dt, \ \ \alpha \in (0, 1).$$

Связь дробной степени оператора A, заданного выражением $A = \frac{d}{dx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, с дробными производными Маршо обсуждается в [2].

2.2. Ортогональные многочлены

Важным классом многочленов, имеющих простую кратность, являются ортогональные многочлены, определённые на интервале (a, b), конечном или бесконечном, согласно следующему правилу. Пусть

$$\{P_k(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

есть последовательность многочленов одинаковой степени. Если для некоторого $h(x) > 0$, такого, что $\int_a^b h(x)dx < \infty$, для любых $n, m = 0, 1, \ldots$

$$\int_a^b h(x)P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

то многочлены (6) называются ортогональными. При этом интервал (a, b) называется интервалом ортогональности.

Фундаментальным свойством ортогональных многочленов является тот факт, что все нули ортогональных многочленов $P_n(x)$ действительны, различны и расположены в интервале (a, b).

2.3. Оператор Эйлера и его дробные степени в $C[0,1]$

Пусть $E = C[0,1]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$, и действие операторов $U(t)\varphi(x)$ задано равенством

$$U(t)\varphi(x) = \varphi[xe^{-t}], \quad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при $\varphi \in C[0,1]$ выполняются следующие соотношения:

$$\|U(t)\varphi\| \leqslant \|\varphi\|, \quad U(0)\varphi = \varphi, \tag{8}$$

$$U(t)U(s)\varphi(x) = U(t)\varphi(xe^{-s}) = \varphi(xe^{-(s+t)}) = U(t+s)\varphi(x).$$

Если $\varphi(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$, то справедливо равенство $U(t)(x^n) = (xe^{-t})^n = x^n e^{-nt}$, поэтому

$$\lim_{t\to 0+} U(t)(x^n) = x^n. \tag{9}$$

Так как функции x^n, $n = 0, 1, \ldots$, образуют плотное в $C[0,1]$ множество, то из (8) и (9) по теореме Банаха — Штейнгауза [3] следует сходимость

$$\lim_{t\to 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \varphi \in C[0,1].$$

Таким образом, определяемое формулой (7) семейство операторов $U(t)$ является (C_0)-полугруппой линейных операторов в $C[0,1]$ с генератором

$$\frac{d}{dt}(U(t)\varphi(x))\bigg|_{t=0} = -x\frac{d\varphi}{dx} = -A\varphi.$$

Следовательно, для оператора $A\varphi = x\frac{d\varphi}{dx}$ определены дробные степени $A^\alpha\varphi$, $\alpha \in (0,1)$.

Замечание 1. Замена $xe^{-t} = \tau$ и равенство $x^{-\mu}U(t)\varphi(x) = e^{-\mu t}\tau^{-\mu}\varphi(\tau)$ дают оценку $\|U(t)\varphi\|_\mu \leqslant e^{-\mu t}\|\varphi\|_\mu$, где $\|\varphi\|_\mu = \|x^{-\mu}\varphi\|_{C[0,1]}$.

3. Доказательство теоремы корректности

Из предыдущего следует, что в силу теоремы Балакришнана [3, с. 358] определена дробная степень $(x\frac{d}{dx})^\nu = L^\nu$, $\nu \in (0,1)$

$$L^\nu\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \frac{U(t,-L)\varphi - \varphi}{t^{1+\varphi}}dt.$$

При этом оператор $-L^\nu$ является производящим оператором C_0-полугруппы

$$U(s,-L^\nu)\varphi = \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)U(\xi,-L)\varphi d\xi, \tag{10}$$

где $h_{s,\nu}(\xi)$ — функция Иосиды, обладающая свойствами

$$h_{s,\nu}(\xi) > 0, \quad \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)e^{-a\xi}d\xi = e^{-a^\nu s}.$$

Пользуясь неравенством

$$x^{-\mu}|U(s,-L^\nu)f(x)| = x^{-\mu}|f(xe^{-s})| = (\tau e^s)^{-\mu}|f(\tau)| \leqslant e^{-\mu s}\|f\|_\mu,$$

получаем оценку $\|U(s,-L)f\|_\mu \leqslant e^{-\mu s}\|f\|_\mu$ Отсюда и из (10) для $f \in C_\mu[0,1]$ получаем

$$\begin{aligned}\|U(s,-L^\nu)f\|_\mu &\leqslant \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)\|U(\xi,-L)f\|_\mu d\xi \leqslant \\ &\leqslant \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)e^{-\mu\xi}d\xi\|f\|_\mu = e^{-\mu^\nu s}\|f\|_\mu.\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь для доказательства теоремы можно воспользоваться теоремой Маслова — Хевисайда [4] для операторного уравнения

$$P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f, \tag{12}$$

где $a_m \in \mathbb{C}$, $(-A)$ — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t,-A)$, действующей в банаховом пространстве E с оценкой $\|U(t,-A)\| \leqslant Me^{-wt}$, $w \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Тогда для любого $f \in E$ уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее $D(A^n)$, если корни скалярного многочлена $P_n(\lambda)$ удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_j < w$. Это решение имеет вид

$$u = \int_0^\infty q(t)U(t,-A)f dt, \tag{13}$$

где функция $q(t)$ является решением задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t) = \delta(t), \tag{14}$$

$$q(0) = \ldots = q^{(n-1)}(0) = 0, \tag{15}$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (14) с учётом условий (15) даёт представление функции $q(t)$ в образах Лапласа:

$$L\left(\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t)\right)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t)dt = \sum_{m=0}^{n} a_m p^m \tilde{q}(p) = P_n(p)\tilde{q}(p) = 1.$$

Отсюда $\tilde{q}(p) = 1/P_n(p)$ и применение обратного преобразования Лапласа в соответствии с [5, с. 47] даёт решение задачи (14), (15)

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{w-i\infty}^{w+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{P_n(p)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\frac{(p-p_k)^{n_k}e^{pt}}{P_n(p_k)}, \tag{16}$$

где p_k — корни многочлена $P_n(p)$ кратностей n_k, $k = 1,2,\ldots,m \leqslant n$.

В частности, если все корни многочлена $P_n(p)$ простые, т. е. $n_k = 1$, $k = 1,2,\ldots,m = n$, то формула (16) имеет вид

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{p_k t}}{P_n'(p_k)}, \quad P_n'(p_k) = \left.\frac{P_n(p)}{p-p_k}\right|_{p=p_k}.$$

Применяя формулу (13) к уравнению (3), где $A = L^\nu$, $E = C_\mu$, а $P_n(p)$ — ортогональный полином, корни которого p_k все действительные и различные, для решения уравнения (3) получаем представление

$$u = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} U(t, -L^\nu) f}{P_n'(p_k)} dt, \tag{17}$$

отсюда, в силу (11), следует оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} \|U(t, -L^\nu)\|_\mu \|f\|_\mu}{|P_n'(p_k)|} dt \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} e^{-\mu^\nu t}}{|P_n'(p_k)|} dt \|f\|_\mu =$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k)|P_n'(p_k)|}. \tag{18}$$

Тем самым получены неравенство (5) и доказательство теоремы корректности.

Полученный результат показывает, что задача без начальных условий для уравнения (1) корректно поставлена. При этом оценка корректности (18) и решение (17) позволяют численно реализовать решение для широкого класса уравнений, включающих классические ортогональные многочлены.

Особый интерес представляет случай многочленов Чебышёва первого рода $T_n(x)$, представление которых в виде

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, \ldots,$$

позволяет получить явный вид их корней

$$x_k^n = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Подставив (19) в (17), в силу равенств [6, с. 40]

$$\acute{T}_n(x_k^n) = \frac{(-1)^{k-1} n}{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

получаем решение уравнения (1) с характерическим многочленом Чебышёва первого рода

$$u(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \int_0^\infty e^{p_k t} U(t, -L^\nu) dt f(x).$$

Отсюда следует оценка корректности в предположении (4)

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{p_k t} \|U(t, -L^\nu) f\| dt \leqslant \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{-(\mu^\nu - p_k)t} dt \|f\|_\mu =$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{\mu^\nu - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

В случае $\mu = 1$ эта оценка имеет вид

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{M}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}.$$

Список литературы

1. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008.
2. **Костин В. А., Костин Д. В., Алкади Х.** Задача без начальных условий для уравнения с дробной производной и «промежуточные асимптотики»// Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 78–88.
3. **Иосида К.** Функциональный анализ. М. : Мир, 1967.
4. **Костин В. А., Костин А. В., Костин Д. В.** Операторный метод Маслова — Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля // Докл. Академии наук. 2013. Т. 452, № 4. С. 367–370.
5. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. : Наука, 1974.
6. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М. : Наука, 1983.

Поступила в редакцию 03.02.2025.
После переработки 09.08.2025.

Сведения об авторе

Алкади Хамса, аспирантка кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 634–641.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-634-641

THE INVERSION OF THE FRACTIONAL POLYNOMIAL EULER OPERATOR

H. Alkadi

Voronezh State University, Voronezh, Russia
hamsaphd.hassan44@gmail.com

We consider, for the first time, a fractional differential polynomial operator generalizing a polynomial with the integer Euler differentiation. We study its invertibility in spaces of functions bounded with a power weight on a segment. We establish the existence of a bounded inverse to the operator under consideration in these spaces. The results are applied to prove the correct solvability of the problem without initial conditions for the inhomogeneous generalized Euler equation with fractional differentiation of the Marchaud. We provide an integral representation and an estimate for the solution in terms of the right-hand side.

Keywords: *Euler differential equation, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators, well-posed problems, orthogonal polynomials.*

References

1. **Uchaikin V.V.** *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. (In Russ.).
2. **Kostin V.A., Kostin D.V., Alkadi H.** Problem without initial conditions for equation with fractional derivatives and intermediate asymptotics. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, no. 1, pp. 78–88. (In Russ.).
3. **Yosida K.** *Functional Analysis*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
4. **Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V.** Maslov–Heaviside operator method and C_0-operator Duhamel integral. *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 552–555.
5. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Integral Transforms and Operational Calculus*. Oxford, Pergamon Press, 1965.
6. **Pashkovskii S.** *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of Chebyshev polynomials and series]. Moscow, Nauka, 1983. (In Russ.).

Article received 03.02.2025.
Corrections received 09.08.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 642–648.

УДК 517.968.23 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-642-648

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ ОБОБЩЁННЫХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. А. Гальмукова[1,a], **К. М. Расулов**[2,b]

[1] *ВА ВПО ВС РФ имени маршала Советского Союза А.М.Василевского, Смоленск, Россия*
[2] *Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия*
[a] *irina.galmuckova@yandex.ru,* [b] *kahrimanr@yandex.ru*

Построен эффективный алгоритм явного метода решения одной модельной краевой задачи типа задачи Карлемана для обобщённых метааналитических функций в произвольных односвязных областях. Основная суть полученного алгоритма состоит в том, что явное решение исследуемой задачи можно получить, решая последовательно две классические задачи типа Карлемана в классах аналитических функций комплексного переменного.

Ключевые слова: *обобщённая метааналитическая функция, краевая задача типа Карлемана, алгоритм явного решения.*

Введение

Предположим, что L — произвольная простая замкнутая кривая Ляпунова на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а T^+ — конечная область, ограниченная L, причём точка $z = 0$ принадлежит T^+.

Напомним [1–3], что функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется *обобщённой метааналитической функцией* в области T^+, если она является регулярным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + q_1(z)\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + q_0(z)F(z) = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ дифференциальный оператор Коши — Римана, а $q_0(z), q_1(z)$ — заданные аналитические в области T^+ функции.

Всевозможные регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области T^+ представляются в виде (см. [1–3])

$$F(z) = \left[\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)\right] e^{\lambda_0(z)\bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) = \lambda_1(z), \tag{2}$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z)e^{\lambda_0(z)\bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_1(z)\bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) \neq \lambda_1(z), \tag{3}$$

причём $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ являются аналитическими в T^+ функциями, называемыми *аналитическими компонентами* обобщённой метааналитической функции $F(z)$, а $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ — корни уравнения $\lambda^2 + q_1(z)\lambda + q_0(z) = 0$.

В дальнейшем *обобщёнными метааналитическими функциями первого типа* назовём функции, задаваемые формулой (2), а *обобщёнными метааналитическими функциями второго типа* — функции, задаваемые формулой (3).

Далее через $M_2(T^+) \cap H(L)$ будем обозначать класс функций $F(z)$ вида (2) или (3), у которых аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$, а также функции $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжаются на контур L.

Сформулируем постановку задачи, которая является объектом исследования настоящей работы: *требуется найти все обобщённые метааналитические в области T^+ функции $F(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L условиям:*

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t)\overline{F^+(t)} + g_0(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial \bar{t}} - \lambda(t)F^+[\alpha(t)] = G_1(t)\overline{\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - \lambda(t)F^+(t)\right)} + g_1(t), \tag{5}$$

где

$$F^+(t) = \lim_{z \to t \in L} F(z), \quad \frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \to t \in L} \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}};$$

$\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура L, для которого выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{6}$$

$\lambda(t)$ — граничное значение некоторого корня характеристического уравнения $\lambda^2 + q_1(z)\lambda + q_0(z) = 0$, а $G_k(t)$ и $g_k(t)$ $(k = 0, 1)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера (т. е. $G_k(t), g_k(t) \in H(L)$), причём $G_k(t) \neq 0$ $(k = 0, 1)$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Ради краткости сформулированную краевую задачу будем называть задачей GK_M. Частный случай, когда $q_0(z) = \text{const}$, $q_1(z) = \text{const}$, краевой задачи GK_M впервые был сформулирован и исследован в работе [4].

Главной целью настоящей статьи является разработка эффективного алгоритма явного метода решения задачи GK_M. При этом ради краткости изложения здесь мы ограничиваемся разработкой подробного алгоритма решения задачи GK_M для функций, задаваемых формулой (3), т. е. в классе обобщённых метааналитических функций второго типа.

Алгоритм решения задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа

Пусть в соотношении (5) $\lambda(t) = \lambda_0(t)$. Тогда, учитывая формулу (3) и условие $\lambda_0(t) \neq \lambda_1(t)$, краевые условия (4) и (5) можно записать, соответственно, следующим образом:

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] = G_{10}(t)\overline{\varphi_0^+(t)} + Q_0(t), \tag{7}$$

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + Q_1(t), \tag{8}$$

где приняты обозначения

$$G_{10}(t) = G_0(t)e^{\overline{\lambda_0(t)}t - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}, \; G_{11}(t) = G_1(t)\frac{\overline{\lambda_1(t)} - \overline{\lambda_0(t)}}{\overline{\lambda_1[\alpha(t)]} - \overline{\lambda_0[\alpha(t)]}}e^{\overline{\lambda_1(t)}t - \lambda_1[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}},$$

$$Q_0(t) = g_0(t)e^{-\lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}} - \varphi_1^+[\alpha(t)]\, e^{\lambda_1[\alpha(t)] - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}} + G_0(t)\overline{\varphi_1^+(t)}e^{\overline{\lambda_1(t)}t - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}, \tag{9}$$

$$Q_1(t) = \frac{g_1(t)e^{-\lambda_1[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}}{\lambda_1[\alpha(t)] - \lambda_0[\alpha(t)]}.$$

Заметим, что равенство (8) является краевым условием классической задачи типа Карлемана относительно аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ (см., например, [5, с. 172]). Поэтому с учётом (6), краевое условие (8) можно привести к виду

$$\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]\varphi_1^+(t) = G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right], \quad t \in L. \tag{10}$$

Ясно, что в силу соотношения (10) для решения задачи типа Карлемана (8) (а значит, и для решения задачи GK_M) целесообразно отдельно рассматривать следующие 4 возможных случая:

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \equiv 0, G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right] \neq 0, \quad t \in L; \tag{11}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \neq 0, \quad t \in L; \tag{12}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \equiv 0, G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right] \equiv 0, \quad t \in L; \tag{13}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} = 0 \text{ в отдельных точках контура } L. \tag{14}$$

Предположим, что выполняются условия (11). Из соотношения (10) следует, что если выполняются условия (11), то задача типа Карлемана (8) не имеет решений (неразрешима), а значит, в этом случае не будет иметь решений и исходная задача GK_M, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (11)*, то задача* GK_M *в классе обобщённых метааналитических функций второго типа неразрешима.*

Пусть теперь выполняется условие (12). Тогда, как видно из (10), решение задачи типа Карлемана (8) сводится к решению следующей задачи об аналитическом продолжении функции $\varphi_1^+(z)$:

$$\varphi_1^+(t) = \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]}, \quad t \in L. \tag{15}$$

Хорошо известно (см., например, [6, с. 420]), что для разрешимости задачи об аналитическом продолжении (15) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

При выполнении условий (16) единственное решение задачи об аналитическом продолжении (15) можно задать в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]} \frac{dt}{t - z}. \tag{17}$$

Далее, подставляя граничные значения найденной по формуле (17) аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ в правую часть равенства (9), сначала находим значения функции $Q_0(t)$, а затем решаем классическую задачу типа Карлемана (7) относительно аналитической функции $\varphi_0^+(z)$, например методом, изложенным в монографии [5, с. 186–188].

Таким образом, при выполнении условия (12) получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие* (12)*, то решение задачи* GK_M *в классе обобщённых метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению задачи об аналитическом продолжении* (15) *относительно функции* $\varphi_1^+(z)$ *и классической задачи типа Карлемана* (7) *относительно функции* $\varphi_0^+(z)$*.*

Далее подробно остановимся на построении алгоритма решения задачи GK_M в случае, когда выполняются условия (13). Пусть при этом $\chi_1 = \mathrm{Ind}G_{11}(t)$ — индекс задачи типа Карлемана (8). Тогда хорошо известен следующий результат (см., например, [5, с. 186]):

если $\chi_1 \geqslant 0$, то задача типа Карлемана (8) безусловно разрешима и её общее решение задаётся формулой

$$\varphi_1^+(z) = z^{m_1} X_{11}^+(z) \left[\sum_{j=1}^{\chi_1} \beta_{j1} W_{j1}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right], \tag{18}$$

где $m_1 = \chi_1/2$, а $\psi_1(t)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$(K\psi_1)(t) \equiv \psi_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{\overline{(\tau')^2}}{\bar{\tau} - \bar{t}} \psi_1(\tau) \right] d\tau = \frac{Q_1(t)}{[\alpha(t)]^m X_0^+[\alpha(t)]};$$

если $\chi_1 < 0$, то для разрешимости задачи типа Карлемана (8) необходимо и достаточно выполнение следующих $-\chi_1 - 1$ условий разрешимости:

$$\mathrm{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau} d\tau = 0, \quad \mathrm{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau^{j+1}} d\tau = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau^{j+1}} d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\frac{\chi_1}{2} - 1. \tag{20}$$

Если условия, заданные формулами (19), (20), выполняются, то решение задачи типа Карлемана (8) определяется формулой

$$\varphi_1^+(z) = z^{m_1} X_{11}^+(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + c_0 \right], \tag{21}$$

где c_0 — определённая действительная постоянная.

Пусть задача типа Карлемана (8) является разрешимой и аналитическая функция $\varphi_1^+(z)$ найдена по формуле (18) или (21). Тогда, подставляя в выражение функции $Q_0(t)$, задаваемой по формуле (9), вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения найденной аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, а затем решая задачу типа Карлемана (7) относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_0^+(z)$, получим решение исходной краевой задачи GK_M по формуле (3), где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ — решения классических краевых задач типа Карлемана (7) и (8) соответственно.

Приведённые выше рассуждения позволяют сформулировать следующий *алгоритм* решения задачи GK_M для функций, задаваемых формулой (3) в случае выполнения условий (13).

1-й шаг. С учётом представления (3) переписываем краевые условия (4) и (5) в виде (7) и (8) соответственно.

2-й шаг. Решаем краевую задачу типа Карлемана (8) относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_1^+(z)$. В случае разрешимости задачи (8) находим

значения аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ по формуле (18) или (21), а затем переходим к шагу 3. Если же задача типа Карлемана (8) неразрешима, то и исходная задача GK_M неразрешима, и на этом завершается алгоритм.

3-й шаг. Подставляем в выражение функции $Q_0(t)$, задаваемой формулой (9), граничные значения аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, являющейся решением краевой задачи (8), а затем решаем обычную задачу типа Карлемана (7). Если данная задача (7) является разрешимой, то она позволяет отыскать значения аналитической функции $\varphi_0^+(z)$ и перейти к шагу 4. Если же задача (7) является неразрешимой, то и исходная краевая задача GK_M также неразрешима. И, соответственно, алгоритм завершается.

4 шаг. Подставляя в правую часть формулы (3) вместо $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ решения задач типа Карлемана (8) и (7) соответственно, получаем общее решение исходной краевой задачи GK_M. На этом заканчивается алгоритм.

Ясно, что установленный выше алгоритм решения краевой задачи GK_M в краткой форме можно выразить в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (13)*, то решение задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению двух классических краевых задач типа задачи Карлемана* (8) *и* (7) *относительно аналитических функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ соответственно. При этом задача GK_M разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи типа Карлемана* (8) *и* (7)*.*

В заключение отметим, что, поскольку до сих пор задача типа Карлемана (8) для аналитических функций не исследована при выполнении условий (14), остаётся неисследованной и задача GK_M при выполнении указанных условий.

Нетрудно проверить, что построенный выше алгоритм явного метода решения рассматриваемой задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа вполне применим и для построения аналогичного алгоритма для решения задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций первого типа.

Список литературы

1. **Балк М. Б., Зуев М. Ф.** О метааналитических функциях // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 5. С. 203–226.
2. **Балк М. Б.** Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы матемематики. Фундамент. направления. 1991. Т. 85. С. 187–246.
3. **Balk M. B.** Polyanalytic Functions. Berlin : Akademie Verlag, 1991.
4. **Осипян К. В., Расулов К. М.** Модельная краевая задача типа задачи Карлемана в классах метааналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 19. Смоленск : СмолГУ, 2018. С. 299–305.
5. **Литвинчук Г. С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977.
6. **Галузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966.

Поступила в редакцию 08.11.2024.
После переработки 11.01.2025.

Сведения об авторах

Гальмукова Ирина Аркадьевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры естественно-научных дисциплин, Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации, Смоленск, Россия; e-mail: irina.galmuckova@yandex.ru.

Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия; e-mail: kahrimanr@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 642–648.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-642-648

ON ALGORITHM FOR SOLVING A MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE CARLEMAN TYPE IN THE CLASSES OF GENERALIZED META-ANALYTIC FUNCTIONS

I.A. Galmukova[1,a], **K.M. Rasulov**[2,b]

[1] *Military Academy named after Marshal of the Soviet Union A.M. Vasilevsky, Smolensk, Russia*
[2] *Smolensk State University, Smolensk, Russia*
[a] *irina.galmuckova@yandex.ru,* [b] *kahrimanr@yandex.ru*

The paper is devoted to the construction of an efficient algorithm for an explicit method for solving a model boundary value problem of the Carleman type for generalized metaanalytic functions in arbitrary simply connected domains. The main essence of the algorithm obtained in the article is that an explicit solution of the problem can be obtained by successively solving two classical Carleman-type boundary value problems in classes of analytic functions of a complex variable.

Keywords: *generalized metaanalytic function, Carleman type boundary value problem, explicit solution algorithm.*

References

1. **Balk M.B., Zuev M.F.** On polyanalytic functions. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no.5, pp. 201–223.
2. **Balk M.B.** Polianaliticheskiye funktsii i ikh obobshcheniya [Polyanalytic functions and their generalizations]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Ser. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1991, vol. 85, pp. 187–246.
3. **Balk M.B.** *Polyanalytic Functions*. Berlin, Akademie Verlag, 1991.
4. **Osipyan K.V., Rasulov K.M.** Model'naya krayevaya zadacha tipa zadachi Karlemana v klassakh metaanaliticheskikh funktsiy [Model boundary value problem of the Carleman type in classes of meta-analytic functions]. *Systemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer Mathematics Systems and Their Applications], Proceedings of the International Conference, iss. 19. Smolensk, Smolensk State University, 2018. Pp. 299–305.
5. **Litvinchuk G.S.** *Krayevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* [Boundary value problems and singular integral equations with a shift]. Moscow, Nauka, 1977.
6. **Goluzin G.M.** *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1966.

Article received 08.11.2024.
Corrections received 11.01.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 649–663.

УДК 517.955 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-649-663

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО РАВНОМЕРНО СТРОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Г. В. Демиденко[1,2,a], **В. С. Нурмахматов**[2,b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[a] *demidenk@math.nsc.ru,* [b] *v.s.nurmuhammad@gmail.com*

Рассматривается класс строго псевдогиперболических операторов четвёртого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входят, в частности, операторы Власова, Гальперна, Рэлея — Бишопа. При некоторых условиях на коэффициенты установлены энергетические оценки.

Ключевые слова: *уравнение, не разрешённое относительно старшей производной, псевдогиперболический оператор, энергетическая оценка, весовое соболевское пространство.*

1. Введение

В работе рассматривается класс псевдогиперболических уравнений [1] четвёртого порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u \equiv (aI + L_0(D_x))\, D_t^2 u + L_1(x; D_x)D_t u + L_2(x; D_x)u = f(t, x), \qquad (1.1)$$

где

$$L_1(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x) D_x^\alpha, \quad L_2(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x) D_x^\alpha, \qquad (1.2)$$

и $L_0(D_x) = \sum\limits_{|\alpha|=2} a_\alpha^0 D_x^\alpha$ — эллиптический оператор. Это уравнение является не разрешённым относительно старшей производной. Впервые систематическое изучение уравнений такого типа проводилось в работах С. Л. Соболева [2]. Поэтому в литературе уравнения вида (1.1) часто называются уравнениями соболевского типа [3; 4].

Класс уравнений (1.1) содержит, в частности, уравнение Гальперна [5], уравнение Власова [6; 7], описывающее крутильные колебания упругого стержня, уравнение Рэлея — Бишопа, возникающего в теории волноводов [8; 9], а также их многомерные аналоги.

Наша цель — получение энергетических оценок для класса строго псевдогиперболических операторов $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$ из (1.1). Работа является продолжением исследований [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370/.

2. Основные результаты

Напомним определение псевдогиперболических операторов с постоянными коэффициентами [1, гл. 2]

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_k^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k. \tag{2.1}$$

Определение 1. Дифференциальный оператор (2.1) называется *псевдогиперболическим*, если его символ $\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$ однороден относительно некоторого вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in N$, т. е. $\mathcal{L}(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi) = c\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$, $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, при этом уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi)(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\},$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi), \ldots, \eta_l(\xi)$. Если корни различные, то оператор называется *строго псевдогиперболическим.*

Для рассматриваемого класса операторов из (1.1)

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = (aI + L_0(D_x))\, D_t^2 + L_1(x; D_x)D_t + L_2(x; D_x) \tag{2.2}$$

мы будем предполагать, что выполнена оценка

$$a_1|\xi|^2 \geqslant L_0(i\xi) \geqslant a_0|\xi|^2, \quad \xi \in R^n, \quad a > 0, \tag{2.3}$$

где $a_1 \geqslant a_0 > 0$ — постоянные, и для любого $x^0 \in R^n$ оператор

$$L_0(D_x)D_t^2 + L_1(x^0; D_x)D_t + L_2(x^0; D_x)$$

является строго псевдогиперболическим, т. е. уравнение

$$L_0(i\xi)(i\eta)^2 + L_1(x^0, i\xi)(i\eta) + L_2(x^0, i\xi) = 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\}, \tag{2.4}$$

имеет только вещественные и различные корни $\eta_1(x^0, \xi), \eta_2(x^0, \xi)$. Это эквивалентно тому, что выполнено неравенство

$$d(x^0, \xi) = \Big(\sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x^0)(\xi)^\alpha \Big)^2 - 4 \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0(\xi)^\alpha \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x^0)(\xi)^\alpha > 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\}. \tag{2.5}$$

Определение 2. Оператор вида (2.2) называется *равномерно строго псевдогиперболическим*, если: а) при любом $x^0 \in R^n$ выполняется (2.5), и б) найдётся константа $\delta > 0$, такая, что при любом $x^0 \in R^n$ имеет место неравенство

$$|\eta_1(x^0, \xi) - \eta_2(x^0, \xi)| \geqslant \delta|\xi|, \quad \xi \in R^n. \tag{2.6}$$

В работе [10] был рассмотрен оператор вида (2.2), коэффициенты которого достаточно мало отличались от постоянных, при этом их производные до третьего порядка включительно достаточно малы. В этом случае были установлены энергетические оценки. В данной работе мы освободимся от требования малости и докажем аналогичные оценки.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_\alpha^k(x) \in C^4(R^n)$, $k = 1, 2$, в дифференциальных операторах (1.2) постоянные вне некоторого шара $G = \{|x| \leqslant r\}$, и существует константа $a_2 > 0$, такая, что имеет место неравенство

$$\sum_{|\beta|=4} a_\beta^2(x)\xi^\beta \geqslant a_2|\xi|^4, \quad \xi \in R^n. \tag{2.7}$$

По определению (2.5) многочлен $d(x^0, \xi)$ при любых x^0 является однородным по ξ шестой степени, поэтому существует константа $p > 0$, такая, что в силу (2.3), (2.5), (2.6) независимо от x^0 справедлива оцека

$$p|\xi|^6 \geqslant d(x^0, \xi) \geqslant 4a_0^2\delta^2|\xi|^6, \quad \xi \in R^n. \tag{2.8}$$

В качестве примера равномерно строго псевдогиперболического уравнения с младшими членами можно рассмотреть многомерные аналоги уравнения Власова [6; 7] и уравнения Релея — Бишопа [8; 9; 11]

$$(aI - a_1\Delta)D_t^2u + a_2\Delta^2u + \sum_{|\beta|\leqslant 3} a_\beta(x)D_x^\beta u = f(t, x),$$

где Δ — оператор Лапласа по $x \in R^n$, a, a_1, $a_2 > 0$.

В дальнейшем символом $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, т. е. $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, если $u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t}u(t, x) \in W_2^{2,4}(R^{n+1})$. По определению положим

$$\|u(t, x),\, W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})\| = \|u_\gamma(t, x),\, W_2^{2,4}(R^{n+1})\|.$$

Символом $\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $u_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$.

Отметим, что из [1; 12] вытекает энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора вида (2.2) с постоянными коэффициентами. А именно, справедлива теорема.

Теорема 1. *Для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, такой, что*

$$D_t^2D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \qquad |\beta| = 2, \tag{2.9}$$

имеет место оценка

$$\gamma\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leqslant c\|\mathcal{L}(D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \tag{2.10}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$.

В работе [10] аналогичный результат был доказан для операторов вида (2.2) с переменными коэффициентами, достаточно мало отличающимися от постоянных. В настоящей работе мы снимаем требоваие малости. Будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует $\gamma_0 > 0$, такое, что для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, для которой выполнено (2.9), имеет место оценка*

$$\begin{gathered}\gamma\|(|\xi|^2 + a)\,(|\eta| + \gamma + |\xi|)\,\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1})\| \leqslant \\ \leqslant c\|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(R^{n+1})\|\end{gathered} \tag{2.11}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t,x)$.

Оценки (2.10), (2.11) являются аналогами энергетических неравенств для строго гиперболических операторов [13; 14].

Отметим, что энергетические оценки вида (2.11) можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами. В частности, из теоремы 2 вытекает теорема о единственности решения задачи Коши.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда задача Коши для равномерно строго псевдогиперболического уравнения* (1.1)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{cases}$$

не может иметь более одного решения $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, удовлетворяющего (2.9).

3. Энергетические оценки

Напомним, что для строго псевдогиперболического оператора (2.1) с постоянными коэффициентами в [1, гл. 2; 12] были получены энергетические оценки и доказана однозначная разрешимость задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений. При этом для получения энергетических оценок была использована известная схема Лере, предложенная при изучении задачи Коши для строго гиперболических уравнений [14]. Затем такой подход был развит в работе [10] при получении энергетических оценок для операторов вида (2.2) с переменными коэффициентами, достаточно мало отличающимися от постоянных. Сейчас мы будем применять этот подход для равномерно строго псевдогиперболического оператора с достаточно гладкими коэффициентами без требования малости.

Будем записывать коэффициенты операторов (1.2) в виде

$$a^k_\alpha(x) = a^k_\alpha + a^{k,0}_\alpha(x), \ k = 1, 2,$$

где $a^k_\alpha = \text{const}$, $a^{k,0}_\alpha(x) \in C^4_0(R^n)$, при этом $a^{k,0}_\alpha(x) \equiv 0$, $|x| > r$.

Как и в работе [10], рассмотрим форму

$$\mathcal{M}u = -\mathrm{Im} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-\gamma t}\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t,x)\overline{e^{-\gamma t}\mathcal{L}'(D_t, D_x)u(t,x)}d\bar{x}, \tag{3.1}$$

где $\bar{x} = (t,x)$,

$$\mathcal{L}'(D_t, D_x)u(t,x) = 2i\left(aI + \sum_{|\alpha|=2} a^0_\alpha D^\alpha_x\right) D_t u(t,x) + i\sum_{|\alpha|=3} a^1_\alpha D^\alpha_x u(t,x).$$

Проводя оценки этой формы, мы установим энергетическое неравенство (2.11). В силу плотности $C^\infty_0(R^{n+1})$ в $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1})$ будем рассматривать (3.1) для $u(t,x) \in C^\infty_0(R^{n+1})$.

Напомним, что коэффициенты $a^m_\alpha(x)$, $m = 1, 2$, постоянные вне некоторого шара $G = \{|x| \leqslant r\}$. Зафиксируем некоторое малое число $\sigma > 0$. Степень его малости

мы укажем ниже. Выберем конечное число точек $x^1, x^2, \dots, x^N$ из шара G таким образом, чтобы совокупность окрестностей $B(\sigma, x^k) = \{x \in R^n : |x - x^k| < \sigma\}$ покрывала шар G, т. е. $G \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B(\sigma, x^k)$, при этом будем считать, что

$$x^{j-1} \in B(\sigma, x^j),\ j = 1, 2, \dots, N,\ |x^0| > r.$$

По теореме о разбиении единицы можно построить систему функций $\varphi_k(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B(\sigma, x^k)$, $0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 1$, $k = 1, \dots, N$, такую, что

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x) = 1,\ x \in G. \tag{3.2}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi_0(x) = 1 - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x),\ x \in R^n. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) = 1,\ x \in R^n. \tag{3.4}$$

Используя (3.2)–(3.4), можно представить все коэффициенты в виде

$$a_\alpha^m(x) = \sum_{k=0}^{N} [\varphi_k(x)\big(a_\alpha^m(x) - a_\alpha^m(x^k)\big) + \varphi_k(x) a_\alpha^m(x^k)],\ x \in R^n,$$

$m = 1, 2$, и коэффициенты постоянные при $|x^0| > r$. Тогда

$$\mathcal{M}u = \sum_{k=0}^{N} -\operatorname{Im} \int\limits_{R^{n+1}} [(aI + L_0(D_x))(D_t + \gamma)^2(\varphi_k(x) u_\gamma(t, x)) +$$

$$+ \varphi_k(x)\big(L_1(x^k; D_x)(D_t + \gamma) + L_2(x^k; D_x)\big) u_\gamma(t, x) +$$

$$+ \big(L_1(x, x^k; D_x)(D_t + \gamma) + L_2(x, x^k; D_x)\big) u_\gamma(t, x)] \overline{\mathcal{L}'(D_t + \gamma, D_x) u_\gamma(t, x)} dx dt,$$

где

$$L_m(x, x^k; D_x) = \sum_{|\alpha| = 2+m} \varphi_k(x)\big(a_\alpha^m(x) - a_\alpha^m(x^k)\big) D_x^\alpha,\quad m = 1, 2.$$

Определим дифференциальные операторы $\tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x)$, $m = 1, 2$, такие, что

$$L_m(x^k; D_x)\big(\varphi_k(x) u_\gamma(t, x)\big) =$$

$$= \varphi_k(x) L_m(x^k; D_x)\big(u_\gamma(t, x)\big) + \tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x) u_\gamma(t, x),\ m = 1, 2,$$

т. е. операторы $\tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x)$ имеют меньшие порядки, чем операторы $L_m(x^k; D_x)$, $m = 1, 2$.

Тогда форму $\mathcal{M}u$ можно записать в виде $\mathcal{M}u = \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u + \mathcal{M}_3 u$, где

$$\mathcal{M}_1 u = \sum_{k=0}^{N} \Big[- \operatorname{Im} \int\limits_{R^{n+1}} [(aI + L_0(D_x))\,(D_t + \gamma)^2 + L_1(x^k; D_x)(D_t + \gamma) +$$

$$+L_2(x^k;D_x)](\varphi_k(x)u_\gamma(t,x))\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt\Big],$$

$$\mathcal{M}_2u=\sum_{k=0}^{N}\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}[\tilde L_1(x^k,\varphi_k(x);D_x)(D_t+\gamma)+\tilde L_2(x^k,\varphi_k(x);D_x)]u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$\mathcal{M}_3u=\sum_{k=0}^{N}-\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]u_\gamma(t,x)\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma}dxdt.$$

Тогда для $\mathcal{M}_1u$ справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При любой фиксированной точке x^k, $k=0,1,\dots,N$, форма $\mathcal{M}_1u$ оценивается снизу*

$$\mathcal{M}_1u\geqslant\gamma\rho(\delta)\int\limits_{R^{n+1}}(a+|\xi|^2)^2(\eta+\gamma+|\xi|)^2|\hat u_\gamma|^2d\eta d\xi,\tag{3.5}$$

где $\rho(\delta)>0$ — константа, не зависящая от выбора точки x^k и γ.

Доказательство. Применяя теорему Планшереля, имеем

$$\mathcal{M}_1u=\sum_{k=0}^{N}-\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}\left((aI+L_0(i\xi))\,(i\eta+\gamma)^2+L_1(x^k,i\xi)(i\eta+\gamma)+\right.$$

$$\left.+L_2(x^k,i\xi)\right)F[\varphi_ku_\gamma](\eta,\xi)\times\overline{\mathcal{L}'(i\eta+\gamma,i\xi)\hat u_\gamma(\eta,\xi)}d\eta d\xi.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}_1u=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}\gamma P(x^k,\eta,\xi,\gamma)F[\varphi_ku_\gamma](\eta,\xi)\overline{\hat u_\gamma(\eta,\xi)}d\eta d\xi,\tag{3.6}$$

где

$$P(x^k,\eta,\xi,\gamma)=2\Big[(\eta^2+\gamma^2)(a-L_0(\xi))^2-$$

$$-(a-L_0(\xi))L_1(\xi)\eta+(a-L_0(\xi))L_2(x^k,\xi)+\frac{1}{2}L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)\Big]=$$

$$=2(-a+L_0(\xi))^2\left[\eta^2+\gamma^2+\frac{L_1(\xi)\eta}{-a+L_0(\xi)}-\frac{L_2(x^k,\xi)}{-a+L_0(\xi)}+\frac{L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)}{2(-a+L_0(\xi))^2}\right].$$

Обозначим

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\eta^2+\gamma^2+\frac{L_1(\xi)\eta}{-a+L_0(\xi)}-\frac{L_2(x^k,\xi)}{-a+L_0(\xi)}+\frac{L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)}{2(-a+L_0(\xi))^2}.$$

Тогда $P(x^k,\eta,\xi,\gamma)=2(-a+L_0(\xi))^2Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$. Представим $Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ в виде

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+$$

$$+\frac{d(x^k,\xi)+4aL_2(x^k,\xi)-\big(L_1(x^k,\xi)-L_1(\xi)\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2,$$

где $d(x^k,\xi)=\big(L_1(x^k,\xi)\big)^2-4L_0(\xi)L_2(x^k,\xi)$.

Перепишем теперь $Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+\\ +\frac{L_0^2(\xi)|\eta_1(x^k,\xi)-\eta_2(x^k,\xi)|^2+4aL_2(x^k,\xi)}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2-\\ -\frac{\big(\sum\limits_{|\alpha|=3}\sum\limits_{j=1}^{k}\big(a_\alpha^1(x^j)-a_\alpha^1(x^{j-1})\big)\xi^\alpha\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2},\end{gathered}\tag{3.7}$$

где $\eta_1(x^k,\xi)$, $\eta_2(x^k,\xi)$ — корни уравнения (2.4), $|x^0|>r$.

Обозначим группу из первых трёх слагаемых в (3.7)

$$\begin{gathered}Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+\\ +\frac{L_0^2(\xi)|\eta_1(x^k,\xi)-\eta_2(x^k,\xi)|^2+4aL_2(x^k,\xi)}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Покажем, что $Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ оценивается снизу независимо от выбора точки x^k.

Учитывая определения операторов (1.2), функцию (3.8) можно записать в виде

$$Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\frac{1}{\sqrt{c}}Q_1(x^k,\eta',\xi',\gamma',a'),\ c>0,$$

где $\alpha'=c^{\frac12}a$, $\eta'=c^{\frac14}\eta$, $\xi'=c^{\frac14}\xi$, $\gamma'=c^{\frac14}\gamma$.

Введём обозначение (η',ξ',γ'), $c=(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2)^{-2}$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $Q_1(\eta',\xi',\gamma',\alpha')$ на компакте $(\eta')^2+(\gamma')^2+(\xi')^2=1$, $\alpha'\in[0,\alpha_0']$, и неравенств (2.6)–(2.8) получим

$$\frac{\rho_1(\delta)}{2}\leqslant Q_1(x^k,\eta',\xi',\gamma',\alpha')\leqslant 2\rho_2,$$

где $\rho_1(\delta)$, $\rho_2>0$ — константы, зависящие от коэффициентов операторов и δ. Из этой оценки вытекает, что существует $\gamma_1>0$, такое, что при всех $(\eta,\xi)\in R^{n+1}$, $\gamma>\gamma_1$, будет выполняться неравенство

$$\frac{\rho_1(\delta)}{2}(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2)\leqslant Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)\leqslant 2\rho_2(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).\tag{3.9}$$

Проведём теперь оценку последнего слагаемого в (3.7)

$$Q_2(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=-\frac{\big(\sum\limits_{|\alpha|=3}\sum\limits_{j=1}^{k}\big(a_\alpha^1(x^j)-a_\alpha^1(x^{j-1})\big)\xi^\alpha\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2}.$$

Учитывая гладкость коэффициентов и условие (2.3), будем теперь предполагать, что число $\sigma>0$ нами выбирается таким образом, чтобы

$$\sum_{|\alpha|=3}\big|a_\alpha^1(x)-a_\alpha^1(y)\big|<\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN},\ q\geqslant 1,\tag{3.10}$$

при $|x-y|<\sigma$. Дополнительное условие на $q\geqslant 1$ будет указано ниже.

Напомним, что $x^{j-1}\in B(\sigma,x^j)$, $j=1,2,\dots,N$. Тогда в силу сказанного выше имеем

$$|Q_2(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)|\leqslant\frac{\rho_1(\delta)}{4}|\xi|^2.$$

Отсюда и из (3.7), (3.9) получим

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)\geqslant\frac{\rho_1(\delta)}{4}(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).$$

Следовательно, в силу определения $P(x^k,\eta,\xi,\gamma)$ имеем

$$P(x^k,\eta,\xi,\gamma)\geqslant\frac{\rho_1(\delta)}{2}(a+a_0|\xi|^2)^2(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).$$

Поэтому в силу разбиения единицы (3.4) и равенства Парсеваля из (3.6) вытекает оценка (3.5). Лемма доказана. □

Используя неравенство Гёльдера, очевидно $\mathcal{M}_2u$ можно оценить сверху

$$|\mathcal{M}_2u|\leqslant c_1\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2, \tag{3.11}$$

где $c_1>0$ — константа, не зависящая от γ и $u(t,x)$.

Оценим теперь $\mathcal{M}_3u$. Выпишем сопряжённые операторы

$$\big(\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)\big)^*v(t,x)=2i(D_t-\gamma)(aI+L_0(D_x))v(t,x)+iL_1(D_x)v(t,x),$$

$$(L_1(x,x^k;D_x))^*v(t,x)=-\sum_{|\alpha|=3}D_x^\alpha(\varphi_k(x)(a_\alpha^1(x)-a_\alpha^1(x^k))v(t,x)),$$

$$(L_2(x,x^k;D_x))^*v(t,x)=\sum_{|\alpha|=4}D_x^\alpha(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))v(t,x)).$$

Для функций $u(t,x)\in C_0^\infty(R^{n+1})$ имеем

$$\mathcal{M}_3u=\sum_{k=0}^N\int\limits_{R^{n+1}}\frac{-1}{2i}(\mathcal{L}'^*(D_t+\gamma,D_x)[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]-$$

$$-[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]^*\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x))u_\gamma(t,x)\overline{u_\gamma(t,x)}dxdt.$$

Дифференциальный оператор внутри скобки обозначим $\mathcal{Z}(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$. Очевидно имеем $\mathcal{Z}(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)=\gamma Z(x,x^k;D_x)v(t,x)+z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)$, где

$$Z(x,x^k;D_x)v(t,x)=$$
$$=[(aI+L_0(D_x))\,L_2(x,x^k;D_x)+L_2^*(x,x^k;D_x)\,(aI+L_0(D_x))]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}[L_1(D_x)L_1(x,x^k;D_x)-L_1^*(x,x^k;D_x)L_1(D_x)]v(t,x),$$

$$z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)=-\big(D_t^2-\gamma^2I\big)[\big(aI+L_0(D_x)\big)L_1(x,x^k;D_x)-$$
$$-\big(L_1(x,x^k;D_x)\big)^*\big(aI+L_0(D_x)\big)]v(t,x)-$$
$$-D_t[\big(aI+L_0(D_x)\big)L_2(x,x^k;D_x)-\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*\big(aI+L_0(D_x)\big)]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}D_t[L_1(D_x)L_1(x,x^k;D_x)+\big(L_1(x,x^k;D_x)\big)^*L_1(D_x)]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}[L_1(D_x)L_2(x,x^k;D_x)-\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*L_1(D_x)]v(t,x).$$

По определению дифференциальных операторов из (1.2) и теореме о коммутаторе [15] легко видеть, что операторы $Z(x,x^k;D_x)$ и $z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$ имеют 6-й порядок. Тогда с учётом гладкости коэффициентов оператор $z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x) = -\big(D_t^2-\gamma^2 I\big)\sum_{|\beta|=4} b_\beta^0(x,x^k)D_x^\beta v(t,x) - \\ -D_t\sum_{|\beta|=5} b_\beta^1(x,x^k)D_x^\beta v(t,x) - \sum_{|\beta|=6} b_\beta^2(x,x^k)D_x^\beta v(t,x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где гладкие функции $b_\beta^j(x,x^k)$, $j=0,1,2$, постоянные при $|x|\geqslant r+1$.

Оператор $L_2(x,x^k;D_x)$ и его сопряжённый оператор $\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*$ представимы в виде

$$L_2(x,x^k;D_x)v(t,x) = -\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x) -$$

$$-\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} (\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x)),$$

$$\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*v(t,x) = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)v(t,x)) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)v(t,x)) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x_j}v(t,x)).$$

Из сказанного выше и определения $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots,N$, форму $\mathcal{M}_3u$ можно переписать в виде $\mathcal{M}_3u = A_1u + A_2u + A_3u + A_4u$, где

$$A_1u = -\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \varphi_k(x) \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} (a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt -$$

$$-\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt -$$

$$-\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} \varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\overline{\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_2u=-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt-$$

$$-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt-$$

$$-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_3u=\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}L_1(x,x^k;D_x)u_\gamma(t,x)\overline{L_1(D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_4u=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)u_\gamma(t,x)\overline{u_\gamma(t,x)}dxdt.$$

Теперь, учитывая финитность функций $\varphi_k(x)$, оценим модуль каждого слагаемого:

$$|A_1u|\leqslant\gamma\int\limits_R\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B(\sigma,x^k)}\sum_{j=1}^{n}\varphi_k(x)\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\times$$

$$\times|\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\int\limits_R\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B(\sigma,x^k)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x_j}\varphi_k(x)||a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\times$$

$$\times|\overline{\gamma\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|\varphi_k(x)||D_{x_j}a_\alpha^2(x)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\overline{\gamma|\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)|}dxdt.$$

Учитывая условия (3.10), получим

$$|A_1u|\leqslant\gamma\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)||\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\frac{c_2a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)||\overline{\gamma\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+c_3\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\overline{\gamma|\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)|}dxdt,$$

где $c_2=\max\limits_{k,\,x\in R^n}|\nabla\varphi_k(x)|$, $c_3=\max\limits_{x\in R^n}|D_{x_j}a_\alpha^2(x)|$.

Поэтому, используя равенство Парсеваля и неравенство Гёльдера, получим

$$|A_1u|\leqslant\gamma\left(\frac{c_4a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}+\frac{c_2a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{\gamma qN}+\frac{c_3}{\gamma}\right)\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Аналогично имеем

$$|A_2u|\leqslant\gamma\left(\frac{c_5a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}+\frac{c_6a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{\gamma qN}+\frac{c_7}{\gamma}\right)\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2,$$

$$|A_3u|\leqslant\gamma\frac{c_8a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2.$$

где константы $c_j>0$, $j=3,4,5,6,7,8$, не зависят от γ.

Оценим теперь A_4u. Используя представление (3.12) и преобразование Фурье по переменной t, имеем

$$|A_4u|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}\Bigg[\left(\eta^2+\gamma^2\right)\sum_{|\beta|=4}|b_\beta^0(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+$$

$$+|\eta|\sum_{|\beta|=5}|b_\beta^1(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+\sum_{|\beta|=6}|b_\beta^2(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|\Bigg]|\overline{\tilde{u}_\gamma(\eta,x)}|d\eta dx,$$

где $\tilde{u}_\gamma(\eta,x)$ — преобразование Фурье $u_\gamma(t,x)$ по переменной t.

Далее получим

$$|A_4u|\leqslant c_9N\int\limits_{R^{n+1}}\Bigg[\left(\eta^2+\gamma^2\right)\sum_{|\beta|=4}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+$$

$$+|\eta|\sum_{|\beta|=5}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+\sum_{|\beta|=6}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|\Bigg]|\overline{\tilde{u}_\gamma(\eta,x)}|d\eta dx,$$

где $c_9>0$ — константа, не зависящая от γ. Тогда, используя равенство Парсеваля, имеем

$$|A_4u|\leqslant c_9N\int\limits_{R^{n+1}}\left[\left(\eta^2+\gamma^2\right)|\xi|^4+|\eta||\xi|^5+|\xi|^6\right]|\hat{u}_\gamma(\eta,\xi)|^2d\eta d\xi.$$

Отсюда $|A_4u|\leqslant c_{10}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2$, где $c_{10}>0$ — константа, не зависящая от γ. Из проведённых оценок вытекает, что

$$\begin{gathered}|\mathcal{M}_3u|\leqslant|A_1u|+|A_2u|+|A_3u|+|A_4u|\leqslant\\ \leqslant\gamma\left[\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\left(c_4+c_5+c_8\right)+\frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\right]\times\\ \times\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2,\end{gathered}\tag{3.13}$$

где $c_{11}=\dfrac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\left(c_2+c_6\right)$.

В силу неравенств (3.5), (3.11) и (3.13) для любых $u(t,x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ получим оценку

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\biggl(\rho(\delta) - \frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\bigl(c_4+c_5+c_8\bigr) - \frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\biggr)\times$$

$$\times\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Выбираем теперь покрытие $\bigl\{B(x^k,\sigma)\bigr\}$, $k=1,2,\ldots,N$, таким образом, чтобы для числа $q \geqslant 1$ из (3.10) выполнялась оценка

$$\frac{\rho(\delta)}{4} \geqslant \frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\bigl(c_4+c_5+c_8\bigr).$$

Тогда будем иметь

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\biggl(\frac{3\rho(\delta)}{4} - \frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\biggr)\gamma\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Определим число $\gamma_2 = 4\dfrac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\rho(\delta)}$. Тогда при $\gamma > \max\{\gamma_1,\gamma_2\}$ имеет место оценка

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\frac{\rho(\delta)}{2}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Отсюда в силу определения $\mathcal{M}u$ по неравенству Гёльдера получаем энергетическую оценку (2.11). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из энергетической оценки (2.11) очевидно вытекает теорема 3 о единственности решения задачи Коши для равномерно псевдогиперболического уравнения (1.1).

Список литературы

1. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
2. **Соболев С. Л.** Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы / ред. Г. В. Демиденко, В. Л. Васкевич. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003.
3. **Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln : VSP, 2003.
4. **Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007.
5. **Гальперн С. А.** Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными (автореферат докторской диссертации) // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2 (110). С. 239–249.
6. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.; Л. : Стройиздат, 1940.
7. **Герасимов С. И., Ерофеев В. И.** Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров : ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
8. **Bishop R. E. D.** Longitudional waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. Vol. 3, no. 4. P. 280–293.
9. **Rao J. S.** Advanced Theory of Vibration. New York : John Wiley and Sons, 1992.
10. **Демиденко Г. В.** Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1466–1475.

11. **Fedotov I., Shatalov M., Marais J.** Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations // Acta Mechanica. 2016. Vol. 227, no. 11. P. 3315–3324.
12. **Демиденко Г. В.** Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
13. **Лере Ж.** Гиперболические дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1984.
14. **Петровский И. Г.** Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М. : Наука, 1986.
15. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частным производными. Т. III. М. : Мир, 1987.

Поступила в редакцию 12.09.2025.
После переработки 06.10.2025.

Сведения об авторах

Демиденко Геннадий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: demidenk@math.nsc.ru.

Нурмахматов Вахоббиддин Саидаслон угли, аспирант, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: v.s.nurmuhammad@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 649–663.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-649-663

ENERGY ESTIMATES FOR AN UNIFORMLY STRICTLY PSEUDOHYPERBOLIC OPERATOR

G.V. Demidenko[1,2,a], **V.S. Nurmakhmatov**[2,b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[a] *demidenk@math.nsc.ru,* [b] *v.s.nurmuhammad@gmail.com*

A class of strictly pseudohyperbolic operators of the fourth order with variable coefficients is considered. This class includes, in particular, the Vlasov, Gal'pern, and Rayleigh–Bishop operators. Under certain conditions for the coefficients, energy estimates are established.

Keywords: *equation not solvable with respect to the highest-order derivative, pseudohyperbolic operator, energy estimate, weighted Sobolev space.*

References

1. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York, Marcel Dekker, 2003.
2. **Sobolev S.L.** *Selected Works*. Vol. I. *Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas*. Eds.: G.V. Demidenko , V.L. Vaskevich. New York, Springer, 2006.
3. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003.
4. **Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.** *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear equations of Sobolev type]. Moscow, Fizmatlit, 2007. (In Russ.).
5. **Gal'pern S.A.** Zadacha Koshi dlya obshchikh sistem lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi (avtoreferat doktorskoy dissertatsii) [The Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations (summary of a doctor's thesis)]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Achievements of mathematical sciences], 1963, vol. 18, no. 2 (110), pp. 239–249. (In Russ.).
6. **Vlasov V.Z.** *Thin-Walled Elastic Beams*. Washington, National Science Foundation, 1961.
7. **Gerasimov S.I., Erofeev V.I.** Zadachi volnovoy dinamiki elementov konstruktsiy [Problems of wave dynamics for structural elements]. Sarov, Russian Federal Nuclear Center — All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, 2014. (In Russ.).
8. **Bishop R.E.D.** Longitudional waves in beams. *Aeronautical Quarterly*, 1952, vol. 3, no. 4, pp. 280–293.
9. **Rao J.S.** *Advanced Theory of Vibration*. New York, John Wiley and Sons, 1992.
10. **Demidenko G.V.** Energy estimates for one class of pseudohyperbolic operators with variable coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 8, pp. 1755–1764.
11. **Fedotov I., Shatalov M., Marais J.** Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations. *Acta Mechanica*, 2016, vol. 227, no. 11, pp. 3315–3324.

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370/.

12. **Demidenko G.V.** Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1028–1041.
13. **Leray J.** *Hyperbolic Differential Equations*. Princeton, Institute for Advanced Study, 1953.
14. **Petrovskiy I.G.** *Izbrannye trudy. Sistemy uravneniy s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaya geometriya* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. Moscow, Nauka, 1986. (In Russ.).
15. **Hörmander L.** *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Vol. III. Berlin etc., Springer-Verlag, 1985.

Article received 12.09.2025.
Corrections received 06.10.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 664–676.

УДК 517.929.4 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-664-676

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. К. Искаков

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

Рассматривается класс систем нелинейных неавтономных интегродифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Методом функционалов Ляпунова — Красовского получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, установлены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценки на множество притяжения.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с распределённым запаздыванием, уравнение нейтрального типа, устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.*

Введение

Рассматривается класс нелинейных систем интегродифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)+D(t)y(t-\tau)\right)=A(t)y(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}B(t,t-s)y(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds,\quad t>0, \tag{1}$$

где $\tau>0$ — параметр запаздывания, $D(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, параметр $T>0$, $A(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первому аргументу, т. е.

$$D(t)\equiv D(t+T),\quad A(t)\equiv A(t+T),\quad B(t,s)\equiv B(t+T,s),$$

при этом

$$\int\limits_{0}^{\infty}\|B(t,s)\|ds<\infty,\quad t\in[0,T],$$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, https://rscf.ru/project/24-21-00367/.

нелинейное слагаемое $F(t,s,u_1,u_2)$ — непрерывная вектор-функция, липшицева по последним двум переменным, удовлетворяющая следующей оценке:

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,u,w(s))ds \right\| \leqslant q\|u\|^{1+\omega}, \quad t>0, \tag{2}$$

где $q \geqslant 0$, $\omega > 0$, $w(s)$ — произвольная ограниченная и непрерывная функция. Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.

Целью работы является получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), нахождение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценок на множество притяжения нулевого решения.

Теория дифференциальных уравнений с запаздыванием начала интенсивно развиваться во второй половине XX века. Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Одной из важных задач является исследование устойчивости решений. Много работ посвящено данному направлению (см., например, [1–11]). Некоторые работы посвящены изучению уравнений с распределённым запаздыванием (см., например, [12–15]). Одним из наиболее распространённых методов исследования устойчивости решений является метод функционалов Ляпунова — Красовского. Данный метод не требует наличия спектральной информации, более того, он позволяет при правильно подобранном функционале получать не только условия устойчивости, но и оценки на решения, а в нелинейном случае — оценки на множество притяжения. Отметим, что с помощью таких функционалов были исследованы уравнения с запаздывающим аргументом в работах [16–24]. В работах [16–19] рассматривались уравнения с сосредоточенным запаздыванием, в [20–24] — с распределённым запаздыванием, в [23] — со смешанным запаздыванием. При этом в работах [18; 19; 22; 23] исследовались нелинейные уравнения. В работе [24] была рассмотрена система (1) в линейном случае, т. е. $F(t,s,u_1,u_2) \equiv 0$. Результаты в этой работе были получены с помощью функционала Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),(y(t)+D(t)y(t-\tau))\rangle +$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle ds + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s,\eta)y(s),y(s)\rangle ds d\eta, \tag{3}$$

где матрицы размера $n\times n$ удовлетворяют условиям

$$H(t)=H^*(t)>0, \quad M(t,s)=M^*(t,s)>0, \quad K(t,s)=K^*(t,s)>0.$$

Обозначение $H(t)>0$ означает положительную определённость матрицы. В настоящей работе при получении результатов будет использоваться функционал (3).

Основные результаты

Рассмотрим для системы уравнений (1) начальные данные

$$y(t)=\varphi(t), \quad t<0, \quad y(+0)=\varphi(0), \tag{4}$$

где $\varphi(t) \in C((-\infty, 0]) \cap C^1([-\tau, 0])$ является заданной ограниченной функцией.

Как и в работе [24], введём обозначения:

$$Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - M(0,t) - \int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds,$$

$$Q_{12}(t) = \left(H(t)A(t) + M(0,t) + \int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds\right) D(t), \tag{5}$$

$$Q_{22}(t) = M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t) - D^*(t)\int\limits_0^\infty K(0,s)\,dsD(t),$$

$$Q_{13}(t,s) = H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s,s),$$

$$P(t) = Q_{11}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^\infty Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)\,ds. \tag{6}$$

Сформулируем предположения, касающиеся матриц $H(t)$, $K(t,s)$, $M(t,s)$.

Предположение 1. *Пусть матрица $H(t) = H^*(t) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, т. е.*

$$H(t) \equiv H(t+T).$$

Предположение 2. *Пусть матрица $K(t,s) = K^*(t,s) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми элементами по первой переменной и удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\eta \|K(s,\eta)\|\,dsd\eta < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\eta \left\|\frac{\partial}{\partial s}K(s,\eta)\right\|\,dsd\eta < \infty,$$

$$\int\limits_0^\infty \|K(0,s)\|\,ds < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \|K(s,s)\|\,ds < \infty,$$

при этом существует такое число $k > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + kK(t,s) \leqslant 0, \quad t > 0,\ s > 0. \tag{7}$$

Предположение 3. *Пусть матрица $M(t,s) = M^*(t,s) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми элементами по первой переменной и T-периодическими по второй переменной, т. е. $M(t,s) \equiv M(t,s+T)$, при этом существует такое число $m > 0$, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}M(t,s) + mM(t,s) \leqslant 0, \quad t \in (0,\tau),\ s > -\tau. \tag{8}$$

Далее приведём две теоремы: в первой теореме будут представлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, во второй теореме будет указана оценка на решение начальной задачи и условие на начальные данные, при которых данная оценка будет справедлива. Справедливость первой теоремы вытекает из второй теоремы.

Теорема 1. *Пусть существуют матрицы* $H(t) = H^*(t) > 0$, $M(t,s) = M^*(t,s) > 0$, $K(t,s) = K^*(t,s) > 0$, *такие, что выполнены следующие условия:*

1) *выполнены предположения 1–3*;
2) *матрица* $Q_{22}(t)$ *из* (5) *является положительно определённой при* $t \in [0,T]$;
3) *матрица* $P(t)$ *из* (6) *определена при* $t \in [0,T]$;
4) *справедливо неравенство*

$$\delta = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0, \tag{9}$$

где

$$\gamma(t) = \min\{p_H(t), m, k\}, \tag{10}$$

$p_H(t)$ — *минимальное собственное значение матрицы* $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t)$, k, m — *положительные числа, удовлетворяющие оценкам* (7), (8). *Тогда нулевое решение системы* (1) *экспоненциально устойчиво.*

В [21] и [24] отмечалось, что из условий положительной определённости матриц $M(t,s)$ и $Q_{22}(t)$ из (5) при $t \in [0,T]$ следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы функционально-разностных уравнений вида

$$z(t) = D(t)z(t-\tau),$$

где матрица $D(t)$ из системы (1). В [21] было установлено, что экспоненциальная устойчивость нулевого решения данной системы эквивалентна существованию положительно определённого T-периодического решения матричного уравнения

$$L(t-\tau) - D^*(t)L(t)D(t) = C(t), \quad C(t) = C^*(t) > 0.$$

В [24] было показано, что матрица $M(0,t)$ является решением подобного матричного уравнения:

$$M(0,t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t) = C(t) > 0. \tag{11}$$

Отметим, что в работе [21] было доказано неравенство

$$\|G_i(t)\| \leqslant \beta\alpha^{\frac{i-1}{2}}, \tag{12}$$

где

$$G_0(t) = E, \quad G_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} D(t-j\tau) = D(t)\dots D(t-(i-1)\tau), \tag{13}$$

$$\alpha = \max_{\xi\in[0,T]}\left(1 - \frac{1}{\|M^{\frac{1}{2}}(0,\xi-\tau)C^{-1}(\xi)M^{\frac{1}{2}}(0,\xi-\tau)\|}\right) < 1, \tag{14}$$

$$\beta = \sqrt{\max_{\xi\in[0,T]}\|M(0,\xi)\| \max_{\xi\in[0,T]}\|M^{-1}(0,\xi)\|}, \tag{15}$$

$C(t)$ определяется в формуле (11). Отметим, что из данной оценки можно получить неравенство

$$e^{-\delta\tau} \geqslant e^{-m\tau} > \alpha, \tag{16}$$

где δ, α определены в (9) и (14) соответственно.

Введём обозначения:

$$c = \max_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int_0^T \frac{\gamma(s)}{2}\, ds - \int_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2}\, ds. \right) \right\}, \tag{17}$$

$$z_1(t) = Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)) + y(t-\tau), \tag{18}$$

$$r_1 = \left(2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \|Q_{22}^{-1}(\xi)\|\|H(\xi)\|\|D(\xi)\|^{1+\omega} \right)^{-\frac{1}{\omega}}, \tag{19}$$

$$r_2 = 2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \|H(\xi)\|\|H^{-1}(\xi)\|, \tag{20}$$

$$r_3 = 2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \left(\|H(\xi)\|\|H^{-1}(\xi)\|\|D(\xi)\|^{1+\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(\xi)Q_{12}^*(\xi)\| + \frac{1}{4} \right) \right). \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для решения начальной задачи* (1), (4) *с начальными данными из множества*

$$\mathbf{E} = \{\varphi \in C((-\infty,0]) \cap C^1([-\tau,0]) : \quad \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| < q^{-\frac{1}{\omega}} r_1,$$

$$qr_2 v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi) + qr_3 \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|^\omega < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{\beta c v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| < q^{-\frac{1}{\omega}} r_1,$$

$$\frac{qr_2 c^\omega v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi)}{\max\limits_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{\omega}{2}}} + qr_3 \left(\frac{\beta c v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^\omega < \frac{\delta}{2} \Big\},$$

где r_1, r_2, r_3 из (19)–(21), *δ из* (9), *α, β из* (14), (15), *c из* (17), *справедлива оценка при $t > 0$*

$$\|y(t)\| \leqslant \frac{\beta c e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta\alpha^{\frac{t-\tau}{2\tau}} \left\| \varphi\left(t-\tau-\left\lfloor\frac{t}{\tau}\right\rfloor\tau\right) \right\|, \tag{22}$$

где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть числа s,

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau))\rangle +$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds + \int_0^\infty \int_{-\eta}^0 \langle K(-s,\eta)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds d\eta.$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (1), (4), начальные данные которой из множества $\mathbf{E}$. Будем предполагать, что данное решение определено при $t \in (-\infty, t_0)$, где $t_0 > 0$. Продифференцируем функционал Ляпунова — Красовского (3) вдоль решения $y(t)$:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\langle Q_{11}(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), y(t) + D(t)y(t-\tau)\rangle -$$

$$-\langle Q_{12}(t)y(t-\tau),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle-\langle y(t)+D(t)y(t-\tau),Q_{12}(t)y(t-\tau)\rangle-$$

$$-\langle Q_{22}(t)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle y(t)+D(t)y(t-\tau),Q_{13}(t,t-s)y(s)\rangle ds-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle Q_{13}(t,t-s)y(s),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle ds-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle Q_{33}(t-s)y(s),y(s)\rangle ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle,$$

где $Q_{11}(t)$, $Q_{12}(t)$, $Q_{22}(t)$, $Q_{13}(t,s)$, $Q_{33}(s)$ определены в (5). Учитывая обозначение (6), получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=-\langle P(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle-$$

$$-\langle Q_{22}(t)z_1(t),z_1(t)\rangle-\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle Q_{33}(t-s)z_2(t,s),z_2(t,s)\rangle\,ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle\frac{d}{dt}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\rangle dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle\frac{d}{dt}M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle ds+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle,\qquad(23)$$

где $z_1(t)$ определено в (18),

$$z_2(t,s)=Q_{33}^{-1}(t-s)Q_{13}^{*}(t,t-s)(y(t)+D(t)y(t-\tau))+y(s).$$

Оценим последнее выражение, используя (2):

$$I=2\mathrm{Re}\left\langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle\leqslant$$

$$\leqslant 2q\|H(t)\|\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|\|y(t)\|^{1+\omega}.$$

Следовательно,

$$I\leqslant 2q\|H(t)\|\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|\left(\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|+\|D(t)\|\|y(t-\tau)\|\right)^{1+\omega}.$$

Используя неравенство

$$(a+b)^{1+\omega}\leqslant 2^{\omega}a^{1+\omega}+2^{\omega}b^{1+\omega},\quad a,b\geqslant 0,\quad \omega>0,$$

получим

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \left(\|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^{1+\omega} + \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{1+\omega} \right) \times$$

$$\times \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|.$$

Из определения $z_1(t)$ в (18) имеем

$$\|y(t-\tau)\| \leqslant \|z_1(t)\| + \|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|.$$

Следовательно,

$$\|y(t-\tau)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\|^2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^{2+\omega} + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

В силу определения $v(t,y)$ из (3) получаем

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

Учитывая данную оценку и положительную определённость матрицы $Q_{33}(s)$, из (23) получим

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leqslant -\langle P(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), y(t) + D(t)y(t-\tau) \rangle - \langle Q_{22}(t)z_1(t), z_1(t) \rangle +$$

$$+ \int_0^{\infty} \int_{t-\eta}^{t} \langle \frac{d}{dt} K(t-s,\eta)y(s), y(s) \rangle ds d\eta + \int_{t-\tau}^{t} \langle \frac{d}{dt} M(t-s,s)y(s), y(s) \rangle ds +$$

$$+ 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

В силу обозначений (3) и (10) имеем

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y) - \|z_1(t)\|^2 \left(\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \right) +$$

$$+ 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) \right). \qquad (24)$$

Так как начальные данные из множества $\mathbf{E}$, то в силу двух первых неравенств в определении множества $\mathbf{E}$ существует $t' \in (0, t_0)$, такое, что при $t \in (0, t')$

$$\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} > 0, \tag{25}$$

$$2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{\frac{\omega}{2}}(t, y) +$$

$$+2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(t) Q_{12}^{*}(t)\| + \frac{1}{4} \right) < \frac{\delta}{2}. \tag{26}$$

В силу данных неравенств из (24) вытекает следующая оценка:

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leqslant -(\gamma(t) - \frac{\delta}{2}) v(t, y).$$

Следовательно, используя неравенство Гронуолла, получим

$$v(t, y) \leqslant e^{\frac{\delta t}{2} - \int\limits_0^t \gamma(s) ds} v(0, \varphi).$$

Учитывая обозначение (17), имеем

$$v(t, y) \leqslant \frac{c^2}{\max\limits_{\xi \in [0, T]} \|H^{-1}(\xi)\|} e^{-\frac{\delta t}{2}} v(0, \varphi). \tag{27}$$

В силу (3) получим

$$\|y(t) + D(t) y(t-\tau)\| \leqslant c e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi), \quad t > 0. \tag{28}$$

Пусть $t \in ((i-1)\tau, i\tau]$, $i \in \mathbb{N}$, тогда, используя неравенство треугольника, получим

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(t) + D(t) y(t-\tau)\| + \|D(t) y(t-\tau)\|.$$

Повторяя данный приём несколько раз, имеем

$$\|y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \|G_j(t)\| \|y(t - j\tau) + D(t - j\tau) y(t - (j+1)\tau)\| + \|G_i(t)\| \|\varphi(t - i\tau)\|,$$

где $G_i(t)$ определён в (13). Воспользуемся неравенствами (12) и (28):

$$\|y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \beta \alpha^{\frac{j-1}{2}} c e^{-\frac{\delta(t - j\tau)}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi) + \beta \alpha^{\frac{i-1}{2}} \|\varphi(t - i\tau)\| =$$

$$= \beta c \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi) \sum_{j=0}^{i-1} \left(\sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta \tau}{4}} \right)^j + \beta \alpha^{\frac{i-1}{2}} \|\varphi(t - i\tau)\|.$$

В силу (16) и формулы суммы убывающей геометрической прогрессии получим справедливость оценки (22) при $t \in (0, t')$. Покажем от противного, что оценка (22) выполняется при всех $t \in (0, t_0)$. Пусть $t^* > t'$ является первым значением, при котором нарушается неравенство (25) или (26).

Рассмотрим случай нарушения неравенства (25) в точке t^*. Предположим, что неравенство (25) выполнено при всех $t \in (0, t^*)$, при этом

$$\|Q_{22}^{-1}(t^*)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \|y(t^* - \tau)\|^{\omega} \leqslant 0. \tag{29}$$

Тогда, повторив рассуждения после (25), в силу непрерывности получим, что оценка (22) справедлива при $t \in (0, t^*]$. Использовав оценки (29) и (22), имеем

$$\|Q_{22}^{-1}(t^*)\|^{-1} \leqslant 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \left(\frac{\beta c e^{-\frac{\delta t^*}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta \alpha^{\frac{t^*-\tau}{2\tau}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^{\omega}.$$

Получаем противоречие с третьим неравенством множества **E**.

Рассмотрим случай нарушения неравенства (26) в точке t^*. Предположим, что неравенство (26) выполнено при всех $t \in (0, t^*)$, при этом

$$2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|H^{-1}(t^*)\| v^{\frac{\omega}{2}}(t^*, y) +$$

$$+ 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|H^{-1}(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \|y(t^*-\tau)\|^{\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(t^*) Q_{12}^*(t^*)\| + \frac{1}{4} \right) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, в силу обозначений (20), (21) имеем

$$q r_2 v^{\frac{\omega}{2}}(t^*, y) + q r_3 \|y(t^*-\tau)\|^{\omega} \geqslant \frac{\delta}{2}. \tag{30}$$

Повторив рассуждения после (25), в силу непрерывности получим, что оценки (22) и (27) справедливы при $t \in (0, t^*]$. Использовав оценки (30), (22) и (27), имеем

$$\frac{q r_2 c^{\omega} e^{-\frac{\omega\delta t^*}{4}} v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi)}{\max\limits_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{1}{2}}} + q r_3 \left(\frac{\beta c e^{-\frac{\delta t^*}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta \alpha^{\frac{t^*-\tau}{2\tau}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^{\omega} \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Противоречие с четвёртым неравенством множества **E**. Тем самым было установлено, что оценка (22) справедлива на всей положительной области определения непродолжаемого решения $y(t)$ начальной задачи (1), (4), т. е. при $t \in (0, t_0)$.

Покажем, что решение $y(t)$ определено при всех $t > 0$. Тогда оценка (22) справедлива при $t > 0$. В силу справедливости неравенства (22) при $t \in (0, t_0)$ по непрерывности можно определить значение $y(t)$ в точке t_0. Можно рассмотреть начальную задачу вида (1), (4):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(z(t) + D(t)z(t-\tau)) = A(t)z(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} B(t, t-s)z(s)ds + \\ + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F(t, s, z(t), z(s))\, ds, \quad t > t_0, \\ z(s) = y(s),\ s \in (-\infty, t_0], \\ z(t_0 + 0) = y(t_0). \end{cases}$$

Данная начальная задача однозначно разрешима на интервале $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, следовательно, решение начальной задачи (1), (4) можно продолжить. Противоречие. Значит, решение начальной задачи (1), (4) определено при всех $t > 0$. Тогда оценка (22) справедлива при всех $t > 0$.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Отметим, что множество **E** является множеством притяжения нулевого решения системы (1).

Замечание 2. Выражение $1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}$, которое присутствует в знаменателе в определении множества **E** и оценке (22), положительно в силу неравенства (16).

Заключение

Исследована экспоненциальная устойчивость нулевого решения класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения данной системы в терминах матричных и интегральных неравенств, установлены оценки норм решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, установлена оценка на множество притяжения нулевого решения. Все параметры в оценках указаны в явном виде.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко, д. ф.-м. н. И. И. Матвеевой и к. ф.-м. н. М. А. Скворцовой за внимание к данной работе и ценные советы.

Список литературы

1. **Мышкис А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.; Л. : 1951.
2. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959.
3. **Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.
5. **Кореневский Д. Г.** Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев : Наукова думка, 1989.
6. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1991.
7. **Долгий Ю. Ф.** Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1996.
8. **Kolmanovskiĭ V. B., Myshkis A. D.** Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. **Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.** Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering. Boston : Birkhauser, 2003.
10. **Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. New York : Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M. I.** Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris : Atlantis Press, 2014.
12. **Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.** Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 55–63.
13. **Чудинов К. М.** Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 52–61.
14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, no. 302. P. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. Vol. 34. P. 747–773.
16. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

17. **Demidenko G. V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. Vol. 7, no. 3. P. 119–130.
18. **Матвеева И. И.** Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
19. **Yskak T. [Iskakov T. K.]** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25, no. 1–2. P. 97–108.
20. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.** Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
21. **Ыскак Т. [Искаков Т. К.]** Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределённым запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.
22. **Матвеева И. И.** Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1689–1697.
23. **Ыскак Т. [Искаков Т. К.]** Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 442–452.
24. **Искаков Т. К.** Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, № 4. С. 573–584.

Поступила в редакцию 01.07.2025.
После переработки 16.09.2025.

Сведения об авторе

Искаков Тимур Кайратович, старший научный сотрудник, доцент, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: istima92@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 664–676.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-664-676

ESTIMATES OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE WITH INFINITE DISTRIBUTED DELAY

T.K. Iskakov

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
istima92@mail.ru

A class of systems of nonlinear differential equations of neutral type with infinite distributed delay and periodic coefficients in the linear part is considered. Using the Lyapunov–Krasovskii functional, sufficient conditions for exponential stability of the zero solution are obtained, estimates of solutions characterizing exponential decrease at infinity are established, estimates of the attraction set of the zero solution are established.

Keywords: *differential equations with distributed delay, neutral type equation, periodic coefficients, stability, Lyapunov–Krasovskii functional.*

References

1. **Myshkis A.D.** *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow, *Leningrad, Gostekhizdat Publ.*, 1951. (In Russ.).
2. **Krasovskii N.N.** *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford, Stanford University Press, 1963.
3. **El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments.* New York, Academic Press, 1973.
4. **Hale J.** *Theory of Functional Differential Equations.* New York, Springer, 1977.
5. **Korenevskiĭ D.G.** *Ustoychivost' dinamicheskikh sistem pri sluchaynykh vozmushcheniyakh parametrov. Algebraicheskiye kriterii* [Stability of dynamical systems under random perturbations of parameters. Algebraic criteria]. Kiev, *Naukova Dumka*, 1989. (In Russ.).
6. **Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.** *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations.* Atlanta, World Federation Publ., 1995.
7. **Dolgiĭ Yu.F.** *Ustoychivost' periodicheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Stability of periodic differential-difference equations] Yekaterinburg, Ural State University, 1996. (In Russ.).
8. **Kolmanovskiĭ V.B., Myshkis A.D.** *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations.* Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. **Gu K., Kharitonov V.L., Chen J.** *Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering.* Boston, Birkhauser, 2003.
10. **Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Epplications.* New York, Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M.I.** *Stability of Neutral Functional Differential Equations.* Paris, Atlantis Press, 2014.

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00367), https://rscf.ru/project/24-21-00367/.

12. **Sabatulina T.L., Malygina V.V.** Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 52–60.
13. **Chudinov K.M.** Functional differential inequalities and estimation of the Cauchy function of an equation with aftereffect. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 44–51.
14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, no. 302, pp. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2022, vol. 34, pp. 747–773.
16. **Demidenko G.V., Matveeva I.I.** Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 824–836.
17. **Demidenko G.V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 119–130.
18. **Matveeva I.I.** Estimates for solutions to one class of nonlinear delay differential equations. *Journal of Applied Industrial Mathematics*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 557–566.
19. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Functional Differential Equations*, 2018, vol. 25, no. 1–2, pp. 97–108.
20. **Demidenko G.V., Matveeva I.I., Skvortsova M.A.** Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 828–841.
21. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Estimates for solutions of one class of systems of equations of neutral type with distributed delay. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 416–427. (In Russ.).
22. **Matveeva I.I.** Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 1689–1697.
23. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with infinite distributed delay. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, no. 4, pp. 442–452.
24. **Iskakov T.K.** Stability of solutions to systems of linear differential equations of neutral type with infinite distributed delay. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2024, vol. 9, no. 4, pp. 573–584.

Article received 01.07.2025.
Corrections received 16.09.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 677–687.

УДК 517.53 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-677-687

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РОСТА

М. В. Кабанко

Курский государственный университет, Курск, Россия
kabankom@gmail.com

Понятие уточнённого порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. В статье приводится общая трактовка этого понятия как уточнённой функции роста относительно модельной функции роста. Классический уточнённый порядок, уточнённый порядок в смысле Валирона, является частным случаем рассматриваемого понятия. Основной результат данной работы — нижняя оценка расстояния между точками, в которых достигается максимум модуля целой функции, и множеством нулей этой функции, полученная с помощью понятия уточнённого порядка относительно модельной функции.

Ключевые слова: *модельная функция, функция роста, уточнённый порядок, выпуклая функция, целая функция.*

Введение

В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой (субгармонической) функции и распределением нулей целой (риссовской меры субгармонической) функции. В данной работе исследуется связь расстояния между множеством нулей целой функции и точками, в которых достигается максимум модуля. Первые результаты в этом направлении были получены А. Макентайром в работе [1]. Дальнейшее развитие этих идей представлено в работах [2–6], в которых И. В. Островский и А. Юрейн получили более точные оценки для исследуемых расстояний. Также можно отметить в этом направлении работы С. И. Федиика и П. В. Филевича (см., например, [7]).

В настоящей работе это расстояние оценивается на основе уточнённого порядка относительно модельной функции, который был введён Б. Н. Хабибуллиным в работе [8] и в дальнейшем использовался авторами работ [9; 10] для уточнения классических результатов и приложений в теории роста целых и субгармонических функций.

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $K, M, \ldots, \varepsilon, \delta, \ldots$ мы будем обозначать положительные константы. Через $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ обозначаем множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел и $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ — положительная полуось. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, в частности, $C(r) = C(0, r)$. Через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим замкнутый круг, в частности, $B(r) = B(0, r)$. Также стандартно обозначим $S(a, r) = B(a, r) \setminus C(a, r)$ — окружность радиуса r с центром в точке a.

Равенства (неравенства), которые выполняются для всех достаточно больших значений переменной $r > 0$, будем называть традиционно асимптотическими равенствами (неравенствами).

Определение 1. Функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+$, строго положительная и выпуклая относительно логарифма, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$, называется *модельной функцией роста.*

Будем считать, что $M(0) = 0$ для модельной функции и $f(0) = 1$ для целых функций, поскольку нас будет интересовать поведение этих функций при достаточно больших $r > 0$. Это ограничение не уменьшает общности наших дальнейших рассуждений и носит технический характер, упрощая в некоторых случаях доказательства.

Известно (см., например, [11]), что для любого $r > 0$ существуют точки на окружности $S(0, r)$, в которых максимум модуля $\mathcal{M}(r, f)$ достигается. Обозначим такие точки $\{w(r)\}$ и будем называть их точками максимума модуля функции. Существование таких точек эквивалентно тому, что $|f(w)| = \mathcal{M}(|w(r)|, f)$. В дальнейшем будем отождествлять w и $w(r)$.

Определение 2. Абсолютно непрерывная функция ρ_M называется *уточнённым порядком* относительно модельной функции роста $M(r)$, если существуют пределы

$$\lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \varrho \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь под $\rho'_M(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Далее, поскольку модельная функция роста M фиксированная, индекс M в обозначении уточнённого порядка мы будем опускать.

Функцию $M^{\rho(r)}(r)$ мы будем обозначать через $V(r)$. Всюду далее будем считать, что $0 < \varrho < \infty$.

Определение 3. Для любой целой функции $f(z)$ конечного порядка ϱ величина

$$\sigma = \sigma_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r, f)}{V(r)}$$

называется *типом функции* $f(z)$ *относительно уточнённого порядка* $\rho_M(r)$.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Обозначим* $L(r) = M(r)^{\rho(r)-\varrho}$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{L(r+b)}{L(r)} \right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \ln \frac{L(r+b)}{L(r)} &= \ln(M(r+b)^{\rho(r+b)-\varrho}) - \ln(M(r)^{\rho(r)-\varrho}) = \\ &= (\rho(r+b) - \varrho) \ln M(r+b) - (\rho(r) - \varrho) \ln M(r) = \\ &= (\rho(r+b) \ln M(r+b) - \rho(r) \ln M(r)) - \varrho(\ln M(r+b) - \ln M(r)). \end{aligned}$$

Введём обозначение $\varphi(t) = \rho(t)\ln M(t)$. Тогда получим

$$\ln\frac{L(r+b)}{L(r)} = \frac{b(\varphi(r+b)-\varphi(r))}{b} - \varrho\ln\frac{(M(r+b)-M(r))+M(r)}{M(r)} =$$

$$= b\varphi'(r) - \varrho\ln\left(1+\frac{(M(r+b)-M(r))}{M(r)}\right) = b\varphi'(r) - \frac{\varrho bM'(r)}{M(r)}\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}} =$$

$$= b\left(\rho'(r)\ln M(r) + \rho(r)\frac{M'(r)}{M(r)}\right) - \frac{\varrho bM'(r)}{M(r)}\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}} =$$

$$= b\frac{M'(r)}{M(r)}\left(\rho'(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\ln M(r) + \rho(r) - \varrho\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}}\right).$$

Учитывая (1), получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\left(\ln\frac{L(r+b)}{L(r)}\right)^{\frac{M'(r)}{bM(r)}} = 0,$$

а отсюда и утверждение леммы. □

Предложение 1. *Для функции роста $V(r)$ относительно модельной функции $M(r)$ справедливо следующее равенство:*

$$\int_{r_0}^{r} M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du = \frac{1}{\varrho+1}M(r)^{\rho(r)+1} + o(M(r)^{\rho(r)+1}), \quad r\to+\infty\,. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{r_0}^{r} M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du = \frac{1}{\varrho+1}\int_{r_0}^{r} M(u)^{\rho(u)-\varrho}\,dM(u)^{\varrho+1} = \frac{1}{\varrho+1}M(u)^{\rho(u)+1}\Big|_{r_0}^{r} +$$

$$+ O(1) - \frac{1}{\varrho+1}\int_{r_0}^{r}\left[\rho(u) + \frac{M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right]M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du\,.$$

Из определения уточнённого порядка следует, что для любого $\epsilon > 0$ асимптотически

$$|\rho(r)-\varrho| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left|\frac{M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Воспользовавшись этим, мы получим, что

$$(1+o(1))\int_{r_0}^{r} M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du = \frac{1}{\varrho+1}M(r)^{\rho(r)+1} + O(1), \quad r\to+\infty.$$

Отсюда следует равенство (2). □

В дальнейших рассуждениях будем использовать обозначение $\psi(t) = \frac{1}{(\ln M(t))'}$.

Лемма 2. *Пусть $\rho_M(r)$ — уточнённый порядок относительно модельной функции. Тогда будет справедливо следующее асимптотическое равенство при $0 < \rho < \infty$: $\psi(r)V'(r) = (\varrho + o(1))V(r)$.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$V'(r) = M^{\rho(r)-1}(r)\rho(r)M'(r) + M^{\rho(r)}(r)\ln M(r)\rho'(r) = \\ = V(r)\frac{M'(r)}{M(r)}\left(\rho(r) + \rho'(r)\ln M(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{V'(r)}{(\ln M(r))'} = (\varrho + o(1))V(r). \tag{3}$$

Лемма доказана. □

Введём в рассмотрение функцию

$$\xi(t) = t\exp\left(\frac{\psi(t)V(t)}{V'(t)}\right). \tag{4}$$

Тогда в силу равенства (3) получаем

$$\ln\frac{\xi(r)}{r} = \frac{1}{\varrho} + o(1).$$

Теорема 1. *Пусть $M(r)$ — мультипликативная модельная функция. Если отрезок $[a,b]$ таков, что $b \geqslant a > 0$, то равномерно относительно $M(t) \in [a,b]$ выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{V(tr)}{V(r)} = M^{\varrho}(t).$$

Доказательство. Для начала рассмотрим

$$\frac{V(tr)}{V(r)} = M(t)^{\rho(tr)}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)}.$$

Пусть, $\varepsilon(r) = \sup\limits_{u\geqslant r}\left|\dfrac{\ln M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right|$. Легко видеть, что $\lim\limits_{r\to+\infty}\varepsilon(r) = 0$. Используя это, получим

$$|\rho(tr)-\rho(r)| = \left|\int\limits_r^{tr}\rho'(u)\,du\right| = \left|\int\limits_r^{tr}\frac{\rho'(u)M(u)\ln M(u)}{M'(u)}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right| \leqslant \\ \leqslant \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\left|\int\limits_r^{tr}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right| = \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\ln\left(1+\frac{\ln M(t)}{\ln(M(r)}\right).$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \left|\varlimsup_{r\to+\infty}\ln\frac{(M(r))^{\rho(tr)}}{V(r)}\right| \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}\ln M(r)|\rho(tr)-\rho(r)| \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}\left(\max\{\varepsilon(r);\varepsilon((tr)\}\ln M(r)\ln\left(1+\frac{\ln M(t)}{\ln M(r)}\right)\right) \leqslant \lim_{r\to+\infty}\max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\} = 0.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)^{\rho(tr)}}{V(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(tr)^{\rho(tr)}}{V(r)}=\lim_{r\to+\infty}M(t)^{\rho(tr)}\lim_{r\to+\infty}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)}=M^{\varrho}(t)\,. \tag{5}$$

□

Замечание 1. Более общее утверждение относительно модельной функции было доказано в работе [10], однако для целей работы более удобно рассматривать мультипликативную модельную функцию.

Теорема 2. *При $r\to\infty$ и $0<a\leqslant t\leqslant b<\infty$ равномерно относительно t выполняется асимптотическое неравенство*

$$(1-\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r)<M(tr)^{\rho(tr)}<(1+\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r)\,.$$

Заметим, что при $M(t)>1$ имеет место асимптотическое неравенство

$$M(tr)^{\rho(tr)}<M(t)^{\varrho+\epsilon}V(r)\,.$$

Лемма 3. *Для функции $\xi(r)$, определённой равенством* (4)*, будет справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Доказательство. Действительно, из (1) непосредственно получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{V\left(r\exp\left(\frac{\psi(r)V(r)}{V'(r)}\right)\right)}{V(r)}=M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим функцию вида

$$K(M(r),f)=\frac{d}{d\ln M(r)}\ln\mathcal{M}(M(r),f)=\frac{M(r)}{M'(r)}\frac{d}{dr}\ln\mathcal{M}(M(r),f).$$

Функция $K(M(r),f)$ является неотрицательной и неубывающей.

Легко видеть, что из леммы 3 следует неравенство

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{V(\xi(r))}{\psi(r)V'(r)\ln\frac{\xi(r)}{r}}\leqslant M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}). \tag{6}$$

Лемма 4. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет конечный отличный от нуля порядок относительно уточнённого порядка ρ_M и тип, не превосходящий σ. Тогда будет верно неравенство*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{K(r,f)}{\psi(r)V'(r)}\leqslant\sigma\cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Доказательство. Для любых $R>r$ получаем

$$\ln\mathcal{M}(M(R),f)=\int\limits_0^R\frac{d}{dt}\ln\mathcal{M}(M(t),f)dt=\int\limits_0^R\frac{d}{d\ln M(t)}\ln\mathcal{M}(M(t),f)d\ln M(t)\geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_r^R \frac{d\ln\mathcal{M}(M(t),f)}{d\ln M(t)} d\ln M(t) \geqslant K(M(r),f)\int\limits_r^R d\ln M(t) = K(M(r),f)\cdot\ln\frac{M(R)}{M(r)}.$$

Таким образом, для $b = M(r)$, $B = M(R)$ при $R > r$ получаем оценку

$$\ln\mathcal{M}(B,f) \geqslant K(b,f)\cdot\ln\frac{B}{b}.$$

Кроме того, получим

$$\frac{K(b,f)}{\psi(b)V'(b)} \leqslant \frac{\ln\mathcal{M}(B,f)}{V(B)}\cdot\frac{V(B)}{\psi(b)V'(b)\ln\frac{B}{b}}.$$

Следовательно, при стремлении r к бесконечности, используя (6), полагая в нём $B = \xi(b)$, получаем требуемое неравенство. □

2. Основной результат

Обозначим через Z_f множество нулей функции $f(z)$: $Z_f = \{z \in \mathbb{C} |\, f(z) = 0\}$. Под $\operatorname{dist}(a, G)$ будем понимать расстояние между точкой a и множеством G:

$$\operatorname{dist}(a,G) = \inf_{z\in G}|a - z|.$$

Определение 4. Пусть $M(r)$ — модельная функция роста и

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\mathcal{M}(r,f)}{\ln M(r)} = \varrho \in \mathbb{R}_+ .$$

Функция $\rho(r) = \rho_M(r)$ называется *собственным уточнённым порядком целой функции* $f(z)$, если $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \varrho$.

Теорема 3. *Пусть $\rho_M(r)$ — собственный уточнённый порядок целой функции $f(z)$ и $\sigma = \sigma_f$ — тип функции $f(z)$ относительно модельной функции $\rho_M(r)$. Тогда*

$$\varliminf_{|w|\to\infty}\operatorname{dist}(w,Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{\exp(-M^{\varrho}(1))}{\sigma\cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})},$$

где w — точка максимума модуля, $V(r) = M(r)^{\rho(r)}$ — функция роста относительно мультипликативной модельной функции $M(r)$ и $\psi(r) = \frac{1}{(\ln M(r))'}$.

Доказательство. В доказательстве теоремы мы будем использовать идеи A. Macintyre из работы [1], которые также использовались авторами работ [2–6].

Пусть, как и выше, w — точка максимума модуля функции $f(z)$. Определим функции $\Phi_w(z)$ и $Q(h,w)$ равенствами

$$\Phi_w(z) = \frac{f(w+z)}{f(w)}, \quad Q(h,w) = \max_{|z|\leqslant h}|\Phi_w(z)|.$$

Поскольку для функции $f(z)$ верно неравенство $|f(w+z)| \leqslant \mathcal{M}(|w|+|z|,f)$, то получаем оценку

$$Q(h,w) \leqslant \frac{\mathcal{M}(|w|+h,f)}{\mathcal{M}(|w|,f)}.$$

После логарифмирования этого неравенства получаем

$$\ln Q(h,w) \leqslant \ln \mathcal{M}(|w|+h,f) - \ln \mathcal{M}(|w|,f) = \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln \mathcal{M}(M(t),f) =$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} \frac{d}{d\ln M(t)} \ln \mathcal{M}(M(t),f) d\ln M(t) =$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} K(M(t),f) d\ln M(t) \leqslant K(|w|+h,f) \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln M(t) =$$

$$= K(|w|+h,f) \ln\left(1+\frac{h}{|w|}\right) \leqslant K(|w|+h,f)\frac{h}{|w|}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства и леммы 4 следует, что при $|w| > r_\varepsilon$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\ln Q(h,w) \leqslant (\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}) + \varepsilon)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|}. \tag{7}$$

Теперь с помощью функции $Q(h,w)$ оценим требуемое расстояние. Для этого будем использовать функцию

$$\eta_w(z) = \frac{Q(h,w)(\Phi_w - 1)}{Q^2(h,w) - \Phi_w(z)}.$$

Эта функция была введена в работе [1], и рассуждения с её применением, с некоторыми изменениями, аналогичны доказательствам работ [2–6]. Для полноты изложения приведём доказательство.

Функция $\eta_w(z)$ удовлетворяет условиям $\eta_w(0) = 0$ и $|\eta_w(z)| \leqslant 1$ при значениях $|z| \leqslant h$. Применив к этой функции лемму Шварца, получаем $|\eta_w(z)| \leqslant \frac{|z|}{h}$ для $|z| \leqslant h$. Тогда

$$Q(h,w)|\Phi_w(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{h} \cdot |Q^2(h,w) - \Phi_w(z)| \leqslant \frac{|z|}{h}(|Q^2(h,w) - 1| + |1 - \Phi_w(z)|).$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|\Phi_w(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{h} \cdot \frac{|Q^2(h,w) - 1|}{|Q(h,w) - \frac{|z|}{h}|} \leqslant \frac{|z|}{h(Q(h,w)+1)} < 1.$$

Так как правая часть последнего неравенства меньше единицы, то $|z| < \frac{h}{Q(h,w)}$. Отсюда следует, что $\Phi_w(z) \neq 0$ и, более того, $f(w+z) \neq 0$ для значений $|z| < \frac{h}{Q(h,w)}$. Таким образом, получаем

$$\operatorname{dist}(w, Z_f) \geqslant \frac{h}{Q(h,w)}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем следующую оценку для любого $\varepsilon > 0$:

$$\operatorname{dist}(w, Z_f) \geqslant h \exp\left(-\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}) + \varepsilon\right)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|} \text{ при } |w| > r_\varepsilon. \tag{9}$$

Положим

$$h = \frac{|w|}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}. \tag{10}$$

Из (9) получим при $|w| > r_\varepsilon$

$$\operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right)\frac{\psi(|w|+h)V'(|w|+h)}{\psi(|w|)V'(|w|)}\right).$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right)\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)}\right).$$

Оценим сомножитель $\dfrac{V(|w|+h)}{V(|w|)}$ в показателе экспоненты. По лемме 1, учитывая (10), получим

$$\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)} = \frac{V\left(|w| + \frac{|w|}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}\right)}{V(|w|)} \leqslant M^{\rho}\left(1 + \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}\right).$$

Таким образом, при стремлении $|w|$ к бесконечности получим асимптотическое неравенство

$$\varliminf_{|w|\to\infty} \operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right) \cdot M^{\varrho}(1)\right),$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. Г. Малютину за полезные обсуждения, которые позволили улучшить данную работу.

Список литературы

1. **Macintyre A. J.** Wiman's method and "flat regions" of integral functions // Quarterly Journal of Mathematics. 1938. Vol. 9. P. 81–88.
2. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an entire function // Complex Variables, Theory and Application. 2003. Vol. 48, no. 6. P. 341–354.
3. **Üreyen A. E.** On maximum modulus points and the zero set for an entire function of either zero or infinite order // Computational Methods and Function Theory. 2004. Vol. 4, no. 2. P. 341–354.
4. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2005. Vol. 341, no. 8. P. 381–384.
5. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth // Comptes Rendus Mathematique. 2005. Vol. 341, no. 8. P. 481–484.

6. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** The growth irregularity of slowly growing entire functions // Functional Analysis and its Applications. 2006. Vol. 40. P. 304–312.
7. **Fedynyak S. I., Filevych P.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an analytic function // Matematychni Studii. 2019. Vol. 52, no. 1. P. 10–23.
8. **Хабибуллин Б. Н.** Обобщение уточнённого порядка // Докл. Башкир. ун-та. 2020. Т. 5, вып. 2. С. 1–5.
9. **Кабанко М. В., Малютин К. Г., Хабибуллин Б. Н.** Об уточнённой функции роста относительно модельной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2023. Т. 230. С. 56–74.
10. **Kabanko M. V., Malyutin K. G.** On the proximate order with respect to the model function // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 280. P. 692–709.
11. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956.

Поступила в редакцию 27.12.2024.
После переработки 26.07.2025.

Сведения об авторе

Кабанко Михаил Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: kabankom@gmail.com

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 677–687.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-677-687

ON SOME METRIC CHARACTERISTICS OF THE ENTIRE FUNCTIONS THAT CONNECTED WITH THE MODEL FUNCTION OF GROWTH

M.V. Kabanko

Kursk State University, Kursk, Russia
kabankom@gmail.com

The concept of proximate order is widely used in the theories of integer, meromorphic, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In this paper, we provide a general interpretation of this concept as a proximate order relative to the model growth function. The classical proximate order in the sense of Valiron is the particular case of proximate order relative to the model growth function. The main result of this work is a lower estimate of the distance between the points at which the maximum modulus of the entire function and the set of zeros of this function is reached, using the concept of a proximate order relative to the model function.

Keywords: *model function, growth function, proximate order, convex function, entire function.*

References

1. **Macintyre A.J.** Wiman's method and "flat regions" of integral functions. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1938, vol. 9, pp. 81–88.
2. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an entire function. *Complex Variables, Theory and Application*, 2003, vol. 48, no. 6, pp. 341–354.
3. **Üreyen A.E.** On maximum modulus points and the zero set for an entire function of either zero or infinite order. *Computational Methods and Function Theory*, 2004, vol. 4, no. 2, pp. 341–354.
4. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2005, vol. 341, no. 8, pp. 381–384.
5. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth. *Comptes Rendus Mathematique*, 2005, vol. 341, no. 8, pp. 481–484.
6. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** The growth irregularity of slowly growing entire functions. *Functional Analysis and its Applications*, 2006, vol. 40, pp. 304–312.
7. **Fedynyak S.I., Filevych P.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an analytic function. *Matematychni Studii*, 2019, vol. 52, no. 1, pp. 10–23.
8. **Khabibullin B.N.** Obobshcheniye utochyonnogo poryadka [A generalization of the proximate order]. *Doklady Bashkirskogo universiteta* [Reports of Bashkir University], 2020, vol. 5, no. 2, pp. 1–5. (In Russ.).
9. **Kabanko M.V., Malyutin K.G., Khabibullin B.N.** Ob utochnyonnoy funktsii rosta otnositel'no model'noy [On the proximate growth function relative to the model growth function]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results in Science and Technology. Series on Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys], 2023, vol. 230, pp. 56–74. (In Russ.).
10. **Kabanko M.V., Malyutin K.G.** On the proximate order with respect to the model function. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 280, pp. 692–709.

11. **Levin B.Ya.** *Lectures on Entire Functions.* American Mathematical Society, 1996.

Article received 27.12.2024.
Corrections received 26.07.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 688–700.

УДК 517.53 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-688-700

ОБОБЩЁННАЯ ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ПОЛУКОЛЬЦА И ПОЛУКРУГА

К. Г. Малютин[a], А. А. Наумова[b]

Курский государственный университет, Курск, Россия
[a] malyutinkg@gmail.com, [b] aliona.filatowa2013@yandex.ru

Получено обобщение формулы Карлемана субгармонической функции в открытом полукольце и в открытом полукруге. Обобщённая формула учитывает как распределение меры Рисса функции, так и её граничную меру. Доказательство использует теорию тонкой топологии и пространств Мартина.

Ключевые слова: *формула Карлемана, полукольцо, полукруг, субгармоническая функция, мера Рисса, граничная мера, полная мера.*

Введение

Многие важные результаты в теории субгармонических функций получаются с использованием формул представления этих функций. Наиболее известная из них — формула Пуассона — Иенсена, которая даёт представление субгармонической функции в круге. Отметим также формулы Неванлинны, Симидзу — Альфорса, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным [2], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие авторы [3–6]. Важное место в этом ряду занимает формула Карлемана [7], которая устанавливает связь между распределением нулей и полюсов мероморфной функции в замкнутом полукольце $\{z : 0 < R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2 < +\infty, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ с её поведением на границе полукольца. Обобщение этой формулы на функции аналитические в полукруге $\{z : |z| \leqslant R < +\infty, \operatorname{Im} z > 0\}$ получено Н. В. Говоровым [3]. Для функций, субгармонических в верхней полуплоскости, обобщение формулы Карлемана получил А. Ф. Гришин [2; 8]. В последнее время важные результаты в этом направлении получены в работах Б. Н. Хабибуллина и его учеников [9; 10].

В настоящей работе мы распространяем результаты из работ [2–4; 8] на функции, субгармонические в открытом полукольце и в открытом полукруге.

1. Основные обозначения и терминология

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$ обозначим комплексную плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость без границы. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, $\overline{D}$ — замыкание множества D, D_+ означает пересечение множества D с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, то есть $D_+ = D \cap \mathbb{C}_+$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

Символом ∂ мы обозначаем в одних случаях частную производную, в других — границу множества, $\stackrel{\text{def}}{=}$ означает равно по определению. Обозначим через $D_+(R_1,R_2)=\{z:0<R_1<|z|<R_2<+\infty,\operatorname{Im} z>0\}$ открытое полукольцо на верхней полуплоскости. Субгармоничность в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ равносильна субгармоничности в $D_+(R_1',R_2',\delta)=\{z:0<R_1'<|z|<R_2'<+\infty,\operatorname{Im} z>-\delta\}$ при некоторых $R_1'<R_1<R_2<R_2'$, $\delta>0$. Поэтому функции, субгармонические и ограниченные сверху внутри открытого полукольца $D_+(R_1,R_2)$, образуют более широкий класс, чем субгармонические в замыкании $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ полукольца. Для меры λ обозначаем $\lambda(t)=\lambda(C(0,t))$.

2. Вспомогательные сведения

Пусть $SK(R_1,R_2)$ — пространство субгармонических функций в $D_+(R_1,R_2)$, имеющих в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$, $\frac{\partial G}{\partial n_\zeta}$ — производная по внутренней нормали к границе полукольца. Из [11, теорема 7] следует, что функции $v(z)$ из пространства $SK(R_1,R_2)$ обладают следующими свойствами:

Пусть $v\in SK(R_1,R_2)$, μ — риссовская мера функции $v(z)$. Тогда

a) v имеет почти всюду некасательные пределы

$$v(R_1e^{i\varphi})=\lim_{r\to R_1+0}v(re^{i\varphi}),\ v(R_2e^{i\varphi})=\lim_{r\to R_2-0}v(re^{i\varphi}),\ v(t)=\lim_{y\to+0}v(t+iy)\,;$$

b) существуют однозначно определяемые функцией $v(z)$ меры: ν_j, $j=1,2$, на интервале $(0,\pi)$ и мера ν на объединении интервалов $I(R_1,R_2)=(-R_2,-R_1)\cup(R_1,R_2)$, такие, что для любой точки $z_0\in D_+(R_1,R_2)$, в которой $v(z_0)>-\infty$,

мера $\tilde\mu$, $d\tilde\mu(\zeta)\stackrel{\text{def}}{=}G(z_0,\zeta)\,d\mu(\zeta)$, конечна на $D_+(R_1,R_2)$,

меры $\tilde\nu_j$, $d\tilde\nu_j(\zeta)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial G(z_0,R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\zeta)$, $j=1,2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$,

мера $\tilde\nu$, $d\tilde\nu(t)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}\,d\nu(t)$, имеет ограниченную полную вариацию на $I(R_1,R_2)$;

c) имеют место формулы

$$\nu_1([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_1+0}R_1\int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,\ \nu_2([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_2-0}R_2\int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

$$\text{если } 0<\alpha<\beta<\pi,\quad \nu_j(\{\alpha\})=\nu_j(\{\beta\})=0,\quad j=1,2\,,$$

$$\nu([a,b])=\lim_{y\to+0}\int_a^b v(x+iy)\,dx,\ \text{если } [a,b]\subset I(R_1,R_2),\ \nu(\{a\})=\nu(\{b\})=0,$$

$$d\nu_j(\varphi)=R_jv(R_je^{i\varphi})\,d\varphi+d\sigma_j(\varphi),\ j=1,2,\quad d\nu(t)=v(t)\,dt+d\sigma(t)\,,$$

где σ_j, $j=1,2$, σ — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0,\pi)$, соответственно на $I(R_1,R_2)$, для которых почти всюду $\sigma_j'=0$, $\sigma'=0$).

Мера $\hat\nu=\nu_1+\nu_2+\nu$ называется граничной мерой функции v.

Для функции $v \in SK(R_1, R_2)$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{D_+(R_1,R_2)\cap K} \operatorname{Im} \zeta \, d\mu(\zeta) - \hat{\nu}(K)\,.$$

Мера λ обладает следующими свойствами: 1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$; 2) λ — неотрицательная мера в $D_+(R_1, R_2)$; 3) λ равна нулю в дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R_1, R_2)}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1)–3), то существует функция $v \in SK(R_1, R_2)$ с полной мерой, равной λ.

Используя введённые определения, функцию $v \in SK(R_1, R_2)$, $z \in D_+(R_1, R_2)$, можно записать в виде (см. [11, теорема 7])

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\overline{D_+(R_1,R_2)}} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) + \sum_{j=1}^{4} a_j M(z, R_j), \tag{1}$$

где $R_3 = -R_1$, $R_4 = -R_2$,

$$K(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{Im}\zeta} G(z,\zeta), & \zeta \in D_+(R_1,R_2), \\ \dfrac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}, & \zeta = R_j e^{i\varphi}, \varphi \in (0,\pi), \\ \dfrac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}, & \zeta \in I(R_1,R_2)\,, \end{cases}$$

$M(z,\zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ, а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования, функция $K(z,\zeta)$ продолжена по непрерывности на вещественную ось при $R_1 \leqslant |t| \leqslant R_2$.

В частности, если функция $v(z)$ субгармонична в полукольце $D_+(R_1', R_2')$, $R_1' < R_1 < R_2 < R_2'$, то при $z \in D_+(R_1, R_2)$

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,R_2)\cup I(R_1,R_2)} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) + \sum_{j=1}^{2} \frac{R_j}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(R_j e^{i\varphi}\right)\, d\varphi\,. \tag{2}$$

При этом в определении полной меры функции $v(z)$ её сингулярные меры σ_j, $j = 1, 2$, отсутствуют (они равны нулю).

Пусть $R_1 = qR, R_2 = R/q$. Тогда имеет место соотношение

$$G(z,\zeta) = \ln \left| \frac{\sigma\left(\ln \dfrac{z\overline{\zeta}}{q^2R^2}\right) \sigma\left(\ln \dfrac{z}{\overline{\zeta}}\right)}{\sigma\left(\ln \dfrac{z\zeta}{q^2R^2}\right) \sigma\left(\ln \dfrac{z}{\zeta}\right)} \right|,$$

где $\ln\omega = \ln|\omega| + i\arg\omega$, $0 < \arg z$, $\arg\zeta < \pi$, $\arg\overline{\zeta} = -\arg\zeta$, $\arg\omega_1\omega_2 = \arg\omega_1 + \arg\omega_2$, $\arg\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \arg\omega_1 - \arg\omega_2$, $\sigma(u)$ — сигма-функция Вейерштрасса с основными периодами $\omega_1 = -4\ln q$, $\omega_2 = 2\pi i$.

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [12, гл. III, п. 12]), можно получить разложения ядра в формуле (1) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0,1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \tag{3}$$
$$qR < \tau < r < R/q\,,$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}\tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \tag{4}$$
$$qR < r < \tau < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{t}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{t^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta\,, \tag{5}$$
$$qR < |t| < r < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{r}{t}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}t^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta\,, \tag{6}$$
$$qR < r < |t| < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G\left(z, qRe^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4}{qR}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial G\left(z, \frac{1}{q}Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi\,. \tag{8}$$

Формулы (2)–(8) приведены в диссертации А. Ф. Гришина [2]. В других источниках нам они не встречались. Заметим также, что если $\zeta \in \partial D(R_1, R_2)$, то $G(z,\zeta) = 0$.

Приведём также известные формулы для функции Грина (см., например, [2; 3]) $G(z,\zeta)$ полукруга $C(0,R) = \{z \,||z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Имеют место соотношения

$$G(z,\zeta) = \ln\left|\frac{(z-\overline{\zeta})(R^2 - z\overline{\zeta})}{(z-\zeta)(R^2 - z\zeta)}\right|,$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad 0 \leqslant \tau < r \leqslant R\,, \tag{9}$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{\tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad 0 \leqslant r < \tau \leqslant R\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t} = \frac{2r\sin\theta(R^2 - r^2)(R^2 - t^2)}{|z-t|^2|R^2 - tz|^2}\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m(R^{2m} - t^{2m})}{t^{m+1}R^{2m}} \sin m\theta\,, \quad 0 \leqslant r < |t| \leqslant R\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1}(R^{2m} - t^{2m})}{r^m R^{2m}} \sin m\theta\,, \quad 0 \leqslant |t| < r \leqslant R\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}=\frac{R^2-r^2}{R|Re^{i\varphi}-z|^2}-\frac{R^2-r^2}{R|Re^{-i\varphi}-z|^2}\,,$$

$$\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{R^{m+1}}\sin m\theta\sin m\varphi\,. \tag{13}$$

3. Обобщённая формула Карлемана для полукольца

Перейдём к обобщению формулы Карлемана для полукольца.

Прежде чем сформулировать нашу теорему, введём обозначение. Пусть λ — произвольная мера в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+$, определим меру λ_m, $m\in\mathbb{N}$, равенством

$$d\lambda_m(\zeta)=\frac{\sin m\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^m\,d\lambda(\zeta),\quad \zeta=\tau e^{i\varphi}\,,$$

где $\dfrac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi=0,\pi$ определяется по непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $v\in SK(R_1,R_2)$. Тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta=\sum_{j=1}^{4}a_j\int_0^{\pi}M(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta},R_j)\sin m\theta\,d\theta-\\
-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\int_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)d\lambda_m(\tau)-\\
-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\int_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)+\\
+\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m}{R_1^m+R_2^m}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int_0^{\pi}\sin m\theta\,d\nu_j(\theta)\right)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. В представлении (1) выберем точку $z=re^{i\varphi}$ так, что $v(z)>-\infty$ (такую точку всегда можно выбрать на любой полуокружности $\{z=re^{i\theta}|0<\theta<\pi,R_1<r<R_2\}$, так как в противном случае $v(z)\equiv-\infty$). Запишем представление (1) субгармонической функции v в полукольце $D_+(R_1,R_2)$:

$$\begin{aligned}v(re^{i\theta})=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\operatorname{Int}D_+(R_1,R_2)}\frac{G(re^{i\theta},\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta)+\sum_{j=1}^{4}a_jM(z,R_j)+\\
+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\pi}\frac{\partial G(re^{i\theta},R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\varphi)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{I(R_1,R_2)}\frac{\partial G(re^{i\theta},t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)\,.\end{aligned}$$

Положим $R=\sqrt{R_1R_2}$, $q=\sqrt{R_1/R_2}$. Используя формулы (3)–(8), получим:

$$v(re^{i\theta})=\sum_{j=1}^{4}a_jM(re^{i\theta},R_j)-$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mr^m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{R-\varepsilon}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R+0}^{R_2-0}\left(\frac{1}{\tau^{2m}}-\frac{q^{2m}}{R^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)+\\
&\qquad+\frac{2}{\pi qR}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{r}{R}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)+\\
&\quad+\frac{2q}{\pi R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{R}{r}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_2(\varphi)-I_\varepsilon\,,\quad \varepsilon>0\,,
\end{aligned}
$$

где

$$
I_\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{D_+(R-\varepsilon,R)}}K(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)\,.
$$

Используя свойства функции Грина области (неотрицательность, логарифмическую особенность в точке z) и меры λ, нетрудно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon=0$. В пределе при $\varepsilon\downarrow+0$ получим

$$
\begin{aligned}
v(re^{i\theta})&=\sum_{j=1}^{4}a_jM(re^{i\theta},R_j)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mr^m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{R}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R+0}^{R_2-0}\left(\frac{1}{\tau^{2m}}-\frac{q^{2m}}{R^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)+\\
&\qquad+\frac{2}{\pi qR}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{r}{R}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)+\\
&\quad+\frac{2q}{\pi R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{R}{r}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_2(\varphi)\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Полагая в (15) $R=\sqrt{R_1R_2}$, $q=\sqrt{R_1/R_2}$, $r=R$, получим

$$
\begin{aligned}
v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})&=\sum_{j=1}^{4}a_jM(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta},R_j)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)\,d\lambda_m(\tau)-
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\sin m\theta\int\limits_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_j(\varphi)\right)\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m\sin m\theta}{R_1^m+R_2^m}\,.$$

Используя ортогональность тригонометрических мономов, после умножения обеих частей на $\sin m\theta$ и интегрирования получим формулу (14). □

Следствие 1. *Пусть $v\in SK(R_1',R_2')$, $R_1'<R_1<R_2<R_2'$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_0^{\pi}v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta=\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m}{R_1^m+R_2^m}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int\limits_0^{\pi}v(R_je^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta\right)-$$

$$-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\int\limits_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)d\lambda_m(\tau)-$$

$$-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\int\limits_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (16)$$

Доказательство. Утверждение прямо следует из (14). В этом случае

$$\lim_{r\to R_2-0}R_2\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta=R_2\int\limits_\alpha^\beta v(R_2e^{i\theta})\,d\theta,\ \lim_{r\to R_1+0}R_1\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta=R_1\int\limits_\alpha^\beta v(R_1e^{i\theta})\,d\theta$$

и, следовательно, $d\nu_j(\theta)=R_jv(R_je^{i\theta})\,d\theta$, $j=1,2$. Кроме того, выполняются равенства $a_j=0$, $j=1,2,3,4$. □

4. Обобщённая формула Карлемана для полукруга

Рассмотрим обобщённую формулу Карлемана для субгармонических функций в полукруге. Она имеет различное оформление и выводится при различных ограничениях на функцию v. Для функций субгармонических в полуплоскости наиболее удачное оформление обобщённой формулы Карлемана получил К. Ито [5] (см. также [2, теорема 43; 12]). Нам понадобится следующая теорема А. Ф. Гришина.

Теорема 2. *Пусть v — субгармоническая функция в полукруге $C_+(0,R)$, имеющая в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту, μ — её мера Рисса, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукруга $C_+(0,R)$. Тогда существуют вещественные числа a_j, $j=1,2$, мера ν_1 на интервале $(0,\pi)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причём мера $\tilde\nu_1$, где $d\tilde\nu_1(\zeta)=\frac{\partial G(z_0,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}d\nu_1(\zeta)$, имеет ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$, мера ν на интервале $(-R,R)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причём мера $\tilde\nu$, где $d\tilde\nu(\zeta)=\frac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}d\nu(\zeta)$*

(z_0 *такая точка, что* $v(z_0) > -\infty$), *имеет ограниченную полную вариацию на интервале* $(-R, R)$, *такие, что при* $z \in C_+(0,R)$ *имеет место равенство*

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_1(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t) + \\ + a_1 M(z,R) + a_2 M(z,-R)\,, \tag{17}$$

где $M(z,\zeta)$ *— функция Мартина полукруга* $C_+(0,R)$, *отвечающая граничной точке* ζ, *а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Имеют место формулы*

$$\nu_1([\alpha,\beta]) = \lim_{r\to R-0} R\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,\ \textit{если}\ 0<\alpha<\beta<\pi,\quad \nu_1(\{\alpha\}) = \nu_1(\{\beta\}) = 0\,,$$

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v(x+iy)\,dx,\ \textit{если}\ [a,b]\in(-R,R),\ \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0\,,$$

$$d\nu_1(\varphi) = Rv(Re^{i\varphi})\,d\varphi + d\sigma_1(\varphi),\quad d\nu(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)\,,$$

где почти всюду

$$v(Re^{i\varphi}) = \lim_{r\to R-0} v(re^{i\varphi}),\ v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy)\,,$$

а σ_1, σ, *— меры, сингулярные относительно меры Лебега* (*невозрастающие ограниченные функции на* $(0,\pi)$, *на* $(-R,R)$, *для которых почти всюду* $\sigma_1' = 0$, $\sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v *является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукруге* $C_+(0,R_1)$, $R<R_1$, *то*

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(Re^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)\,.$$

Теорема 2 доказана в диссертации А. Ф. Гришина [3, теорема 37]. В других источниках (например, в [4, теорема 1, теорема 2]) она приводится без доказательства. Доказательство легко провести, используя рассуждения при доказательстве теоремы 7 в [11]. В несколько другой формулировке теорема 2 доказана в работе [5].

Мера $\hat\nu = \nu_1 + \nu$ называется граничной мерой функции v.

Обозначим через $SK(R)$ пространство субгармонических функций в полукруге $C_+(0,R)$, имеющих в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Для функции $v \in SK(R)$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{C_+(0,R)\cap K} \operatorname{Im}\,\zeta\,d\mu(\zeta) - \hat\nu(K)\,.$$

Сформулируем и докажем обобщённую формулу Карлемана для субгармонических функций в полукруге.

Теорема 3. *Пусть $v \in SK(R)$. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{R^{m+1}}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)\,d\nu_1(\theta) = \frac{1}{R_0^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(R_0e^{i\theta})\,d\theta - \\ - a_1\int\limits_0^\pi M(R_0e^{i\theta},R)\sin(m\theta)\,d\theta - a_2\int\limits_0^\pi M(R_0e^{i\theta},-R)\sin(m\theta)\,d\theta + \\ + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) + \frac{1}{2m}\int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (18)$$

Доказательство. В представлении (17) выберем такую точку $z = R_0e^{i\theta}$, что $v(z) > -\infty$ (как отмечалось выше, такую точку всегда можно выбрать на любой полуокружности $\{z = re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi, 0 < r < R\}$). Запишем представление (17) субгармонической функции $v(z)$ в полукруге $C_+(0,R)$. Используя формулы (9)–(13), получим

$$v(R_0e^{i\theta}) = a_1M(R_0e^{i\theta},R) + a_2M(R_0e^{i\theta},-R) + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m\sin m\theta}{m}\left(-\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) - \int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{R_0^m}{R^{m+1}}\right)\sin m\theta\int\limits_0^\pi \sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)\,.$$

Используя ортогональность тригонометрических мономов, после умножения обеих частей на $\sin m\theta$ и интегрирования получим формулу (18). □

Следствие 2. *Пусть $v \in SK(R')$, $R < R'$. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{R^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(Re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{R_0^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(R_0e^{i\theta})\,d\theta + \\ + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) + \frac{1}{2m}\int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (19)$$

Доказательство. Утверждение прямо следует из (18). В этом случае

$$\lim_{r\to R-0} R\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta = R\int\limits_\alpha^\beta v(Re^{i\theta})\,d\theta$$

и, следовательно, $d\nu_1(\theta) = Rv(Re^{i\theta})\,d\theta$.

Кроме того, выполняются равенства $a_j = 0$, $j = 1, 2$. □

Заметим, что формула (19) — это формула Ито (полученная для субгармонических функций во всей полуплоскости) в исполнении А. Ф. Гришина.

Заключение

В проблеме представления субгармонических функций в различных областях комплексной плоскости остаётся много открытых вопросов. На наш взгляд, одна из основных проблем, являющихся камнем преткновения, есть вычисление функции Грина данной области, особенно для многосвязных областей. В этих случаях эффективным инструментом решения проблемы является теория тонкой топологии и пространств Мартина [13], в частности, теорема Рисса — Мартина о представлении.

Формула (16) отличается от формулы (19) и, на первый взгляд, выглядит более «громоздко». Однако в ней нет слагаемого

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0)\,,$$

которое может иметь большой рост относительно R_0 и создавать проблемы при исследованиях. Дело в том, что формулы типа Карлемана связывают коэффициенты Фурье

$$c_m(r,v)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(re^{i\theta})\,d\theta$$

субгармонической в полуплоскости функции v с её полной мерой λ [14] и являются полезным инструментом в теории роста субгармонических функций.

Интересно также получить аналогичные формулы для субгармонических функций в кольце $\{z : R_0 < |z| < R\}$.

Список литературы

1. **Гольдберг А. А., Островский И. В.** Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1972.
2. **Гришин А. Ф.** Субгармонические функции конечного порядка : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 1992.
3. **Hayman W. K.** Questions of regularity connected with Phragmen–Lindelöf principle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1956. Vol. 9, no. 35. P. 115–126.
4. **Ito J.-I.** Subharmonic functions in half-plane // Transactions of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 129, no. 3. P. 479–499.
5. **Govorov N. V.** Riemann's Boundary Problem with Infinite Index. Basel, Boston, Berlin : Birkäuser, 1994.
6. **Malyutin K. G., Kozlova I. I., Sadik N. M.** Canonical functions of admissible measures in the half-plane // Mathematical Notes. 2014. Vol. 96, no. 3. P. 85–96.
7. **Carleman T.** Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate van vorgegeben Potenzen // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1923. Vol. 17, no. 9. P. 1–30.
8. **Гришин А. Ф.** Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I // Математика, физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, №2. С. 193–215.
9. **Меньшикова Э. Б.** Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций // Изв. вузов. Математика. 2022. № 6. С. 37–53.
10. **Khabibullin B. N., Menshikova E. B.** Preorders on subharmonic functions and measures with applications to the distribution of zeros of holomorphic functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 3. P. 587–611.

11. **Малютин К. Г., Наумова А. А.** Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге // Чебышев. сб. 2023. Т. 24, вып. 5. С. 136–152.
12. **Ахиезер Н. И.** Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970.
13. **Brelot M.** On Topologies and Boundaries in Potential Theory. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1971.
14. **Малютин К. Г.** Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 6. С. 51–70.

Поступила в редакцию 30.01.2025.
После переработки 09.08.2025.

Сведения об авторах

Малютин Константин Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: malyutinkg@gmail.com.

Наумова Алена Александровна, ассистент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: aliona.filatowa2013@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 688–700.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-688-700

GENERALIZED CARLEMAN FORMULA FOR SEMIRING AND SEMIDISC

K.G. Malyutin[a], A.A. Naumova[b]

Kursk State University, Kursk, Russia
[a] malyutinkg@gmail.com, [b] aliona.filatowa2013@yandex.ru

A generalization of the Carleman formula for the subharmonic function in an open semiring and in an open semidisc is obtained. The generalized formula takes into account both the distribution of the Riesz measure of the function and its boundary measure. The proof uses the theory of thin topology and Martin spaces.

Keywords: *Carleman formula, semiring, semicircle, subharmonic function, Riesz measure, boundary measure, full measure.*

References

1. **Gol'dberg A.A., Ostrovskii I.V.** *Raspredeleniye zhacheniy meromorfnykh funktsiy* [Value distribution for meromorphic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970. (In Russ.).
2. **Grishin A.F.** *Subgarmonicheskiye funktsii konechnogo poryadka* [Subharmonic functions of finite order]. Doctor of Sciences Thesis. Khar'kov, 1992. (In Russ.).
3. **Hayman W.K.** Questions of regularity connected with Phragmen — Lindelöf principle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1956, vol. 9, no. 35, pp. 115–126.
4. **Ito J.-I.** Subharmonic functions in half-plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 129, no. 3, pp. 479–499.
5. **Govorov N.V.** *Riemann's Boundary Problem with Infinite Index*. Basel, Boston, Berlin, Birkäuser, 1994.
6. **Malyutin K.G., Kozlova I.I., Sadik N.M.** Canonical functions of admissible measures in the half-plane. *Mathematical Notes*, 2014, vol. 96, no. 3, pp. 85–96.
7. **Carleman T.** Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate van vorgegeben Potenzen. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 1923, vol. 17, no. 9, pp. 1–30.
8. **Grishin A.F.** Nepreryvnost' i asimptoticheskaya nepreryvnost' subgarmonicheskikh funktsiy. I [Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. I]. *Matematika, fizika, analiz, geometriya* [Mathematics, physics, analysis, geometry], 1994, vol. 1, no 2, pp. 193–215. (In Russ.).
9. **Men'shikova E.B.** Integral formulas of Carleman and Levin for meromorphic and subharmonic functions. *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, pp. 28–42.
10. **Khabibullin B.N., Men'shikova E.B.** Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 587–611.
11. **Malyutin K.G., Naumova A.A.** Representation of subharmonic functions in the half-ring and in the half-disk. *Chebyshevskii Sbornik*, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 136–152.
12. **Ahiezer N.I.** *Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy* [Elements of the theory of elliptic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
13. **Brelot M.** *On Topologies and Boundaries in Potential Theory.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1971.

The research is supported by Russian Science Foundation (project No. 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

14. **Malyutin K.G.** Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a halfplane. *Sbornik Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 6, pp. 843–861.

Article received 30.01.2025.
Corrections received 09.08.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 701–714.

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-701-714

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ПОГЛОЩЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Ю. А. Тукмачева[a], С. Г. Пятков[b]

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия
[a] *y_tukmacheva@ugrasu.ru*, [b] s_pyatkov@ugrasu.ru

Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении постоянной, стоящей перед младшим коэффициентом (коэффициентом поглощения) в параболическом уравнении. Доказана теорема существования и единственности решения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и свойствах решений параболических задач. Использованный метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, параметр поглощения, параболическое уравнение, тепломассоперенос.*

Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении числового параметра, стоящего перед младшим коэффициентом в параболическом уравнении вида

$$Mu = u_t - Lu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ, $g(t,x) = \alpha\Phi_1(t,x)$ и α — неизвестный параметр, который подлежит определению. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$Bu|_S = g_0(t,x) \quad (S = (0,T) \times \Gamma), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(t,x)u$ или $Bu = u$ и $\vec{\gamma}(t,x)$ — некасательное к Γ векторное поле, направленное вне области G, и условием переопределения

$$u(t_1,y_1) = \psi_1, \tag{3}$$

где $(t_1,y_1) \in \overline{Q}$, $y_1 \in G$, $0 < t_1 \leqslant T$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), и неизвестного параметра α, функция Φ_1 считается заданной.

Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: описание различных процессов тепломассопереноса [1–4], фильтрации, экологии (определение потоков парниковых газов [5–7], описание процессов поглощения метана в почвах [8–10] и др. В частности, в работах [8–10] функция $g(t,x) \equiv g(x)$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (грант № 25-11-20026).

скорость поглощения метана в почвах. Соответствующая модель предложена в работе [8]. В работах [9; 10] рассмотрен вопрос о численном определении скорости поглощения $g(x)$ в стационарном случае. Отметим, что изучение величин потребления (удельных потоков) CH_4, понимание процессов, обусловливающих его временную и пространственную динамику, а также моделирование потребления необходимы для построения обоснованных климатических прогнозов. Как известно, потребление метана в почве за счёт окисления метанотрофными бактериями в автоморфных почвах — единственный известный биологический механизм стока для атмосферного метана [11].

В настоящее время имеется большое количество работ, посвящённых исследованию обратных задач об определении младшего коэффициента в параболическом уравнении в различных постановках, возникающих в приложениях. Прежде всего отметим работу [12], где рассмотрена задача об определении коэффициента $g = g(x)$ по условию финального переопределения, т. е. условие (3) заменяется на условие $u(T, x) = \varphi(x)$. Эта задача совпадает с классической задачей управления: перевести систему из заданного состояния u_0 в состояние $u(T, x)$ за счёт изменения параметров системы. В этой работе получена теорема существования и единственности классических решений задачи. Доказательства основаны на принципе максимума, и коэффициент g ищется знакоопределённым. Эти результаты также изложены в монографии [2]. Аналогичный результат, но уже с интегральным условием переопределения имеется в работе [13], где также можно найти и подробную библиографию. Теорема существования и единственности решений задачи об определении коэффициента $g = g(x)$ в случае финального переопределения имеется также в работе [14] (см. также [15]), где основное условие на данные — условие малости временного интервала. В работе [16] требуется выполнение некоторых неравенств, связывающих между собой нормы данных, фактически эти условия есть условия малости данных. Аналогичные условия требуются и в работе [17], где коэффициент g ищется в виде $g(t, x) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x)\Phi_i(t, x)$ с неизвестными функциями $g_i(x)$ и дополнительно задаются значения решения $u(t_i, x)$ в некотором наборе точек $t = t_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Здесь также получены теоремы существования и единственности решений. В работе [18] рассматривается одномерная задача, где коэффициент $g(x)$ определяется по данным Коши на боковой стороне прямоугольника. Отметим также работы [19; 20], где рассматриваются вопросы корректности задачи определения функции $g(x)$ с использованием интегральных условий переопределения. Гораздо больше работ посвящено определению младшего коэффициента g, зависящего от времени. Мы сошлёмся только на работы [21–24], где можно найти библиографию. Сошлёмся также на работы [25; 26], где коэффициент $g = g(t)$ определяется численно, хотя можно отметить, что таких работ очень много. Условия переопределения вида (3) использовались в ряде работ для определения различных параметров в уравнении (см., например, [27]).

Обратные задачи определения параметров (постоянных коэффициентов) в параболических уравнениях ранее изучались (см. работы [28–32], для иных классов уравнений см. [33–35]). Однако в этих работах задача исследовалась с другими условиями переопределения. Предложенная постановка рассматривалась, например, в работе [27] и ряде других [8–10] и кажется нам довольно естественной. Мы не нашли теоретических результатов, посвящённых задаче (1)–(3) в литературе. Наши результаты наиболее близки к результатам работы [17]. В работе основное внимание посвящено условиям существования решения задачи (1)–(3) в классах Соболева. Полученные результаты допускают обобщение в том числе и на квази-

линейный случай и могут послужить основой для создания численного алгоритма. Они основаны на принципе максимума для параболических задач.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определённых на G со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [36]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т. д. стандартные (см. [36; 37]). Если $E=\mathbb{R}$ или $E=\mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q}), C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [38]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J=(0,T)$, положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p(J;W_p^r(G))$. Соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u,v)=\int_G u(x)v(x)dx$ и $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до Γ. Определение границы класса C^s, $s\geqslant 1$, имеется в [38, гл. 1]. Рассматривая задачу (1)–(3), мы предполагаем, что $\Gamma\in C^2$.

Введём обозначения: $Q_\delta(\tau,y)=\{(t,x)\in Q:|x-y|<\delta,|t-\tau|<\delta\}$, $B_\delta(t,y)$ — шар радиуса δ с центром в точке (t,y), то же обозначение используется и для шара меньшей размерности, например, $B_\delta(y)$ — шар радиуса δ с центром в точке $y\in G$.

Оператор L считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\delta_0|\xi|^2\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(t,x)\in Q. \tag{4}$$

Приведём условия на исходные данные. Считаем, что выполнены условия

$$a_i\in L_\infty(Q),\ a_{kl}\in C(\overline{Q})\cap L_\infty(0,T;W_\infty^1(G)),\ \sigma,\gamma_k\in W_p^{s_0,2s_0}(S), \tag{5}$$

где $p>n+2$, $s_0=1/2-1/2p$, $i=1,2,\ldots,n$, $k,l=1,2,\ldots,n$;

$$\begin{gathered}u_0(x)\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G),\ f\in L_p(Q),\Phi_1(t,x)\in C(\overline{Q}),\\ \Phi_1(t,x)\geqslant 0\text{ п.в. (почти всюду) в }Q,\ a_0\in L_p(Q),\ a_0(t,x)\geqslant k\text{ п.в. в }Q\end{gathered} \tag{6}$$

для некоторого числа k;

$$g_0(0,x)=B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ g_0\in W_p^{k_0,2k_0}(S), \tag{7}$$

где $k_0=1/2-1/(2p)$, если $Bu\neq u$, и $k_0=1-1/(2p)$ в противном случае;

$$u_0(x)\geqslant 0\ \forall x\in G,\ f(t,x)\geqslant 0\text{ п.в. в }Q,\ g_0(t,x)\geqslant 0,\ (t,x)\in S. \tag{8}$$

Также предположим, что или $\sigma(t,x)\equiv 1$ и $\gamma_i\equiv 0$, или $\gamma_i\not\equiv 0$ и

$$\sigma(t,x)\geqslant 0\ \forall(t,x)\in\overline{S}. \tag{9}$$

Отметим, что поскольку $\Gamma\in C^2$, то можно сделать замену переменных и свести задачу к случаю, когда $\sigma(t,x)\geqslant\delta_0>0\ \forall(t,x)\in\overline{S}$, где δ — постоянная. Соответствующая замена имеет вид $u=e^{-\lambda\rho(x)}v$, где $\lambda>0$ — достаточно большой положительный параметр и ρ — положительная функция, совпадающая в некоторой окрестности Γ с $\rho(x,\Gamma)$. Свойства функции $\rho(x,\Gamma)$ описаны в [39, §10, гл. 3]. Обозначим через Φ решение задачи (1), (2), где $\alpha=0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(9) *и* $\alpha \geqslant 0$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q)$, *причём справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S)})$$

и неравенства

$$0 \leqslant u(t,x) \leqslant \Phi(t,x). \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \geqslant 0$. Существование и единственность решений задачи (1), (2) вытекает из известных результатов о разрешимости параболических задач. Мы можем сослаться, например, на теорему 2.1 в [40; 41] и на теорему 5.3 в [42]. Отметим, что стандартные результаты (см., например, теорему 10.4 в §10, гл. 7 в [38]) не дают утверждения теоремы, поскольку там требуется, чтобы в последнем включении в (5) пространство Соболева было заменено на пространства Гёльдера. Если $\alpha \geqslant 0$, то легко увидеть, что функции $0, \Phi$ являются соответственно нижним и верхним решением задачи (1), (2) (см. определения в [39]), и тогда, используя принцип максимума (следствие 7.4 в §1, гл. 7 в [39]), получим (10). □

2. Основные результаты

Приведём дополнительные условия вида

$$\Phi(t_1,y_1) > \psi_1 > 0,\ \exists \delta_0, \delta_1 > 0:\ \Phi_1(t,x) \geqslant \delta_1 > 0 \ \text{ в } \ Q_{\delta_0}(t_1,y_1), \tag{11}$$

где δ_0 — положительная постоянная, такая, что $B_{\delta_0}(y_1) \subset G$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4)–(9), (11). *Тогда существует единственное решение задачи* (1)–(3), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\alpha \geqslant 0$, *причём* $0 \leqslant u(t,x) \leqslant \Phi(t,x)$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j(p-1) + \sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ijx_i}\right)\xi_j u + a_0u^2 \geqslant \delta_2(|\xi|^2+u^2),\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

при п.в. $(t,x) \in Q$, где δ_2 — положительная постоянная. Иначе мы сделаем замену переменных $u = ve^{\lambda t}$. Коэффициент a_0 перейдёт в новый коэффициент $a_0 + \lambda$. Используя условие (6), можем выбрать достаточно большой параметр λ, такой, что для нового уравнения условие (12) уже выполнено. Отметим, что $\Phi(t,x) \in C^{1-(n+2)/(2p),2-(n+2)/p}(\overline{Q})$ (см. теоремы вложения в [37, теорема 2.6.6]). Тем же свойством обладает и любое решение задачи (1), (2). В частности, имеем $u \leqslant \Phi \leqslant M$, $M = \|\Phi\|_{C(\overline{Q})}$. Вначале мы покажем некоторые оценки и приведём некоторые свойства решений задачи (1), (2). Легко показать, что $u \to \Phi$ при $\alpha \to 0$. Действительно, пусть u_α — решение задачи (1), (2) с $g = \alpha\Phi_1$. Рассматривая разность $w = \Phi - u_\alpha$, получим, что она удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $-\alpha\Phi_1 u_\alpha$. Тогда из теоремы 1 имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant C_0|\alpha|\|\Phi_1 u_\alpha\|_{L_p(Q)} \leqslant C_1|\alpha|, \tag{13}$$

где $C_1 = C_0\|\Phi_1\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}$, постоянная C_1 не зависит от параметра α. Как уже было отмечено, $w(t,x) \in C^{1-(n+2)/(2p),2-(n+2)/p}(\overline{Q})$ [37, теорема 2.6.6, гл. 7]. Тогда получим оценку $\|w\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c_1\|w\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_1C_1|\alpha| \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Построим функции $\varphi^k(x) \in C_0^\infty(G)$, $\psi_k(t) \in C_0^\infty(0,T)$, такие, что $\varphi^k(x) = 1$ в $B_{\delta_0 r_k}(y_1)$, $\psi_k = 1$ в $B_{\delta_0 r_k}(t_1)$, $\operatorname{supp}\varphi^k \subset B_{r_{k-1}\delta_0}(y_1)$, $\operatorname{supp}\psi_k \subset B_{r_{k-1}\delta_0}(t_1)$, $r_k = 1/2+(2+[p]-k)/(2+2[p])$, для некоторой постоянной $c>0$ справедливо неравенство $|\nabla\varphi^k(x)|^2 \leqslant c\varphi^k(x)$ при всех $x \in G$. Положим $\varphi_k(t,x) = \varphi^k(x)\psi_k(t)$. Умножим уравнение (1) на функцию $\varphi_1|u|^{p-2}u$ и интегрируем по G. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t \int\limits_G \frac{|u|^p}{p}\varphi_1\,dx - \int_G \frac{|u|^p}{p}\varphi_{1t}\,dx + \int\limits_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}(u_{x_i}(p-1)\varphi_1|u|^{p-2} + |u|^{p-2}u\varphi_{1x_i}) + \\ + \left(\sum_{j=1}^n \left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right) u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_1\,dx + \\ + \alpha\int\limits_G \varphi_1\Phi_1|u|^p\,dx = (f, |u|^{p-2}u\varphi_1). \quad (14)$$

Далее мы используем числовое неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (15)$$

Имеем

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}|u|^{p-2}u\varphi_{1x_i}\right| \leqslant \varepsilon|\nabla u|^2|u|^{p-2}\varphi_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}|u|^p,$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное число. Далее в силу условия (12) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}(p-1)\varphi_1|u|^{p-2} + \left(\sum_{j=1}^n\left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_1\,dx \geqslant \\ \geqslant \delta_2\varphi_1(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p),$$

где $\delta_2>0$ — положительная постоянная. Кроме того,

$$|f\varphi_1|u|^{p-2}u| \leqslant |f|^p\varphi_1/(4(\varepsilon\alpha)^{p-1}) + \alpha|u|^p\varphi_1\varepsilon.$$

Интегрируя (14) по t и используя последние три неравенства, взяв $\varepsilon = \min(\delta_1,\delta_2)/4$, получим

$$\int_0^T\int_G \varphi_1(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p)/2 + \alpha\Phi_1|u|^p\varphi_1\,dxdt \leqslant \\ \leqslant \frac{c_4}{\alpha^{p-1}}\|f\|^p_{L_p(Q)} + c_3\int_0^T\int_G |u|^p\,dxdt \leqslant c_3M^pT\mu(G) + \frac{c_4}{\alpha^{p-1}}\|f\|^p_{L_p(Q)} = c_5, \quad (16)$$

где постоянные c_3, c_4 не зависят от постоянной α. Далее мы повторим рассуждения. Умножим уравнение (1) на $\alpha|u|^{p/2}u\varphi_2$ и проинтегрируем по G. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t\int_G \alpha\frac{|u|^p}{p}\varphi_2\,dx - \alpha\int_G\frac{|u|^p}{p}\varphi_{2t}\,dx + \alpha\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}(u_{x_i}\varphi_2|u|^{p-2} + |u|^{p-2}u\varphi_{2x_i}) + \\ + \alpha\left(\sum_{j=1}^n\left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_2\,dx + \\ + \alpha^2\int_G\varphi_2\Phi_1|u|^p\,dx = \alpha(f, |u|^{p-2}u\varphi_2).$$

Имеем

$$\left|\alpha\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}|u|^{p-2}u\varphi_{2x_i}\right| \leqslant \alpha\varphi_2|\nabla u|^2|u|^{p-2}\varepsilon + c(\varepsilon)|u|^p\varphi_1\alpha,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Далее в силу условия (12) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}(p-1)\varphi_2|u|^{p-2} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_2\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \delta_2\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p).$$

Кроме того, $|f\varphi_2|u|^{p-2}u| \leqslant |f|^p\varphi_2/(4(\varepsilon_1\alpha^2)^{p-1}) + \alpha^2|u|^p\varphi_2\varepsilon_1$. Интегрируя (14) по t и используя последние три неравенства, взяв достаточно малые параметры $\varepsilon, \varepsilon_1$, получим

$$\int_0^T\int_G \alpha\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_2\alpha^2\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T\int_G c_7\|f\|^p\,dxdt + \int_0^T\int_{G_2} c_8\alpha|u|^p\varphi_1\,dxdt \leqslant c_8.$$

Для оценки последнего слагаемого используем оценку (16). Получим неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_G \alpha\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_2\alpha^2\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_9(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p).$$

Далее повторяем рассуждения. Предположим, что мы уже получили оценку

$$\int_0^T\int_G \alpha^{k-1}\varphi_k(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_k\alpha^k\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_9,$$

где постоянная c_9 не зависит от u, а зависит лишь от постоянной M и данных задачи. Последующая оценка получается повторением рассуждений с использованием умножения (1) на функцию $\alpha^k|u|^{p-2}u\varphi_{k+1}$ и интегрированием по области G. Рассуждения повторяются для $k = 1, 2, \ldots, [p]$. Если $p = [p]$, то рассуждения заканчиваются. Если нет, то мы получим оценку

$$\int_0^T\int_G \alpha^{[p]-1}\varphi_{[p]}(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_{[p]}\alpha^{[p]}\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_{10},$$

равномерную по параметру $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное положительное число. Умножим уравнение (1) на $\alpha^{p-1}|u|^{p-2}u\varphi_{[p]+1}$ и повторим рассуждения. Окончательная оценка имеет вид

$$\int_0^T\int_G \alpha_l^{p-1}\varphi_{[p]+1}(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_{[p]+1}\alpha^p\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_{11},$$

где постоянная c_{11} не зависит от $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное фиксированное положительное число. Она имеет вид $c_{12}(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p)$ (напомним, что $M = \|u\|_{L_\infty(Q)}$), где постоянная c_{12} зависит от данных задачи. Поскольку $\Phi_1 \in L_\infty(Q)$, из этой оценки вытекает неравенство

$$\alpha^p\|\varphi_{[p]+1}\Phi_1 u\|^p_{L_p(Q)} \leqslant c_{13}(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p), \tag{17}$$

где постоянная c_{13} не зависит от $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное фиксированное положительное число.

Далее, возьмём функции $\varphi(x) = \varphi_{[p]+2}(x)$, $\psi(t) = \psi_{[p]+2}(t)$ со свойствами: $\varphi_{[p]+2}(x) \in C^2(\overline{G})$, $\varphi_{[p]+2}(x) = 1$ в $B_{\delta_0 r_{[p]+2}}(y_1)$, $\operatorname{supp}\varphi_{[p]+2} \subset \overline{B_{r_{[p]+1}\delta_0}(y_1)}$, для некоторой постоянной $c > 0$ справедливы неравенства $|\nabla\varphi(x)|^2 \leqslant c\varphi(x)$ для всех $x \in G$ и $|\nabla_x\varphi| \leqslant c\varphi/\rho(x)$, где c — некоторая постоянная и $\rho(x) = \rho(x, \partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1))$. Эти условия означают, что в некоторой окрестности границы $\partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$ функция $\varphi_{[p]+2}(x)$ ведёт себя как $\rho^\beta(x)$ ($\beta \geqslant 2$), $x \in B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$, и положительна в $B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$. Очевидно такие функции существуют. Будем считать, что $\varphi_{[p]+2}(x) \equiv \rho^2(x)$ на некотором множестве $U = \{x \in B_{\delta_0 r_{1+[p]}} : \rho(x) < \varepsilon\}$, т. е. для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$ на этом множестве имеет место неравенство $c_1\rho^2 \leqslant \varphi(x) \leqslant c_2\rho^2$. Положим $\Psi(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$. Умножим уравнение (1) на Ψ и преобразуем его следующим образом:

$$v_t - Lv = -\alpha\Psi\Phi_1 v + \Psi f + \Psi_t u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Psi_{x_i}u_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Psi_{x_ix_j}u + \sum_{i=1}^{n} a_i\Psi_{x_i}u,$$

где $v = \Psi u$. Используя оценку из теоремы 1 и оценку (17), получим

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{14}(\|f\|_{L_p(Q)} + \||\nabla_x\Psi||\nabla u|\|_{L_p(Q)} + M). \tag{18}$$

Имеем неравенство $|\nabla_x\Psi||\nabla u| \leqslant \frac{|\nabla_x\Psi|}{\Psi}|\nabla(\Psi u)| + \frac{|\nabla_x\Psi|^2}{\Psi}u$. Используя свойства функции Ψ, получим $|\nabla_x\Psi||\nabla u| \leqslant \frac{c_{15}}{\rho}|\nabla(\Psi\nabla u)| + c_{16}|u|$. Тогда из неравенства (18) получим оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{17}(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\rho^{-1}|\nabla_x v|\|_{L_p(Q)} + M). \tag{19}$$

Определим весовые пространства Соболева с нормами

$$\|v\|^p_{H_p^2\left(G_{\delta_0 r_{1+[p]}}\right)} = \int_{G_{\delta_0 r_{1+[p]}}} \sum_{i,j=1}^{n} |v_{x_ix_j}|^p + \rho^{-p}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^p + \rho^{-2p}|v|^p\,dx,$$

$$\|v\|^p_{H_p^1\left(G_{\delta_0 r_{1+[p]}}\right)} = \int_{G_{\delta_0 r_{1+[p]}}} \rho^{-p}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^p + \rho^{-2p}|v|^p\,dx.$$

По построению при п. в. t функция v и её производные обращаются в ноль на $\partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}$, следовательно, норма в пространстве $H_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})$ эквивалента норме $W_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})$ (теорема 3.2.6 в [36]). Тогда по теореме 3.4.2 (f) из [36] справедливо неравенство

$$\|v\|_{H_p^1(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})} \leqslant c\|v\|^{1/2}_{H_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})}\|\rho^{-2}v\|^{1/2}_{L_p(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})}.$$

Используя это неравенство и неравенства (15), (19), получим

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{18}\varepsilon_2\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c(\varepsilon_2)\|u\|_{L_p(Q)} + c_{14}(\|f\|_{L_p(Q)} + M).$$

Выбрав $\varepsilon_2 = 1/2c_{18}$, получим неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{19}(\|f\|_{L_p(Q)} + M). \tag{20}$$

Из оценок (20), (17) вытекает оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} + \alpha\|u\|_{L_p(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{20}(\|f\|_{L_p(Q)} + M). \tag{21}$$

Далее используем интерполяционные неравенства. Отметим, что $W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)) \subset C^{\alpha,2\alpha}(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})$, $\alpha = s-(n+2)/(2p)$ [37, теорема 2.6.6, гл. 7]). Таким образом, имеем неравенство

$$\|u\|_{C(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})} \leqslant c_{21}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))},\ (n+2)/2p < s < 1.$$

С помощью интерполяционного неравенства (см. [37, следствие 5.7.3, гл. 7]) и неравенства (21) получим

$$\|u\|_{W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{22}\|u\|^s_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))}\|u\|^{1-s}_{L_p(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{23}\alpha^{s-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\|u\|_{C(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})} \leqslant c_{24}\alpha^{s-1} \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty. \tag{22}$$

Рассмотрим уравнение $R(\alpha) = u(\alpha,t_1,y_1) - \psi_1 = 0$, где функция $u(\alpha,t,x)$ есть решение задачи (1), (2) с $g = \alpha\Phi_1$. Используя теорему 1 и вложение $W_p^{1,2}(Q) \subset C(\overline{Q})$, нетрудно показать, что величина $u(\alpha,t_1,y_1)$ непрерывно зависит от параметра α. Найдём параметр α_{01}, такой, что $\psi_1 < u(\alpha_{01},t_1,y_1) \leqslant \Phi(t_1,y_1)$. Это возможно в силу неравенства (13). Далее найдём такой параметр α_{02}, что для соответствующего решения $u(\alpha_{02},t,x)$ задачи (1), (2) с $g = \alpha_{02}\Phi_1$ выполнено $0 \leqslant u(\alpha_{02},t_1,y_1) < \psi_1$. Такое α_{02} найдётся в силу (22). Тогда $R(\alpha_{01}) > 0$, $R(\alpha_{02}) < 0$. Следовательно, найдётся число α_0, такое, что $R(\alpha_0) = 0$. Отсюда вытекает, что пара $(u(\alpha_0,t,x),\alpha_0)$ есть решение задачи.

Покажем единственность решения задачи. Рассмотрим уравнение $u(\alpha,t_1,y_1) = \psi_1$. Поскольку уравнение (1) гладким образом зависит от параметра α, то и решение в норме пространства $W_p^{1,2}(Q)$ также обладает этим свойством, в частности, функция $u(\alpha,t_1,y_1)$ бесконечно дифференцируема по параметру α. Более того, она аналитична по параметру α. Действительно, пусть $v = u - \Phi$. Имеем

$$Mv + \alpha\Phi_1 v = -\alpha\Phi_1\Phi, \quad v|_{t=0} = 0, \quad Bv|_S = 0.$$

Тогда $v = -(M+\alpha\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi_1\Phi$. Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная точка. Далее имеем $v = (M+\alpha_0\Phi_1+(\alpha-\alpha_0)\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi_1\Phi$. Откуда

$$v(t_1,y_1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\alpha-\alpha_0)^k[(M+\alpha_0\Phi_1)^{-1}\Phi_1]^k(M+\alpha_0\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi|_{t=t_1,x=y_1}.$$

Используя теорему 1, легко показать, что этот ряд сходится в некоторой окрестности точки α_0 в норме пространства $W_p^{1,2}(Q)$. Утверждение справедливо как для вещественных, так и для комплексных чисел α. Таким образом, $u(\alpha,t,x)$ аналитична по α в любой точке $(t,x) \in Q$. Из внутренней теоремы единственности для аналитических функций заключаем, что нули функции $u'(\alpha,t_1,y_1)$ не могут иметь конечной предельной точки, если функция $u(\alpha,t_1,y_1)$ не постоянная. Однако последнее не выполнено, поскольку по доказанному имеются точки α_{01},α_{02}, где значения $u(\alpha_{0i},t_1,y_1)$ различны. С другой стороны, функция $u'(\alpha,t,x)$ есть решение задачи

$$(M+\alpha\Phi_1)u' = -\Phi_1 u, \quad u'|_{t=0} = 0, \quad Bu'|_S = 0.$$

Используя принцип максимума (следствие 7.4 в §1, гл. 7 в [39]), получим $u' \leqslant 0$ в Q. Тогда функция $u(\alpha,t_1,y_1) - \psi_1$ не может иметь более одного нуля. Мы показали единственность решения. □

Список литературы

1. **Marchuk G. I.** Mathematical Models in Environmental Problems. Amsterdam : Elsevier Science Publ., 1986.
2. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York : Marcel Dekker, Inc., 1999.
3. **Ozisik M. N., Orlande H. R. B.** Inverse Heat Transfer. New York : Taylor & Francis, 2000.
4. **Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненарокомов А. В.** Обратные задачи сложного теплообмена. М. : Янус-К, 2009.
5. **Borodulin A. I., Desyatkov B. D., Makhov G. A., Sarmanaev S. R.** Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer // Russian Meteorology and Hydrology. 1997. No. 1. P. 49–55.
6. **Glagolev M. V., Sabrekov A. F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2012. Vol. 7, no. 1. P. 81–101.
7. **Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Terentyeva I. E.** Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations // Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics". Ed. V. D. Lakhno. Vol. 7. Pushchino : IMPB RAS, 2018. Article No. e94.
8. **Murguia-Flores F., Arndt S., Ganesan A. L., Murray-Tortarolo G., Hornibrook E. R. C.** Soil methanotrophy model (MeMo v1.0): A process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil // Geoscientific Model Development. 2018. Vol. 11. P. 2009–2032.
9. **Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Terentyeva I. E., Mochenov S. Yu.** Identification of the methane consumption rate in soils by the inverse problem method. Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics. Ed. V. D. Lakhno. Vol. 7. Pushchino : IMPB RAS, 2018. P. 951–955.
10. **Сабреков А. Ф., Глаголев М. В., Терентьева И. Е., Моченов С. Ю.** Идентификация скорости потребления метана в почвах методом обратной задачи // Математическое моделирование в экологии: материалы 6-й конф. Пущино, 2019. С. 179–180.
11. **Prather M. J., Holmes C. D.** Overexplaining or underexplaining methane's role in climate change // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2017. Vol. 114. P. 5324–5326.
12. **Прилепко А. И., Соловьев В. В.** О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 136–143.
13. **Prilepko A. I., Kostin A. B., Solov'ev V. V.** Inverse source and coefficient problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 237, no. 3. P. 576–594.
14. **Choulliy M.** Inverse problem for a semilinear parabolic equation // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1123–1132.
15. **Choulliy M., Yamamoto M.** Generic well-posedness of an inverse parabolic problem — the Hölder-space approach // Inverse Problems. 1996. Vol. 12. P. 195–205.
16. **Kozhanov A. I.** Parabolic equations with an unknown absorption coefficient // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 74, no. 1. P. 573–576.
17. **Кожанов А. И.** Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 13. С. 5–19.
18. **Hao D. N.** A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equation and related inverse problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 295–315.

19. **Beretta E.** Identifying a space dependent coefficient in a reaction-diffusion equation // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 5, no. 2. P. 285–296.
20. **Камынин В. Л.** Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217.
21. **Пятков С. Г., Сафонов Е. И.** О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.
22. **Pyatkov S. G.** Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2022. Vol. 9, no. 2. P. 52–66.
23. **Pyatkov S., Pronkina T.** Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters from boundary integral data // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 282, no. 2. P. 241–252.
24. **Pyatkov S. G., Soldatov O. A.** Inverse problems of recovering lower-order coefficients from boundary integral data // Axioms. 2025. Vol. 14, no. 2. P. 116.
25. **Вабищевич П. Н., Васильев В. И.** Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 455, № 3. С. 258–260.
26. **Hussein M. S., Lesnic D.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2016. Vol. 17, no. 5–6. P. 401–411.
27. **Mamonov A. V., Tsai Y-H. R.** Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // Inverse Problems. 2013. Vol. 29, no. 3. P. 035009.
28. **Lorenzi A.** Recovering two constants in a linear parabolic equation // Journal of Physics: Conference Series. 2007. Vol. 73. P. 012014.
29. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 5, no. 3. P. 695–714.
30. **Mola G.** Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 14–28.
31. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equations // Inverse Problems. 2012. Vol. 28, no. 7. P. 075006.
32. **Кожанов А. И.** Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии // Мат. заметки. 2019. Т. 106, № 3. С. 395–408.
33. **Lorenzi A., Paparoni A.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Probl. 1993. Vol. 1, no. 4. P. 331–348.
34. **Lyubanova A. S.** Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // Applicable Analysis. 2008. Vol. 87, no. 10–11. P. 1121–1128.
35. **Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р.** Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфим. мат. журн. 2017. Т. 9, № 1. С. 63–74.
36. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980.
37. **Amann H.** Linear and Quasilinear Parabolic Problems, II. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019.
38. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.
39. **Liebermann G. M.** Second Order Parabollic Differential Equations. Singapure : World Scientific Publ., 2005.
40. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Mathematische Zeitschrift. 2007. Vol. 257, no. 1. P. 193–224.

41. **Meyries M., Schnaubert R.** Maximal regularity with temporal weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions // Mathematische Nachrichten. 2012. Vol. 285, no. 8–9. P. 1032–1051.
42. **Hummel F., Lindemulder N.** Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces // Potential Analysis. 2022. Vol. 57. P. 601–669.

Поступила в редакцию 26.05.2025.
После переработки 05.08.2025.

Сведения об авторах

Тукмачева Юлия Андреевна, преподаватель, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; e-mail: y_tukmacheva@ugrasu.ru.

Пятков Сергей Григорьевич, профессор, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 701–714.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-701-714

IDENTIFICATION OF THE ABSORPTION PARAMETER IN CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Ya.A. Tukmacheva[a], S.G. Pyatkov[b]

Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia
[a] y_tukmacheva@ugrasu.ru, [b] s_pyatkov@ugrasu.ru

The correctness in Sobolev spaces of inverse problems of determining the constant at the lowest coefficient (absorption coefficient) is considered in a parabolic equation. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved. The proof is based on the obtained a priori estimates and properties of solutions to parabolic problems. The method used is constructive and based on the proposed approach it is possible to construct numerical methods for solving the problem.

Keywords: *inverse problem, absorption parameter, parabolic equation, heat and mass transfer.*

References

1. **Marchuk G.I.** *Mathematical Models in Environmental Problems.* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1986.
2. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York, Marcel Dekker, Inc., 1999.
3. **Ozisik M.N., Orlande H.R.B.** *Inverse Heat Transfer.* New York, Taylor & Francis, 2000.
4. **Alifanov O.M., Artyukhov E.A., Nenarokomov A.V.** *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* [Inverse problems in the study of complex heat transfer]. Moscow, Janus-K, 2009. (In Russ.).
5. **Borodulin A.I., Desyatkov B.D., Makhov G.A., Sarmanaev S.R.** Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1997, no. 1, pp. 49–55.
6. **Glagolev M.V., Sabrekov A.F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2012, vol. 7, no. 1, pp. 81–101.
7. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E.** Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations. *Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics"*, ed. V.D. Lakhno, vol. 7. Pushchino, IMPB RAS, 2018. P. e94.
8. **Murguia-Flores F., Arndt S., Ganesan A.L., Murray-Tortarolo G., Hornibrook E.R.C.** Soil methanotrophy model (MeMo v1.0): a process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil. *Geoscientific Model Development*, 2018, vol. 11, pp. 2009–2032.
9. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E., Mochenov S.Yu.** Identification of the methane consumption rate in soils by the inverse problem method. *Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics"*, ed. V.D. Lakhno, vol. 7. Pushchino, IMPB RAS, 2018. Pp. 951–955.

The work was financially supported by the Russian Science Foundation and the government of the Khanty-Mansiysk Autonomous Okrug —Yugra (grant No. 25-11-20026).

10. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E.** *Modelirovaniye potrebleniya metana v avtomorfnykh pochvakh: vliyaniye mekhanizma perenosa i chislennosti metanotrofov* [Modeling of methane consumption in automorphic soils: influence of transport mechanism and number of methanotrophs]. Materials of 6th conference "Mathematical modeling in ecology", Pushino, 2019. Pp. 179–180. (In Russ.).
11. **Prather M.J., Holmes C.D.** Overexplaining or underexplaining methane's role in climate change. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017, vol. 114, pp. 5324–5326.
12. **Prilepko A.I., Solov'ev V.V.** *O razreshimosti obratnykh krayevykh zadach opredeleniya koeffitsienta pered mladshey proizvodnoy v parabolicheskom uravnenii* [On solvability of inverse boundary value problems of recovering a coefficient at lower-order derivative in a parabolic equation], *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1987, vol. 23, no. 1, pp. 136–143. (In Russ.).
13. **Prilepko A.I., Kostin A.B., Solov'ev V.V.** Inverse source and coefficient problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 237, no. 3, pp. 576–594.
14. **Choulliy M.** Inverse problem for a semilinear parabolic equation. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, pp. 1123–1132.
15. **Choulliy M., Yamamoto M.** Generic well-posedness of an inverse parabolic problem — the Hölder-space approach. *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 195–205.
16. **Kozhanov A.I.** Parabolic equations with an unknown absorption coefficient. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, no. 1, pp. 573–576.
17. **Kozhanov A.I.** *Parabolicheskiye uravneniya s neizvestnym koeffitsientom pogloshcheniya* [Parabolic equations with an unknown absorption coefficient]. *Bulletin of Chelyabinsk State University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, no. 13, pp. 5–19. (In Russ.).
18. **Hao D.N.** A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equation and related inverse problems. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, pp. 295–315.
19. **Beretta E.** Identifying a space dependent coefficient in a reaction-diffusion equation. *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 285–296.
20. **Kamynin V.L.** The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 205–213.
21. **Pyatkov S.G., Safonov E.I.** On some classes of linear inverse problems for parabolic systems of equations. *Siberian Electronic Reports*, 2014, vol. 11, pp. 777–799.
22. **Pyatkov S.G.** Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 52–66.
23. **Pyatkov S., Pronkina T.** Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters from boundary integral data. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 282, no. 2, pp. 241–252.
24. **Pyatkov S.G., Soldatov O.A.** Inverse problems of recovering lower-order coefficients from boundary integral data. *Axioms*, 2025, vol. 14, no. 2, p. 116.
25. **Vabishevich P.N., Vasil'ev V.I.** Numerical identification of the lower-order coefficient of a parabolic equation. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 455, no. 3, pp. 258–260.
26. **Hussein M.S., Lesnic D.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2016, vol. 17, no. 5–6, pp. 401–411.
27. **Mamonov A.V., Tsai Y-H.R.** Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems. *Inverse Problems*, 2013, vol. 29, no. 3, p. 035009.
28. **Lorenzi A.** Recovering two constants in a linear parabolic equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2007, vol. 73, p. 012014.

29. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces. *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 695–714.
30. **Mola G.** Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equation in a Hilbert spaces. *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 14–28.
31. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equations. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 7, p. 075006.
32. **Kozhanov A.I.** Inverse problems of finding the absorption parameter in the diffusion equation. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, no. 3, pp. 378–389.
33. **Lorenzi A., Paparoni A.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 4, pp. 331–348.
34. **Lyubanova A.S.** Identification of a constant coefficient in an elliptic equation. *Applicable Analysis*, 2008, vol. 87, no. 10–11, pp. 1121–1128.
35. **Kozhanov A.I., Safiullova R.R.** *Opredeleniye parametrov v telegrafnom uravnenii* [Identification of parameters in the telegraph equation]. *Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 63–74. (In Russ.).
36. **Triebel H.** *Interpolation theory. Functional spaces. Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
37. **Amann H.** *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, II. Cham, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
38. **Ladyzhenskaya O.A. Uraltseva N.N., Solonnikov V.A.** *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence, American Mathematical Society, 1968.
39. **Liebermann G.M.** *Second Order Parabollic Differential Equations*, Singapure, World Scientific Publ., 2005.
40. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data. *Mathematische Zeitschrift*, 2007, vol. 257, no. 1, pp. 193–224.
41. **Meyries M., Schnaubert R.** Maximal regularity with temporal weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 2012, vol. 285, no. 8–9, pp. 1032–1051.
42. **Hummel F., Lindemulder N.** Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces. *Potential Analysis*, 2022, vol. 57, pp. 601–669.

Article received 26.05.2025.
Corrections received 05.08.2025.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 715–732.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-715-732

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

I.U. Khaydarov[a], A.O. Mamanazarov[b]

Fergana State University, Fergana, Uzbekistan
[a] *ibrohim0902@gmail.com,* [b] *mamanazarovaz1992@gmail.com*

We formulate and study a nonlocal problem with a special matching conditions and shift conditions for a parabolic-hyperbolic equation. Using the theory of integral equations we established the unique solvability of the considered problem.

Keywords: *nonlocal problem, parabolic-hyperbolic equation, method of integral equations.*

1. Introduction

The interest that arose in the first quarter of the last century in the theory of equations of mixed type has not diminished to this day. On the contrary, it is intensively developing in various directions, both in terms of the equations themselves and the range of problems considered for them, as well as the domain of consideration. While initially the focus was on problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type, since the 1960s, research has expanded to include equations of mixed elliptic-parabolic and parabolic-hyperbolic types.

The necessity of considering conjugation problems, where a parabolic equation is defined on one part of the domain and a hyperbolic equation on another, was first pointed out by I.M. Gelfand [1]. He discusses an example related to the motion of gas in a channel surrounded by a porous medium: in this case, the gas motion in the channel is described by the wave equation, while outside the channel, it is described by the diffusion equation. Y.A. Ufliand, in his article [2], describes the problem of the propagation of electric oscillations in composite lines, where on the section $0 < x < l$ of the semi-infinite line, losses are neglected, and the rest of the line is considered as a cable without leakage. As a result, he arrives at a problem for a parabolic-hyperbolic equation in the first quadrant of the plane.

Further research has also shown that many mathematical models of heat and mass transfer in capillary-porous media [3], electromagnetic field propagation in heterogeneous media [4], temperature field formation [5], and the motion of viscoelastic and viscous fluids [6] reduce to boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type.

The first works dedicated to the study of boundary and initial-boundary problems for parabolo-hyperbolic equations are [7–10]. However, recently, researchers have increasingly focused on the formulation and study of non-local boundary problems with conditions similar to Frankl's conditions [11], Bitsadze–Samarski's conditions [12], shift conditions [13; 14], and integral conditions [15; 16]. For more information about non-local problems for equations of both integer and fractional order, we refer the reader to the references [17–20] and the references therein.

The relevance of studying such problems can be justified both by the internal need for theoretical generalizations of classical boundary problems for partial differential equations and by their practical applications. Moreover, the naturalness of formulating

problems where the boundary conditions represent relationships between the values of the unknown function computed at different points on the boundary was noted as early as 1896 by V.A. Steklov. Such boundary conditions also arise in mathematical modeling of problems in gas dynamics, plasma theory, laser radiation, and cell proliferation processes [21].

2. Preliminaries

In this section, we give the definitions and some properties of the some operators which will be used the throughout of the paper.

Let $\Gamma(z)$ be the Euler gamma function, and $\omega = \text{const} \neq -1, -2, \ldots$ Then the following series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\omega}}{k!\ \Gamma(k+\omega+1)}$$

converges for every $z \in \mathbb{R}$. Typically, the sum of this series is denoted by $J_\omega(z)$ and is called the Bessel function of the first kind of order ω.

The function $J_\omega(z)$ has the following integral representation [22]:

$$J_\omega(z) = \frac{(z/2)^\omega}{\sqrt{\pi}\Gamma(\omega+1/2)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\omega-(1/2)} \cos(\xi z)\, d\xi, \quad \operatorname{Re}\omega > -1/2. \tag{1}$$

The function defined by the equality $\bar{J}_\omega(z) = \Gamma(\omega+1)(z/2)^{-\omega} J_\omega(z)$ is called the Bessel–Clifford function. It is evident that $\bar{J}_\omega(z)$ is an analytic function and $\bar{J}_\omega(0) = 1$.

Let a, b, m be be some real numbers, and λ be, in general, a complex number, where $a < b < +\infty$ and $m \in [a, b]$. Consider the following operators, introduced and studied in [23]:

$$A_{mx}^{n,\lambda}\left[f(x)\right] \equiv f(x) - \int_m^x f(t) \left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda\sqrt{(x-m)(x-t)}\,]dt, \tag{2}$$

$$B_{mx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) + \int_m^x f(t) \left(\frac{x-m}{t-m}\right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial x} J_0[\lambda\sqrt{(t-m)(t-x)}\,]dt, \tag{3}$$

$$C_{mx}^{0,\lambda}\left[g(x)\right] \equiv \operatorname{sign}(x-m) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_m^x g(t) \bar{J}_1\left[\lambda(x-t)\right] dt \right\}, \tag{4}$$

where $n = 0, 1$, $f(x)$ and $g(x)$ are given functions, $f(x) \in C\left(a,b\right) \cap L\left(a,b\right)$ and $g(x) \in C^1\left(a,b\right) \cap L\left(a,b\right)$, with $L(a,b)$ denoting the space of integrable functions on (a,b).

In the work [23], the validity of the following theorems was proved:

Theorem 1. [23]. *If $f(x) \in C(a,b) \cap L(a,b)$, then for all $m \in [a,b]$ and $x \in (a,b)$, the following equalities hold:*

$$A_{mx}^{n,\lambda}\left\{B_{mx}^{n,\lambda}\left[f(x)\right]\right\} = f(x), \quad B_{mx}^{n,\lambda}\left\{A_{mx}^{n,\lambda}\left[f(x)\right]\right\} = f(x). \tag{5}$$

Theorem 2. [23]. *If $f(x) \in C(a,b) \cap L(a,b)$, then for all $m \in [a,b]$ and $x \in (a,b)$, the following equality holds:*

$$A_{mx}^{0,\lambda}\left\{\int_m^x B_{mt}^{1,\lambda}\left[f(t)\right] dt\right\} = \int_m^x f(t) J_0\left[\lambda(x-t)\right] dt. \tag{6}$$

Theorem 3. [23]. *If $f(x) \in C^1(a,b) \cap L(a,b)$, then for all $m \in [a,b]$ and $x \in (a,b)$, the following equality holds:*

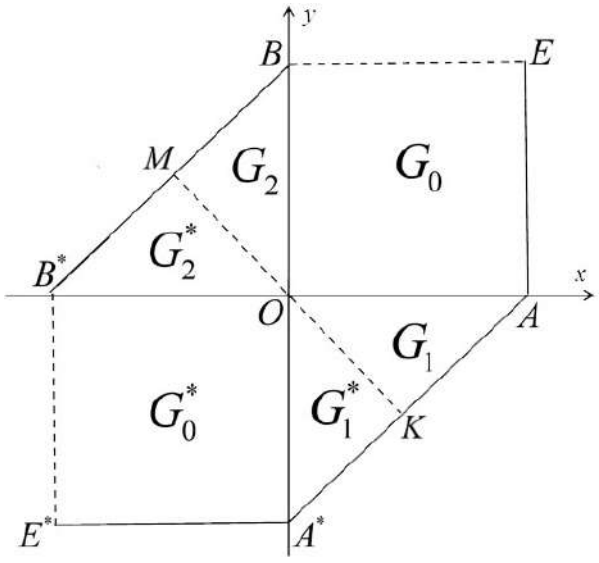
$$A_{mx}^{1,\lambda}\left\{\frac{d}{dx}B_{mx}^{0,\lambda}[f(x)]\right\} = \operatorname{sign}(x-m)C_{mx}^{0,\lambda}[f(x)]\,. \tag{7}$$

Theorem 4. [23]. *If $f(x) \in C^1(a,b) \cap L(a,b)$, then the following equality holds:*

$$\int_k^x f(t)\,J_0\left[\lambda_2\sqrt{(t-k)(t-x)}\right]dt = \int_k^x B_{kx}^{1,\lambda}[f(t)]\,dt, \quad k,\lambda = \text{const}. \tag{8}$$

3. Formulation of the problem

Let G be a finite, simply connected domain in the plane xOy, bounded by the following line segments: $AA^* = \{(x,y) : x - y = 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A^*E^* = \{(x,y) : y = -1, -1 \leqslant x \leqslant 0\}$, $E^*B^* = \{(x,y) : x = -1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$, $B^*B = \{(x,y) : x - y = -1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $BE = \{(x,y) : y = 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $EA = \{(x,y) : x = 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.



Let us introduce notations: $D = G \cap (x+y>0)$, $G_0 = D \cap (x>0) \cap (y>0)$, $G_1 = D \cap (y<0)$, $G_2 = D \cap (x<0)$, D^* and the domains G_0^*, G_1^*, G_2^*, symmetric to the domains D and G_0, G_1, G_2 respectively, with respect to the line segment $MK = \{(x,y) : x + y = 0, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$;

$$\theta_0(t) = \theta_0(t/2, -t/2), \quad \theta_1(t) = \theta_1((t+1)/2, -(t-1)/2),$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(-t/2, t/2), \quad \theta_3(t) = \theta_3((t-1)/2, -(t+1)/2).$$

In the domain G we consider the following equation

$$Lu(x,y) = 0, \tag{9}$$

where

$$L \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - H(-xy)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - H(xy)\dfrac{\partial}{\partial y} - \lambda^2(\operatorname{sign} y) & in \;\; D \setminus (xy=0), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - H(-xy)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + H(xy)\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda^2(\operatorname{sign} x) & in \;\; D^* \setminus (xy=0), \end{cases}$$

λ is a given real number, $H(z)$ is Heaviside function.

Equation (9) in the domain G belongs to mixed type, specifically, in the domains G_0, G_0^*, the equation is of parabolic type, and in the domains G_j, G_j^*, where $j = 1, 2$, the equation is of hyperbolic type. The segments $B^*A = \{(x,0) : -1 < x < 1\}$ and $A^*B = \{(0,y) : -1 < y < 1\}$ are the lines of change of type, MK is the line of discontinuity of the last coefficient of the equation.

Definition 1. A regular solution in the domain $D(D^*)$ of equation (9) will be understood as a function

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(G_0) \cap C^{2,2}_{x,y}(G_1 \cup G_2)$$

$$\left[u(x,y) \in C(\overline{D^*}) \cap C^{1,2}_{x,y}(G_0^*) \cap C^{2,2}_{x,y}(G_1^* \cup G_2^*)\right],$$

which satisfies equation (9) in the domains G_0, G_1 и G_2 (G_0^*, G_1^* и G_2^*) and at the type-changing lines the following continuous gluing conditions

$$u(t,+0) = u(t,-0), \quad u(+0,t) = u(-0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 0),$$

$$u_y(t,+0) = u_y(t,-0), \quad u_x(+0,t) = u_x(-0,t), \quad 0 < t < 1 \quad (-1 < t < 0)$$

and such that the functions $u_x(t,0)$, $u_y(t,0)$, $u_x(0,t)$ and $u_y(0,t)$ are bounded as $t \to 0$ and $t \to 1$ ($t \to -1$ and $t \to 0$).

In the domain G, for equation (9), we will study the following problem:

Problem H. Find a function $u(x,y)$ with the following properties:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}, \bar{D}^*\right) \cap C^1\left(G \backslash MK\right)$ is a regular solution in the domains D and D^* of the equation (9);

2) on the segment $\overline{MK}$ the following matching conditions are satisfied:

$$\lim_{y \to -x+0} u(x,y) = q \lim_{y \to -x-0} u(x,y) + p_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \tag{10}$$

$$\lim_{x \to -y+0} u(x,y) = q \lim_{x \to -y-0} u(x,y) + p_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1/2; \tag{11}$$

3) $u(x,y)$ satisfies the following boundary conditions:

$$u|_{\overline{AE}} = \varphi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{12}$$

$$u|_{\overline{A^*E^*}} = \varphi^*(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{13}$$

$$a_1(y) A^{0,\lambda}_{0y}\{u[\theta_2(y)]\} + b_1(y) A^{0,\lambda}_{-1y}\{u[\theta_1(y)]\} + c_1(y) u(0,y) = d_1(y), \quad (0,y) \in \overline{A^*O}, \tag{14}$$

$$a_2(y) A^{0,\lambda}_{0y}\{u[\theta_2(y)]\} + b_2(y) A^{0,\lambda}_{1y}\{u[\theta_3(y)]\} + c_2(y) u(0,y) = d_2(y), \quad (0,y) \in \overline{OB}, \tag{15}$$

where $q \neq 0$ is a given real number, $\varphi(y)$, $\varphi^*(x)$, $p_j(t)$, $a_j(y)$, $b_j(y)$, $c_j(y)$, $d_j(y)$ ($j = 1,2$) are given functions such that $\varphi(y)$, $\varphi^*(x)$ is continuously differentiable, and $p_j(t)$, $a_j(y)$, $b_j(y)$, $c_j(y)$, $d_j(y)$ are twice continuously differentiable functions on their domain of the definitions, and $a^2{}_j([(-1)^j y]) + b^2{}_j([(-1)^j y]) + c^2{}_j([(-1)^j y]) \neq 0$, $y \in [0,1]$, $j = 1,2$; $A^{0,\lambda}_{0y}$ and $A^{0,\lambda}_{1y}$ are the operators defined by (2).

We will assume that the given functions satisfy the following conditions:

$$\left.\begin{gathered} b_j(0) = 0, \quad a_j[(-1)^j] = 0, \quad j = 1,2; \quad a_1(y) \neq b_1(y), \ y \in [-1,0]; \\ d_2(0)[a_2(0) + c_2(0)]^{-1} - q d_1(0)[a_1(0) + c_1(0)]^{-1} = p_1(0) = p_2(0), \\ d_1(-1)[b_1(-1) + c_1(-1)]^{-1} = \varphi^*(0); \end{gathered}\right\} \tag{16}$$

$$\alpha_j(x) \neq 0, \ \beta'_j(x) \leqslant 0, \ \gamma'_j(x) \geqslant 0, \ x \in [0,1], \ j = 1,2, \tag{17}$$

where

$$\alpha_j(x) = a_j\left[(-1)^j x\right] + b_j\left[(-1)^j x\right] + 2c_j\left[(-1)^j x\right],$$

$$\beta_j(x) = a_j\left[(-1)^j x\right] / \alpha_j(x), \quad \gamma_j(x) = b_j[(-1)^j x] / \alpha_j(x).$$

4. Auxiliary problem Γ

In the study of the problem H, the problem Γ is essentially used, which is the determination of the regular solution in the domain D of the equation (9) that satisfies the conditions (12), (15), and

$$a_1(-x)\,A_{0x}^{0,\lambda}\{u[\theta_0(x)]\}+b_1(-x)\,A_{1x}^{0,\lambda}\{u[\theta_1(x)]\}+$$
$$+c_1(-x)\,u(x,0)=d_0(x),\ (x,0)\in OA, \tag{18}$$

where $d_0(x)$ is a given twice differentiable function.

Let $u(x,y)$ be a solution of Problem Γ. Let us introduce the notations

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ u_y(x,0)=\nu_1(x),\ 0<x<1;$$
$$u(0,y)=\tau_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1;\ u_x(0,y)=\nu_2(y),\ 0<y<1.$$

We assume that $\tau_j(z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu_j(z)\in C^1(0,1)$, and $\tau_j'(z)$ and $\nu_j(z)$ are bounded as $z\to 0$ and $z\to 1$, where $j=1,2$. If we assume that $\tau_j(z)$, $\nu_j(z)$ $(j=1,2)$ are temporarily known functions, then the solution to the equation (9) in the domains G_1 and G_2 can be represented in the following forms [4]

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)J_0\left[\lambda_2\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]dt+$$
$$+\frac{1}{4}\lambda_2^2 y\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1(t)\ \bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\ dt,\quad (x,y)\in G_1; \tag{19}$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_2(y+x)+\tau_2(y-x)]+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)J_0\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]\ dt+$$
$$+\frac{1}{4}\lambda_2^2 x\int\limits_{y-x}^{y+x}\tau_2(t)\ \bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]dt,\quad (x,y)\in G_2. \tag{20}$$

Using (19), after some computations, it is easy to verify that the following equalities hold

$$u[\theta_0(x)]=\frac{1}{2}\tau_1(0)+\frac{1}{2}B_{0x}^{0,\lambda}[\tau_1(x)]-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\nu_1(t)J_0\left[\lambda\sqrt{t(t-x)}\right]dt,$$

$$u[\theta_1(x)]=\frac{1}{2}\tau_1(1)+\frac{1}{2}B_{1x}^{0,\lambda}[\tau_1(x)]-\frac{1}{2}\int\limits_x^1\nu_1(t)J_0\left[\lambda\sqrt{(1-t)(x-t)}\right]dt,$$

where $B_{0x}^{0,\lambda}$ and $B_{1x}^{0,\lambda}$ are the operators defined by (3).

Applying to these equalities operators $A_{0x}^{0,\lambda}$ and $A_{1x}^{0,\lambda}$ respectively, and considering (5), (8) and (6), we obtain

$$A_{0x}^{0,\lambda}\{u[\theta_0(x)]\}=\frac{1}{2}\tau_1(0)\,J_0(\lambda x)+\frac{1}{2}\tau_1(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\nu_1(t)J_0[\lambda(x-t)]\,dt,$$

$$A_{1x}^{0,\lambda}\left\{u\left[\theta_1\left(x\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\tau_1\left(1\right)J_0\left[\lambda\left(1-x\right)\right]+\frac{1}{2}\tau_1\left(x\right)-\frac{1}{2}\int\limits_x^1\nu_1\left(t\right)J_0\left[\lambda\left(t-x\right)\right]dt.$$

Taking the last equalities into account and considering introduced notations, from the condition(18), we have

$$\alpha_1\left(x\right)\tau_1\left(x\right)=2d_0\left(x\right)-a_1\left(-x\right)\tau_1\left(0\right)J_0\left(\lambda x\right)-$$

$$-b_1\left(-x\right)\tau_1\left(1\right)J_0\left[\lambda\left(1-x\right)\right]+a_1\left(-x\right)\int\limits_0^x\nu_1\left(t\right)J_0\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt+$$

$$+b_1\left(-x\right)\int\limits_x^1\nu_1\left(t\right)J_0\left[\lambda\left(t-x\right)\right]dt,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{21}$$

Equality (21) is a functional relation between the unknown functions $\tau_1\left(x\right)$ and $\nu_1\left(x\right)$ which is brought from the G_1, on the segment OA.

Similarly, using (20) and the condition (15), one can show the validity of the following functional relation between unknown functions $\tau_2\left(x\right)$ and $\nu_2\left(x\right)$ which is brought from the G_2 on the segment OB:

$$\alpha_2\left(x\right)\tau_2\left(x\right)=2d_2\left(x\right)-a_2\left(x\right)\tau_2\left(0\right)J_0\left(\lambda x\right)-$$

$$-b_2\left(x\right)\tau_2\left(0\right)J_0\left[\lambda\left(1-x\right)\right]+a_2\left(x\right)\int\limits_0^x\nu_2\left(t\right)J_0\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt+$$

$$+b_2\left(x\right)\int\limits_x^1\nu_2\left(t\right)J_0\left[\lambda\left(t-x\right)\right]dt,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{22}$$

where y is re-denoted by x.

Putting the first $x=0$, and then $x=1$ in (21) and (22) and considering conditions $b_1(0)=b_2(0)=a_1(-1)=a_2(1)=0$, we have

$$\tau_1\left(0\right)=\frac{d_0\left(0\right)}{a_1\left(0\right)+c_1\left(0\right)},\quad \tau_1\left(1\right)=\frac{d_0\left(1\right)}{b_1\left(-1\right)+c_1\left(-1\right)}, \tag{23}$$

$$\tau_2\left(0\right)=\frac{d_2\left(0\right)}{a_2\left(0\right)+b_2\left(0\right)},\qquad \tau_2\left(1\right)=\frac{d_2\left(1\right)}{b_2\left(1\right)+c_2\left(1\right)}.$$

Since $u(x,y)\in C(\overline{D})$, from these equalities it follows that the given functions must satisfy the following compatibility conditions

$$d_2(0)[a_1(0)+c_1(0)]=d_0(0)[a_2(0)+c_2(0)],$$

$$d_0(1)=\varphi(0)[b_1(-1)+c_1(-1)].$$

Under these conditions the values of the function $u(x,y)$ at the points (0,1), (0,0) and (1,0) are uniquely defined by the given functions of the problem Γ.

As a result, the problem Γ is equivalently (in the sense of unique solvability) reduced to the problem $\widetilde{\Gamma}$ that defining a solution $u(x,y)\in C(\overline{G}_0)\cap C^1(G_0\cup OA\cup OB)\cap C^2(G_0)$ in the domain G_0 the following equation

$$u_{xx}-u_y-\lambda^2u=0 \tag{24}$$

satisfying the conditions (12), (21) and (22).

Now, we study problem $\widetilde{\Gamma}$. Let $u(x,y)$ be a solution to the problem $\widetilde{\Gamma}$ for $d_2(x) \equiv d_0(x) \equiv \varphi(y) \equiv 0$. Then, in the domain G_0 the following identity holds

$$0 = u\left(u_{xx} - u_y - \lambda^2 u\right) = \left(uu_x\right)_x - \frac{1}{2}\left(u^2\right)_y - \left(u_x\right)^2 - \lambda^2 u.$$

Integrating this identity in the domain G_0 and applying Green's formula, we have

$$2\iint\limits_{G_0}\left[\left(u_x\right)^2 + \lambda^2 u\right]dxdy + \int\limits_0^1 u^2(x,1)\,dx + 2\int\limits_0^1 \tau_2(x)\,\nu_2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \tau_1^2(x)\,dx. \quad (25)$$

On the other hand, passing to the limit at $y \to 0$ and considering introduced notations, from (24), we obtain

$$\tau_1''(x) - \lambda^2\tau_1(x) - \nu_1(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (26)$$

Multiplying (26) by $\tau_1(x)$ and integrating obtained equality over the segment $[0,1]$, and taking $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ into account, we have

$$\int\limits_0^1 \tau_1(x)\,\nu_1(x)\,dx = -\lambda^2\int\limits_0^1 \tau_1^2(x)\,dx - \int\limits_0^1 \left[\tau_1'(x)\right]^2 dx \leqslant 0. \quad (27)$$

Now, using (21) and (22) for $d_2(x) \equiv d_0(x) \equiv \varphi(y) \equiv 0$, we will prove that

$$l_j = \int\limits_0^1 \tau_j(x)\,\nu_j(x)\,dx \geqslant 0, \quad j = 1,2.$$

Let $j = 1$. Then, substituting the representation (21) of $\tau_1(x)$ into l_1, we get

$$l_1 = \int\limits_0^1 \nu_1(x)\,dx\left\{\beta_1(x)\int\limits_0^x \nu_1(t)\,J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt + \gamma_1(x)\int\limits_x^1 \nu_1(t)\,J_0\left[\lambda(t-x)\right]dt\right\}.$$

Hence, replacing the function $J_0(z)$ by the following formula (1), we have

$$l_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi \int\limits_0^1 \nu_1(x)\left[\beta_1(x)\int\limits_0^x \nu_1(t)\cos\left[\lambda(x-t)\right]dt + \right.$$
$$\left. + \gamma_1(x)\int\limits_x^1 \nu_1(t)\cos\left[\lambda(t-x)\right]dt\right]dx.$$

Using the difference formula for cosine functions and the following equality

$$f(x)\int\limits_m^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_m^x f(t)\,dt\right)^2,$$

l_1 can be written in the following form

$$l_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi \times$$

$$\times\left\{\int_0^1\beta_1(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x\nu_1(t)\cos(\lambda t\xi)dt\right)^2+\left(\int_0^x\nu_2(t)\sin(\lambda t\xi)dt\right)^2\right]dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\gamma_1(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_x^1\nu_1(t)\cos(\lambda t\xi)\,dt\right)^2+\left(\int_x^1\nu_1(t)\sin(\lambda t\xi)\,dt\right)^2\right]dx\right\}.$$

Hence, applying the rule of integration by parts with respect to x and considering $a_1(-1)=b_1(0)=0$, we have the following expression

$$l_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\times$$

$$\times\left\{\int_0^1\gamma_1'(x)\left[\left(\int_x^1\nu_1(t)\cos(\lambda t\xi)\,dt\right)^2+\left(\int_x^1\nu_1\sin(\lambda t\xi)\,dt\right)^2\right]dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\beta_1'(x)\,(x)\left[\left(\int_0^x\nu_1(t)\cos(\lambda t\xi)\,dt\right)^2+\left(\int_0^x\nu_1(t)\sin(\lambda t\xi)\,dt\right)^2\right]dx\right\}$$

from which by virtue of the condition (17) for $j=1$, it follows that $l_1\geqslant 0$.

Similarly, using (22) and the condition (17) for $j=2$, one can show that $l_2\geqslant 0$.

Since $l_1\geqslant 0$, from (27) follows that $\tau_1'(x)\equiv 0$, i. e. $\tau_1(x)=\text{const}$. And since $\tau_1(x)\in C[0,1]$ and $\tau_1(0)=0$, then $\tau_1(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

If we consider $\tau_1(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ and $l_2\geqslant 0$, then from (25) it follows that $u(x,1)\equiv 0$ and $u_x(x,y)=0$, i. e. $u(x,1)=0$ and $u(x,y)=\phi(y)$, where $\phi(y)$ is an arbitrary differentiable function. For the last two equalities, it follows that $u(x,y)\equiv 0$ in $\overline{G_0}$.

Hence, we can conclude that the problem $\widetilde{\Gamma}$ (as a result problem Γ) can not have more than one solution.

Now, we will prove the existence of the solution to the problem $\widetilde{\Gamma}$. To do this, passing to the limit as $y\to 0$, from (24), we obtain (26). If we temporarily assume that $\nu_1(x)$ is a known function then the solution of (26) satisfying the condition (23) is defined by

$$\tau_1(x)=f(x)+\int_0^1K(x,t)\,\nu_1(t)\,dt,\tag{28}$$

where

$$K(x,t)=\begin{cases}-\operatorname{sh}[\lambda_1(1-t)]\operatorname{sh}(\lambda_1 x)\left[\lambda_1\operatorname{sh}\lambda_1\right]^{-1} & \text{for } 0\leqslant x\leqslant t;\\ -\operatorname{sh}(\lambda_1 t)\operatorname{sh}[\lambda_1(1-x)]\left[\lambda_1\operatorname{sh}\lambda_1\right]^{-1} & \text{for } t\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$f(x)=x\tau_1(1)+(1-x)\,\tau_1(0)-\lambda^2\int_0^1K(x,t)\left[t\tau_1(1)+(1-t)\,\tau_1(0)\right]dt.$$

Excluding the function $\tau_1(x)$ from (21) and (28), we obtain an integral equation of the form with respect to $\nu_1(x)$:

$$\int_0^1K(x,t)\,\nu_1(t)\,dt-\beta_1(x)\int_0^x\nu_1(t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt-$$

$$-\gamma_1(x)\int_x^1 \nu_1(t)\,J_0[\lambda(t-x)]\,dt = f_1(x), \quad 0<x<1,$$

where

$$f_1(x) = 2\left[d_0(x)/\alpha_1(x)\right] - f(x) - \beta_1(x)\,\tau_1(0)\,J_0(\lambda x) - \gamma_1(x)\,\tau_1(1)\,J_0[\lambda(1-x)].$$

Differentiating this equality with respect to x and considering $\gamma_1(x)-\beta_1(x)\neq 0$, $x\in[0,1]$, we have the following second kind Fredholm integral equation that is equivalent to the problem $\widetilde{\Gamma}$:

$$\nu_1(x) + \int_0^1 K_1(x,t)\,\nu_1(t)\,dt = f_2(x), \quad 0<x<1, \tag{29}$$

where

$$f_2(x) = f_1'(x)\left[\gamma_1(x)-\beta_1(x)\right]^{-1},$$

$$K_1(x,t) = \begin{cases} \left[\gamma_1(x)-\beta_1(x)\right]^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{K(x,t)-\beta_1(x)\,J_0[\lambda(x-t)]\right\}, & x\geqslant t,\\ \left[\gamma_1(x)-\beta_1(x)\right]^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{K(x,t)-\gamma_1(x)\,J_0[\lambda(t-x)]\right\}, & x\leqslant t. \end{cases}$$

It is easy to verify that $f_2(x)\in C^1[0,1]$, and the functions $K_1(x,t), K_{1x}(x,t)$ are continuous for $x\neq t$, and for $x=t$ they have a jump of the first kind.

Due to the uniqueness of the solution to the problem $\widetilde{\Gamma}$ and its equivalence to the equation (29), the homogeneous integral equation

$$\nu_1(x) + \int_0^1 K_1(x,t)\nu_1(t)dt = 0, \qquad 0<x<1$$

has only the trivial solution. Then, according to the Fredholm alternative [24], the solution to the non-homogeneous integral equation (29) exists and is unique.

Substituting the function $\nu_1(x)$ found from (29) into (21), we uniquely determine the function $\tau_1(x)$, which belongs to the class $C^2[0,1]$. Thus, the problem $\widetilde{\Gamma}$ is equivalently reduced to the problem of determining the solution of the equation (24) that satisfies the conditions (12), (22), and $u(x,0)=\tau_1(x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

When solving this problem, we will use the solution formula for the first boundary value problem for equation (24) in the domain G_0:

$$u(x,y) = \int_0^1 e^{-\lambda^2 y}\tau_1(\xi)\,G_1(x,y;\xi,0)\,d\xi + \int_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\tau_2(\eta)\,G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\,dy -$$

$$-\int_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\varphi(\eta)\,G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\,dy, \qquad (x,y)\in G_0, \tag{30}$$

where

$$G_j(x,y;\xi,\eta) = \left[4\pi(y-\eta)\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{\varphi(y-\eta)}\right] + (-1)^j\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{\varphi(y-\eta)}\right]\right\}, \quad j=1,2.$$

Assuming $x \neq 0$, we differentiate equality (30) with respect to x. Then, taking the limit as $x \to 0$, we obtain

$$\nu_2(y) = f_3(y) - \int_0^y \left[\tau_2(\eta)e^{\lambda^2\eta}\right]' e^{-\lambda^2 y} \left\{[\pi(y-\eta)]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\} dy, \quad 0 < y < 1, \quad (31)$$

where

$$f_3(y) = e^{-\lambda^2 y}\left\{\int_0^1 \tau_1'(\xi)G_2(0,t;\xi,0)d\xi + \int_0^y \left[\varphi(\eta)e^{-\lambda^2\eta}\right]' G_{2\xi}(0,t;1,\eta)d\eta\right\},$$

$$K_0(y,\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{n^2}{\eta - y}\right).$$

Now, in equality (22), we rename x to η and multiply the resulting equality by $\alpha_2^{-1}(\eta)\, e^{\lambda^2\eta}$. Then, differentiating the resulting equality with respect to η, we obtain

$$\begin{aligned}\left[\tau_2(\eta)\, e^{\lambda^2\eta}\right]' &= f_4(\eta) + e^{\lambda^2\eta}\left[\beta_2(\eta) - \gamma_2(\eta)\right]\nu_2(\eta) + \\ &+ \int_0^\eta \nu_2(t)\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2\eta}\beta_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(\eta - t)\right]\right\} dt + \\ &+ \int_\eta^1 \nu_2(t)\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2\eta}\gamma_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(y - t)\right]\right\} dt,\end{aligned} \quad (32)$$

where

$$f_4(\eta) = (\partial/\partial\eta)\left\{e^{\lambda^2\eta}\alpha_2^{-1}(\eta)\left[2d_2(\eta) - a_2(\eta)\tau_2(0)J_0(\lambda\eta) - b_2(\eta)\tau_2(1)J_0[\lambda(1-\eta)]\right]\right\}.$$

Substituting (32) into (31), and after some transformations, we obtain a Fredholm integral equation of the second kind, which is equivalent to the problem $\widetilde{\Gamma}$:

$$\nu_2(y) + \int_0^1 \nu_2(t)\, K_2(y,t)\, dt = f_5(y), \quad 0 < y < 1, \quad (33)$$

where

$$f_5(y) = f_3(y) - e^{-\lambda^2 y}\int_0^y f_4(\eta)\left\{[\pi(y-\eta)]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\} dy,$$

$$K_2(y,t) = e^{\lambda^2(t-y)}\left[\beta_2(t) - \gamma_2(t)\right]\left\{[\pi(y-t)]^{-1/2} + K_0(y,t)\right\} +$$

$$+ \int_t^y \left\{[\pi(y-\eta)]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\} \cdot \frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\beta_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(\eta - t)\right]\right\} d\eta +$$

$$+ \int_0^t \left\{[\pi(y-\eta)]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\gamma_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(t - \eta)\right]\right\} d\eta, \qquad y \geqslant t,$$

$$K_2(y,t)=\int\limits_0^y\left\{\left[\pi(y-\eta)\right]^{-1/2}+K_0(y,\eta)\right\}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\gamma_2(\eta)J_0\left[\lambda(t-\eta)\right]\right\}d\eta,\ y\leqslant t.$$

The unique and unconditional solvability of the non-homogeneous integral equation (33) (due to its equivalence to the problem $\widetilde{\Gamma}$) follows from the uniqueness of the solution to the problem $\widetilde{\Gamma}$.

After the function $\nu_2(y)$ is found from equation (33), substituting it into equality (22) gives the function $\tau_2(y)$. Therefore, the functions $\tau_j(y)$ and $\nu_j(y)$, $j=1,2$, are uniquely determined through the given problem Γ. Using the found functions $\tau_j(y)$ and $\nu_j(y)$, for $j=1,2$ the solution to the problem Γ in the domains G_0, G_1 and G_2 is determined by the formulas (30), (19), and (20), respectively. This completes the investigation of the problem Γ.

Remark 1. If in the conditions (15) and (18) we have $b_1(-x)\equiv c_1(-x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$; $b_2(y)\equiv c_2(y)\equiv 0$, $y\in[0,1]$, then due to the invertibility of the operator $A_{0x}^{0,\lambda}$, the problem Γ reduces to the Tricomi problem, which consists of finding a regular solution in the domain D to equation (9), satisfying the conditions (12) and $u(x,y)|_{\overline{OK}}=X_1(x)$, $x\in[0,1/2]$ and $u(x,y)|_{\overline{OM}}=X_2(y)$, $y\in[0,1/2]$, where $X_1(x)$ and $X_2(y)$ are given continuous functions from the class $C^2[0,1]$.

5. Study of the problem H

Let $u(x,y)$ be a solution to the problem H. We introduce the following notations:

$$\lim_{x\to-y-0}u(x,y)=X(y),\quad 0\leqslant y\leqslant(1/2),\tag{34}$$

$$a_1(-x)A_{0x}^{0,\lambda}\left\{u\left[\theta_0(x)\right]\right\}+b_1(-x)A_{1x}^{0,\lambda}\left\{u\left[\theta_1(x)\right]\right\}+$$
$$c_1(-x)u(x,0)=Y(x),\ (x,0)\in\overline{OA}.\tag{35}$$

We will assume that $X(y)$ and $Y(x)$ are twice continuously differentiable functions (below we will prove that they indeed possess these properties).

From the boundary conditions and the introduced notations, it is clear that if $X(y)$ and $Y(x)$ are given functions, the solution to the problem H in the domain D is determined as the solution to the boundary value problem $\{(9),\ (12),\ (15),\ (35)\}$ by the formulas (30), (19), (20), and in the domain D^* by the the following formulas of the solution of boundary value problem $\{(9),\ (13),\ (14),\ (34)\}$:

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 e^{-\lambda^2 y}\tau_1(\xi)G_1(x,y;\xi,0)\,d\xi+\int\limits_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\tau_2(\eta)G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\,dy-$$

$$-\int\limits_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\varphi(\eta)G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\,dy,\qquad (x,y)\in G_0^*,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_2^*(y+x)+\tau_2^*(y-x)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2^*(t)J_0\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\lambda_2^2 x\int\limits_{y-x}^{y+x}\tau_2^*(t)\ \bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]dt,\quad (x,y)\in G_2^*,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_1^*(x+y)+\tau_1^*(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1^*(t)J_0\left[\lambda_2\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\,dt+$$

$$+\frac{1}{4}\lambda_2^2 y\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1^*(t)\;\bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]dt,\quad (x,y)\in G_1^*, \tag{36}$$

where

$$\begin{array}{cccc}\tau_1(t)=u(t,0), & \tau_2(t)=u(0,t), & 0\leqslant t\leqslant 1;\\ \tau_1^*(t)=u(t,0), & \tau_2^*(t)=u(0,t), & -1\leqslant t\leqslant 0;\\ \nu_1(t)=u_y(t,0), & \nu_2(t)=u_x(0,t), & 0<t<1;\\ \nu_1^*(t)=u_y(t,0), & \nu_2^*(t)=u_x(0,t), & -1<t<0.\end{array}$$

Therefore, we focus on finding the unknown functions $X(y)$ and $Y(x)$.

First, we will find the function $Y(x)$. Using the formulas (19) and (36) and the methodology applied in obtaining equality (21), from the relations (14) and (35), we obtain

$$\alpha_1(x)\tau_1(x)=2Y(x)-\tau_1(0)a_1(-x)J_0(\lambda x)-$$

$$\tau_1(1)b_1(-x)J_0[\lambda(1-x)]+a_1(x)\int\limits_0^x\nu_1(x)J_0[\lambda(x-t)]\,dt+$$

$$+b_1(x)\int\limits_x^1\nu_1(t)J_0[\lambda(x-t)]\,dt, \tag{37}$$

$$\alpha_1(x)\tau_2^*(-x)=2d_1(-x)-\tau_2^*(0)a_1(-x)J_0(\lambda x)-$$

$$-\tau_1^*(-1)b_1(-x)J_0[\lambda(1-x)]-a_1(-x)\int\limits_0^x\nu_1^*(-t)J_0[\lambda(x-t)]\,dt-$$

$$-b_1(-x)\int\limits_x^1\nu_2^*(-t)J_0[\lambda(x-t)]\,dt. \tag{38}$$

Multiplying equality (38) by q and subtracting it term by term from (37), we obtain

$$2Y(x)=2qd_1(-x)+\alpha_1(x)[\tau_1(x)-q{\tau_1}^*(-x)]+$$

$$+a_1(-x)J_0(\lambda x)[\tau_1(0)-q{\tau_2}^*(0)]+b_1(-x)J_0[\lambda(1-x)]\times$$

$$\times[\tau_1(1)-q{\tau_2}^*(-1)]-a_1(-x)\int\limits_0^x[\nu(t)+q{\nu_2}^*(-t)]J_0[\lambda(x-t)]dt-$$

$$-b_1(-x)\int\limits_x^1[\nu(t)+q{\nu_2}^*(-t)]J_0[\lambda(x-t)]dt. \tag{39}$$

Therefore, the function $Y(x)$ is uniquely expressed through the unknown function $\delta(x)=\tau_1(x)-q\tau_2*(-x)$. We will find the function $\delta(x)$.

Equation (9) in the domains G_0 and G_0^* has the forms

$$u_{xx}-u_y-\lambda^2u=0,\quad (x,y)\in G_0, \tag{40}$$

$$u_{yy} + u_x + \lambda^2 u = 0, \quad (x, y) \in G_0^*. \tag{41}$$

Passing to the limit as $y \to +0$ and $x \to -0$ in (40) and (41), accordingly, and taking into account the introduced notations, we obtain

$$\tau_1{}''(x) - \lambda^2 \tau_1(x) - \nu_1'(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{42}$$

$$\tau_2{}''(-x) + \lambda^2 \tau_2(-x) + \nu_2{}^*(-x) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{43}$$

Multiplying (43) by q and subtracting it term by term from (42), we find

$$\delta''(x) - \lambda^2 \delta(x) - [\nu_1(x) + q\nu_2{}^*(-x)] = 0, \quad 0 < x < 1.$$

As mentioned above, the solution to the problem H in the domains G_1 and G_1^* s determined by formulas (19) and (36), respectively. Substituting (19) and (36) into condition (10) and taking into account the first condition of the compatibility condition (16), after some transformations, we obtain

$$B_{0x}^{0,\lambda}[\tau_1(x) - q\tau_2^*(-x)] - \int_0^x [\nu_1(t) + q\nu_2^*(-t)] J_0\left[\lambda\sqrt{t(t-x)}\right] dt =$$

$$= 2p_1(x/2) - p_1(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

where $B_{0x}^{0,\lambda}$ is an operator defined by (3).

Due to equality (8) and the notation $\delta(x) = \tau_1(x) - q\tau_2^*(-x)$ the last equality can be rewritten as

$$B_{0x}^{0,\lambda}\delta(x) - \int_0^x B_{0t}^{1,\lambda}[\nu_1(t) + q\nu_2^*(-t)]\, dt = 2p_1(x/2) - p_1(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Differentiating this equality with respect to x, and then applying the operator $A_{0x}^{1,\lambda}$, defined by formula (2), taking into account the equalities (5) and (7), we obtain

$$\nu_1(z) + q\nu_2^*(-z) = C_{0z}^{0,\lambda}[\delta(z)] - A_{0z}^{1,z}[p_1'(z/2)], \ 0 < z < 1, \tag{44}$$

where $C_{0x}^{0,\lambda}$ is an operator defined by (4). Substituting (44) into (43), we obtain an integral-differential equation with respect to $\delta(x)$:

$$\delta''(x) - \lambda^2 \delta(x) - C_{0x}^{1,\lambda}[\delta(x)] = -A_{0x}^{1,\lambda}[p'(x/2)], \ 0 < x < 1. \tag{45}$$

From (10), (12), and (13), due to the compatibility condition (16), it follows that

$$\delta(0) = p_1(0), \ \delta(1) = \varphi(0) - q\varphi^*(0). \tag{46}$$

We will prove that the solution to equation (45), satisfying condition (46), exists and is unique

First, we will prove the uniqueness of the solution. To do this, it is enough to show that the homogeneous problem

$$\delta''(x) - \lambda^2 \delta(x) - C_{0x}^{0,\lambda}\delta(x) = 0, \quad x \in (0,1); \quad \delta(0) = \delta(1) = 0 \tag{47}$$

has only the trivial solution. To this end, considering the form of the operator $C_{0x}^{0,\lambda}$, we can rewrite the equation in (47) as

$$\delta''(x) - \delta'(x) - \lambda^2 \delta(x) - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^x \delta(t)\overline{J}_1[\lambda(x-t)]dt = 0, \ x \in (0,1).$$

Multiply this equation by $\delta(x)$ and integrate with respect to x over the interval $[0,1]$. Then, by integrating by parts the first two integrals and taking into account the conditions $\delta(0)=\delta(1)=0$, we obtain

$$\int_0^1 [\delta'(x)]^2 dx + \lambda^2 \int_0^1 \delta^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^1 \delta(x)\,dx \int_0^x \delta(t)\,\overline{J_1}[\lambda(x-t)\,dt = 0. \tag{48}$$

Let the last integral in (48) be denoted by l and replace the function $\overline{J_1}(z)$ using the formula (1) with $w=1$:

$$l = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{1/2} \left\{ \int_0^1 \delta(x)\,dx \int_0^x \delta(t)\cos\left[\lambda(x-t)\right] dt \right\} d\xi.$$

From here, applying the formula for the cosine of a difference and taking into account the equality

$$f(x)\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2,$$

we compute the integral with respect to x. As a result, we have

$$l = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{1/2} \left\{ \left[\int_0^1 \delta(t)\cos(\lambda\xi t)\,dt\right]^2 + \left[\int_0^1 \delta(t)\sin(\lambda\xi t)\,dt\right] \right\} d\xi.$$

Therefore, $l \geqslant 0$. Taking this into account, it follows from (48) that $\delta'(x) \equiv 0$, i. e. $\delta(x) = \text{const}$, $x \in (0,1)$. Since $\delta(x) \in C[0,1]$ and $\delta(0) = \delta(1) = 0$, we have $\delta(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$.

Now, we proceed to prove the existence of a solution to the problem $\{(45), (46)\}$. For this purpose, let us rewrite the equations (45) in the form

$$\delta''(x) - \lambda^2\delta(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

where

$$f(x) = -A_{0\,x}^{1,\lambda}[p'(x/2)] + \delta'(x) + (1/2)\lambda^2 \int_0^x \delta(t)\,\bar{J}_1\left[\lambda(x-t)\right]dt. \tag{49}$$

If we temporarily assume that the right hand-side of the last equation is known function, then it is easy to verify that the solution of this equation satisfying the condition (46) has the following form

$$\delta(x) = f_1(x) + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt, \tag{50}$$

where

$$f_1(x) = x\delta(1) + (1-x)\delta(0) + \lambda^2 \int_0^1 K(x,t)[t\delta(1) + (1-t)\delta(0)]dt,$$

and $K(x,t)$ is the Green's function defined by

$$K(x,t)=\begin{cases}-\operatorname{sh}[\lambda(1-t)]\operatorname{sh}(\lambda x)(\lambda\operatorname{sh}\lambda)^{-1} & \text{for } x\leqslant t,\\ -\operatorname{sh}[\lambda(1-x)]\operatorname{sh}(\lambda t)(\lambda\operatorname{sh}\lambda)^{-1} & \text{for } x\geqslant t.\end{cases}$$

Substituting the function $f(x)$ from (49) into (50) and applying the integration by parts formula, after some transformations, we obtain the second-kind Fredholm integral equation with respect to $\delta(x)$, which is equivalent to the problem{(45),(46)}:

$$\delta(x)-\int_0^1 K_1(x,t)\,\delta(t)\,dt=f_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{51}$$

where

$$f_2(x)=x\delta(1)+(1-x)\,\delta(0)-\int_0^1 K(x,t)\,A_{0t}^{1,\lambda}[p'(t/2)]dt,$$

$$K_1(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)-\frac{1}{2}\lambda^2\int_t^1 K(x,z)\,\overline{J}_1[\lambda(z-t)]dz,$$

such that $f_2(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$, and $K_1(x,t)$ and its derivatives are continuous for $t\neq x$ and they have a jump of the first kind for $t=x$.

The homogeneous problem (47) corresponds to the homogeneous integral equation:

$$\delta(x)-\int_0^1 K_1(x,t)\,\delta(t)\,dt=0,\qquad 0<x<1. \tag{52}$$

Since the problem (47) has only the trivial solution, the equation (52) also has only the solution $\delta(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. Then, according to the Fredholm alternative [24], the solution to the integral equation (51) exists and is unique. Moreover, due to the properties of $f_2(x)$ and $K_1(x,t)$, its solution belongs to the class $C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$.

Therefore, the function $\delta(x)=\tau_1(x)-q\tau_2^*(-x)$ is uniquely determined by the given data of the problem H and belongs to the class $C[0,1]\cap C^2(0,1)$.

Taking this into account, along with the equalities (44) and (39), we can conclude that the unknown function $Y(x)$ is uniquely determined by the given data of the problem H, and moreover, it belongs to the class $Y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ и $Y(x)\equiv 0$ for $p_1(x)=\varphi(y)\equiv\varphi^*(x)\equiv d_1(x)\equiv 0$.

After the problem Γ for the equation (9) in the domain D with the conditions {(12), (15), (35)} has been solved, by substituting the obtained solution of this problem into equality (11), we find the unknown function $X(y)$:

$$X(y)=\frac{1}{q}\left[\lim_{x\to -y+0}u(x,y)-p_2(y)\right],\qquad 0\leqslant y\leqslant(1/2).$$

Thus, we have proved the following theorem:

Theorem 5. *Let $\varphi(y)\in C^1[0,1]$, $\varphi^*(x)\in C^1[-1,0]$, $p_j(t)\in C^2[0,1/2]$, $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $d_j(t)\in C^2[-1,0]$ and let the conditions (16), (17) and the following conditions be satisfied:*

$$a^2{}_j\left([(-1)^j y]\right)+b^2{}_j\left([(-1)^j y]\right)+c^2{}_j\left([(-1)^j y]\right)\neq 0,\quad \forall y\in[0,1],\ j=1,2;$$

$$b_j(0)=0,\quad a_j[(-1)^j]=0,\quad j=\overline{1,2};\quad a_1(y)\neq b_1(y),\ y\in[-1,0].$$

Then Problem H has a unique solution.

References

1. **Gel'fand I.M.** Nekotorye voprosy analiza i differentsial,nykh uravneniy [Some questions of analysis and differential equations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Achievements of mathematical sciences], 1959, vol. 14, iss. 3, pp. 3–19. (In Russ.).
2. **Ufliand Y.A.** On the propagation of oscillations in composite electrical lines. *Engineering Physics Journal*, 1964, vol. 7, no. 1, pp. 89–92.
3. **Lykov A.V.** Application of irreversible process thermodynamics methods to the study of heat and mass transfer. *Engineering Physics Journal*, 1965, vol. 9, no. 3, pp. 287–304.
4. **Tikhonov A.N., Samarsky A.A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1977. (In Russ.).
5. **Shashkov A.G.** *Sistemno-strukturnyy analiz protsessa teploobmena i yego primeneniye* [System-structural analysis of the heat transfer process and its application]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. (In Russ.).
6. **Korzyuk V.I., Lemeshevsky S.V., Matus P.P.** Solvability of the conjugation problem for hyperbolic and parabolic equations with integral-differential boundary conditions at the interface. *Proceedings of the Institute of Mathematics*. NAS of Belarus, Minsk, 2000. Vol. 6, pp. 100–108.
7. **Gaiduk S.I.** Primeneniye metoda konturnogo integrala k resheniyu odnoy zadachi na sopryazheniye uravneniy parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov [Applicaton of the contour integral method to solving of the conjugation problem for hyperbolic and parabolic equations]. *Differentisal'nye uravneniya* [Differential equations], 1965, vol. 1, no. 10, pp. 1366–1382. (In Russ.).
8. **Ladyzhenskaya O.A., Stupjalis L.** Ob uravneniyakh smashannogo tipa [On equations of mixed type]. *Vestnik Leningradskogo universiteta. Ser. Matematika, mekhanika, astronomiya* [Bulletin of Leningrad University. Ser. Mathematics, mechanics, astronomy], 1965, vol. 19, no. 4, pp. 38–46. (In Russ.).
9. **Zolina L.A.** On a boundary value problem for a model equation of hyperbolo-parabolic type. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 63–78.
10. **Bzhikhatlov Kh.G., Nakhushev A.M.** O granichnoy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa [On a boundary value problem for an equation of mixed type]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of USSR Academy of Sciences], 1968, vol. 183, no. 2, pp. 261–264. (In Russ.).
11. **Karimov E.T.** Frankl-type problem for a mixed type equation with the Caputo fractional derivative. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, pp. 1829–1836.
12. **Ashurov R.R., Kadirkulov B.J., Jalilov M.A.** On a nonlocal problem for a mixed-type equation with a fractional order operator. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, vol. 45, pp. 3220–3232.
13. **Urinov A.K., Mamanazarov A.O.** Unique solvability of a nonlocal problem with shift for a parabolic-hyperbolic equation. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 270–289.
14. **Mamanazarov A.O.** A non-local problem for a parabolic-hyperbolic equation with singular coefficients. *Uzbek Mathematical Journal*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 118–136.
15. **Zaitseva N.V.** Nonlocal boundary value problem with an integral condition for a mixed type equation with a singular coefficient. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, pp. 210–220.

16. **Urinov A.K., Khalilov K.S.** A nonlocal problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with a singular coefficient. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2022, vol. 15, no. 4, pp. 467–481.
17. **Karimov E.T., Rakhmatullaeva N.A.** On a nonlocal problem for mixed parabolic-hyperbolic type equation with nonsmooth line of type changing. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2014, vol. 7, no. 2, p. 1450030.
18. **Berdyshev A., Cabada A., Karimov E.** On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 6, p. 1030.
19. **Turmetov B.Kh., Kadirkulov B.J.** On a problem for nonlocal mixed-type fractional order equation with degeneration. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, vol. 146, p. 110835.
20. **Dzhamalov S.Z., Sipatdinova B.K.** A linear inverse problem for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind, second order with semi-nonlocal boundary condition in an unbounded parallelepiped. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2024, vol. 9, iss. 3, pp. 471–482.
21. **Nakhushev A.M.** *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaya shkola, 1995. (In Russ.).
22. **Kuznetsov V.S.** *Spetsial'nye funktsii* [Special functions], Moscow, Vysshaya shkola, 1965. (In Russ.).
23. **Salakhitdinov M.S., Urinov A.K.** *Krayevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spectral'nym parametrom* [Boundary value problems for equations of mixed type with a spectral parameter]. Tashkent, Fan, 1997. (In Russ.).
24. **Mikhlin S.G.** *Lektsii po lineynym integral'nym uravneniyam* [Lectures on linear integral equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. (In Russ.).

Article received 06.01.2025.
Corrections received 09.08.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 715–732.

УДК 517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-715-732

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И. У. Хайдаров[a], А. О. Маманазаров[b]

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
[a] ibrohim0902@gmail.com, [b] mamanazarovaz1992@gmail.com

Мы сформулировали и исследовали нелокальную задачу с особыми согласующими условиями и условиями сдвига для параболо-гиперболического уравнения. Используя теорию интегральных уравнений, мы установили единственность решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: *нелокальная задача, параболо-гиперболическое уравнение, метод интегральных уравнений.*

Поступила в редакцию 06.01.2025.
После переработки 09.08.2025.

Сведения об авторах

Хайдаров Иброхимжон Усмоналиевич, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; e-mail: ibrohim0902@gmail.com.

Маманазаров Азизбек Отажон угли, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан; e-mail: mamanazarovaz1992@gmail.com.

МЕХАНИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 733–749.

УДК 532.529+541.126 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-733-749

ТЕСТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ ДЕТОНАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ ВЗВЕСИ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ

С. А. Лаврук[a], А. А. Афанасенков

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия
[a]*lavruk@itam.nsc.ru*

Методами численного моделирования проведено тестирование приведённой кинетической схемы детонационного горения частиц алюминия в воздухе, учитывающей образование газообразных и конденсированных субокислов алюминия. Представлены результаты тестирования численного алгоритма с применением методов параллельного программирования и использованием численной схемы Рунге — Кутты различных порядков по времени. Представлены результаты расчётов ячеистой детонации взвесей алюминия в воздухе различной дисперсности и загрузки. Показано, что степень регулярности ячеистой структуры и размер ячейки определяется размером и загрузкой частиц. Скорость детонации слабо зависит от размера частиц и существенно зависит от загрузки. Результаты согласуются с экспериментальными и расчётными данными других авторов.

Ключевые слова: *численное моделирование, гетерогенная детонация, газовзвеси частиц алюминия, приведённая модель кинетики.*

Введение

Интерес к изучению механизмов горения частиц алюминия обусловлен широким применением в промышленности, в частности, авиационной, автомобильной и т. д. При механической обработке изделий из алюминия происходит образование мелкодисперных облаков алюминиевой пыли, которые при воспламенении могут привести к взрывам с серьёзными разрушениями и человеческими жертвами [1–3]. Кроме того, частицы алюминия могут использоваться в качестве добавок или основного топлива в различных смесях [4–12].

Описание горения алюминия проводится, как правило, в рамках приведённой кинетики. Это связано с тем, что многостадийные схемы детальной кинетики требуют больших расчётных затрат и применимы лишь к нанодисперным частицам, для которых время горения не зависит от размера частиц [13].

На настоящий момент накоплен большой объём экспериментальных и теоретических данных по горению частиц алюминия различной дисперсности (включая наноразмерный диапазон) в различных условиях. Это позволяет создавать адекватные модели детонации, основанные на принципах приведённой кинетики. Такие

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-79-00046, https://rscf.ru/project/24-79-00046/.

модели использовались для описания процессов гетерогенной детонации взвесей алюминия в работах [14–18] и гибридной детонации водородсодержащих смесей с частицами алюминия [4; 5; 7; 19–21].

Процессы горения и детонации частиц алюминия в значительной степени зависят от дисперсности частиц. Крупные частицы горят в диффузионном режиме, время горения определяется квадратичной функцией диаметра частиц и практически не зависит от температуры. Такая зависимость принималась в работах [15; 16; 22]. С уменьшением размера частиц до нескольких микрон и в субмикронном диапазоне режим горения является переходным к кинетическому с изменением зависимости времени горения от размера частиц к степенной с показателем 0.3 [23]. Модель гетерогенной детонации частиц алюминия в кислороде для широкого диапазона концентраций горючих частиц предложена в [24; 25]; модель расширена на широкий диапазон концентраций алюминиевых частиц в горючей смеси, в [24] исследованы процессы детонации в неоднородных по концентрациям взвесях, а также в бидисперсных смесях [26–28].

Основная реакция, учитываемая в моделях детонации взвесей алюминия, выражает взаимодействие алюминия с кислородом с образованием конденсированного оксида алюминия. В расширенной модели гибридной детонации [20] учитывается также реакция с образованием газообразных субокислов и процесс испарения и декомпозиции конденсированного оксида в газообразные субокислы. Модель [20] валидирована по экспериментальным данным гибридной детонации водородно-воздушных взвесей с частицами алюминия, однако валидации данной модели на течениях гетерогенной детонации взвесей частиц алюминия в воздухе или кислороде не проводилось.

Целью настоящей работы является доработка модели гетерогенной детонации воздушных взвесей алюминия в широком диапазоне концентраций и размеров частиц на основе модели [20], валидация модели, доработка и тестирование численного алгоритма на основе параллельных технологий. Будут представлены некоторые результаты расчётов двумерных детонационных течений.

1. Физико-математическая модель

Физико-математическая модель основана на уравнениях механики взаимопроникающих континуумов, вытекающих из законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} = \Gamma_i, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Индекс 1 относится к газовой фазе, 2 и 3 — к частицам алюминия и оксиду алюминия.

Векторы решения и потоков имеют вид: для газовой фазы

$$W_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_{O2} \\ \rho_{Alox} \\ \rho_{N2} \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_1 E_1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_{O2} u_1 \\ \rho_{Alox} u_1 \\ \rho_{N2} u_1 \\ p + \rho_1 {u_1}^2 \\ \rho_1 u_1 v_1 \\ \rho_1 u_1 E_1 + p u_1 \end{pmatrix}, G_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_{O2} v_1 \\ \rho_{Alox} v_1 \\ \rho_{N2} v_1 \\ \rho_1 u_1 v_1 \\ p + \rho_1 {v_1}^2 \\ \rho_1 v_1 E_1 + p v_1 \end{pmatrix},$$

для дискретных компонент

$$W_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \\ \rho_i v_i \\ \rho_i E_i \end{pmatrix}, F_i = \begin{pmatrix} \rho_i u_i \\ \rho_i {u_i}^2 \\ \rho_i u_i v_i \\ \rho_i u_i E_i \end{pmatrix}, G_i = \begin{pmatrix} \rho_i v_i \\ \rho_i u_i v_i \\ \rho_i {v_i}^2 \\ \rho_i v_i E_i \end{pmatrix}, \ i = 2, 3.$$

Здесь индексы *O2, Alox* обозначают кислород, смесь газообразных продуктов окисления алюминия. Массовая доля азота задаётся в начальном состоянии, в дальнейшем определяется алгебраически.

Правые части записываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = -(\Gamma_2 + \Gamma_3), \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} -(J_{2Al2O3} + J_{2Alox}) \\ f_{2x} - (J_{2Al2O3} + J_{2Alox})u_2 \\ f_{2y} - (J_{2Al2O3} + J_{2Alox})v_2 \\ q_2 + f_{2x}u_2 + f_{2y}v_2 - (J_{2Al2O3} + J_{2Alox})E_2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} J_{2Al2O3} \\ f_{3x} + J_{2Al2O3}u_3 \\ f_{3y} + J_{2Al2O3}v_3 \\ q_3 + f_{3x}u_3 + f_{3y}v_3 + J_{2Al2O3}E_3 \end{pmatrix}.$$

Описание горения алюминия проводится на основе модели [15; 29], доработанной и используемой в [24; 28; 30; 31], а также [32; 33]. Формула приведённой кинетики представлена уравнением аррениусовского типа

$$J_2 = \begin{cases} 0, T_2 < T_{ign} \\ \dfrac{1}{\tau_{20}} \rho_2 (d_0/d_2)^\theta (p/p*)^m \exp(-E_a/R_{un}T_2), \ T_2 > T_{ign}, \rho_O > 0 \\ 0, \rho_O = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$m = -0.25 \ln d[\text{мкм}], \quad E_a = 0.5\{E_{\text{micro}}(2 + \ln d[\text{мкм}]) - E_{\text{nano}} \ln d[\text{мкм}]\}, \tag{2}$$

где $\tau_{20} = 0.2$ мкс для кислорода и 0.8 мкс для воздуха, $E_{\text{micro}} = 32$ кДж/моль, $E_{\text{nano}} = 60$ кДж/моль, $\theta = 0.3$ для $d_2 \leqslant 3.5$ мкм [23; 34], $T_{\text{ign}} = 933$ K (температура плавления алюминиевого ядра), d_2 — начальный диаметр частиц алюминия. Различные подходы к описанию горения алюминия обсуждаются в [35]. Здесь предполагается, что при горении частицы образуются либо конденсированные наночастицы оксида алюминия (при T_3<3500 K), либо газообразные продукты (при $T_3 \geqslant$3500 K), 3500 K — температура кипения оксида алюминия. При этом

$$\begin{aligned} J_{2Alox} &= \begin{cases} 0, T_1 < 3500 \text{ K}, \\ J_2(1 + \mu_{O2}/2\mu_{Al}), T_1 \geqslant 3500 \text{ K}; \end{cases} \\ J_{2Al2O3} &= \begin{cases} J_2(1 + 3\mu_{O2}/4\mu_{Al}), T_1 < 3500 \text{ K}, \\ 0, T_1 \geqslant T_{3e}. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Система дополняется уравнениями состояния идеального газа

$$p = \rho_1 R T_1, R = \frac{R_{\text{un}}}{\rho_1} \left(\frac{\rho_O}{\mu_O} + \frac{\rho_{Alox}}{\mu_{Alox}} + \frac{\rho_N}{\mu_N} \right) \tag{4}$$

и калорическими уравнениями состояния для газа и частиц

$$E_1 = \frac{({u_1}^2 + {v_1}^2)}{2} + c_{v,1}T_1 + \xi_{Alox}Q_{Alox},$$
$$E_2 = \frac{({u_2}^2 + {v_2}^2)}{2} + c_{v,2}T_2 + Q_{23}, \quad E_3 = \frac{({u_3}^2 + {v_3}^2)}{2} + c_{v,3}T_3. \tag{5}$$

В (4), (5) μ_O, μ_{Al}, μ_N — молекулярные веса кислорода (O_2), алюминия (Al) и азота (N_2) соответственно, μ_{Alox} — средний молекулярный вес газообразных продуктов окисления алюминия, R_{un} — универсальная газовая постоянная, c_p — теплоёмкость смеси при постоянном давлении [36]. Концентрации газовых компонент определяются как $\xi_{Alox} = \rho_{Alox}/\rho_1$.

Для описания горения частиц алюминия (3) используется приведённая кинетическая схема, состоящая из одной реакции. В ходе данной реакции до температуры 3500 K происходит горение с образованием конденсированных продуктов реакции в виде жидких капель оксида алюминия ($4Al+3O_2 \to 2Al_2O_3$). При образовании частиц оксида алюминия энерговыделение соответствует значению Q_{23}= 15 МДж/кг. Когда реакция горения (3) проходит при температуре свыше 3500 K, рассматривается реакция с образованием газообразных субокислов алюминия. В качестве реакции рассматривается: $Al+O_2 \to 2AlO$. Анализ цепочек реакций детальной кинетики горения алюминия [13; 37] показал, что реакции разложения газообразных субокислов в AlO протекают значительно быстрее основных реакций образования AlO и Al_2O_3. Исходя из этого принято следующее допущение об образовании в качестве газообразного субокисла только AlO. При образовании газообразных субокислов энерговыделение $Q_{2\,Alox}$= 4.5 МДж/кг (соответственно Q_{Alox}=Q_{23}–$Q_{2\,Alox}$). В простейшем приближении принимается, что молекулярный вес этой смеси постоянен ($\mu_{AlO} = \text{const} = \mu_{O2}$). Параметрические расчёты показали слабое влияние параметра μ_{AlO} на скорость детонации и структуру волны Чепмена — Жуге. Это обусловлено его участием лишь в формуле (4), где относительный вклад ρ_{Alox}/μ_{Alox} невелик.

Замыкающие соотношения выражают силы межфазного взаимодействия и теплообмен между газом и двумя дискретными фракциями

$$f_{ix} = \frac{\rho_i}{\tau_{ui}}(u_1 - u_i), \; f_{iy} = \frac{\rho_i}{\tau_{iu}}(v_1 - v_i), \; q_i = \frac{\rho_i c_{v,i}}{\tau_{Ti}}(T_1 - T_i), \; i = 2, 3,$$
$$\tau_{ui} = 4d_i\rho_{ii}/3c_{Di}\rho_{11}\left[(u_1 - u_i)^2 + (v_1 - v_i)^2\right]^{1/2},$$
$$\tau_{Ti} = {d_i}^2\rho_{ii}c_{vi}/6\lambda_1 \mathrm{Nu}_i, \mathrm{Nu}_i = 2 + 0.6{\mathrm{Re}_i}^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}.$$

Здесь c_{Di} — коэффициенты сопротивления частиц алюминия и образующегося оксида алюминия, c_{v2} — теплоёмкость частиц, Nu, Pr — числа Нуссельта и Прандтля (обычно принимается Pr = 0.7), λ_1 — теплопроводность газа. Для c_{Di} используется аналог формулы Хендерсона [15; 24; 29; 35; 38].

1.1. Численная технология и тестирование алгоритма

Численная технология основана на применении схемы TVD Хартена — Лакса [39] для газовой фазы и схемы Джентри — Мартина — Дэйли [40] для дискретной системы первого порядка по времени. Ранее метод тестировался и использовался для задач гетерогенной детонации (в рамках кинетической модели [24]), некоторые результаты тестирования приведены в [24].

Тестирование проводилось на задаче инициирования и установления гетерогенной детонационной волны в газовзвеси частиц алюминия в одномерной и двумерной постановках.

На рис. 1 показаны результаты тестирования задачи на вложенных сетках в одномерной постановке (установившиеся профили плотности газа на стенке канала на один и тот же момент времени). Здесь можно видеть, что сходимость подтверждается, а различия наблюдаются лишь в узкой зоне горения (рис. 1). Для расчётов далее использовалась сетка с шагом 0.0002 м.

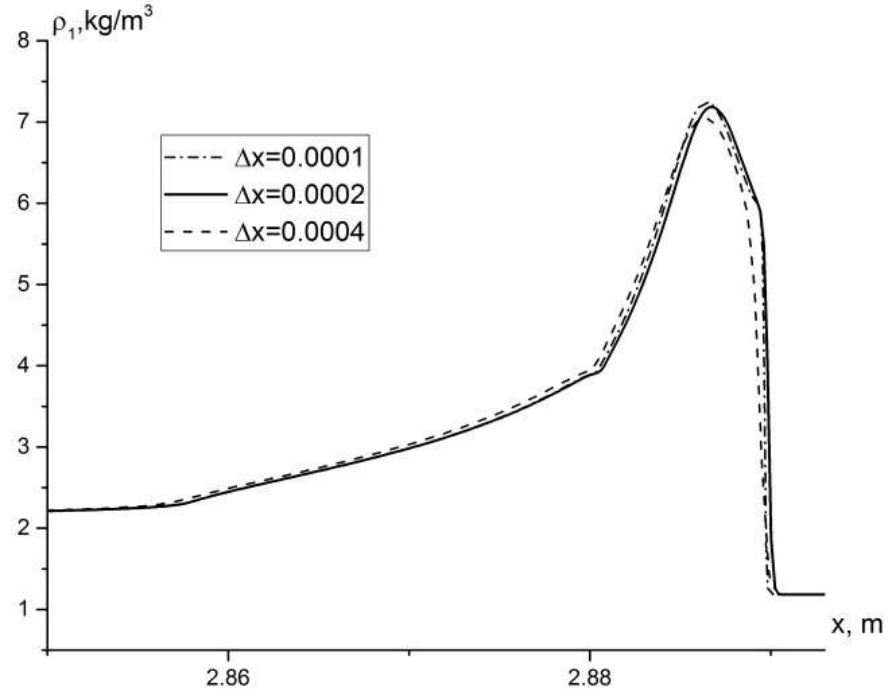


Рис. 1. Профили плотности газа на вложенных сетках

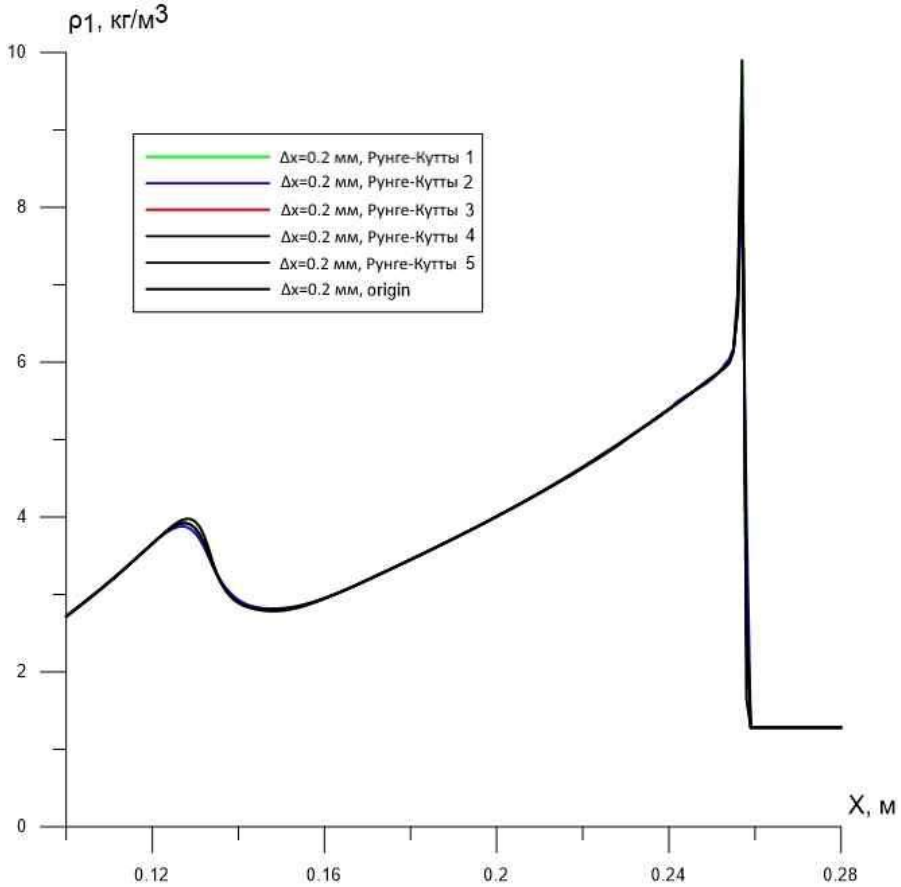


Рис. 2. Профиль плотности газовой фазы при различной точности расчётной схемы по времени

Была проведена работа по увеличению порядка точности по времени для численной схемы TVD. Для этого была рассмотрена схема Рунге — Кутты со второго — четвёртого порядка точности. Корректность работы изменённой программы проверялась на тестовой задаче о распространении гетерогенной детонационной волны по плоскому каналу. Сравнение проводилось с результатами расчётов оригинальной программы с первым порядком точности по времени, профили плотности газа на один и тот же момент времени показаны на рис. 2 (одномерный расчёт). Видно, что профили сливаются полностью, т. е. вне зависимости от порядка схемы решение остаётся неизменным. Имеются незначительные расхождения в точках перегиба в волне разрежения. Однако повышение порядка аппроксимации по времени ведёт к увеличению времени расчёта схемы: в 1.9 раза для 2-го порядка, 2.5 — для 3-го, 3.5 — для 4-го, 4.1 — для 5-го при одинаковом числе Куранта. Это объясняется тем, что для реализации подобной схемы требуются пересчитывать параметры для каждого шага схемы. Тесты показали, что для используемой схемы TVD применение схем с большими порядками точности по времени не даёт прироста производительности. Поскольку в TVD схеме используется адаптивный шаг по времени [39], то увеличение порядка точности по времени приводит только к увеличению повторения циклов.

Для ускорения расчётов была применена технология параллельного программирования с использованием библиотеки OpenMP. При тестировании эффективности распараллеливания задачи рассматривались в одномерной и двумерной постановке. При распараллеливании программы со схемой Рунге — Кутты первого порядка на 4 потока расчёт происходит в 1.8 раза быстрее исходной программы. Схемы Рунге — Кутты более высоких порядков работают медленнее исходной схемы: второго порядка — в 1.1 раза, третьего — в 1.6 раза, четвёртого — в 1.8 раза и пятого — в 2.5 раза, как на одном процессоре, так и в параллельных расчётах. При увеличении числа Куранта схема Рунге — Кутты проявляет нестабильность, что связано с применением в численной реализации адаптивного шага по времени.

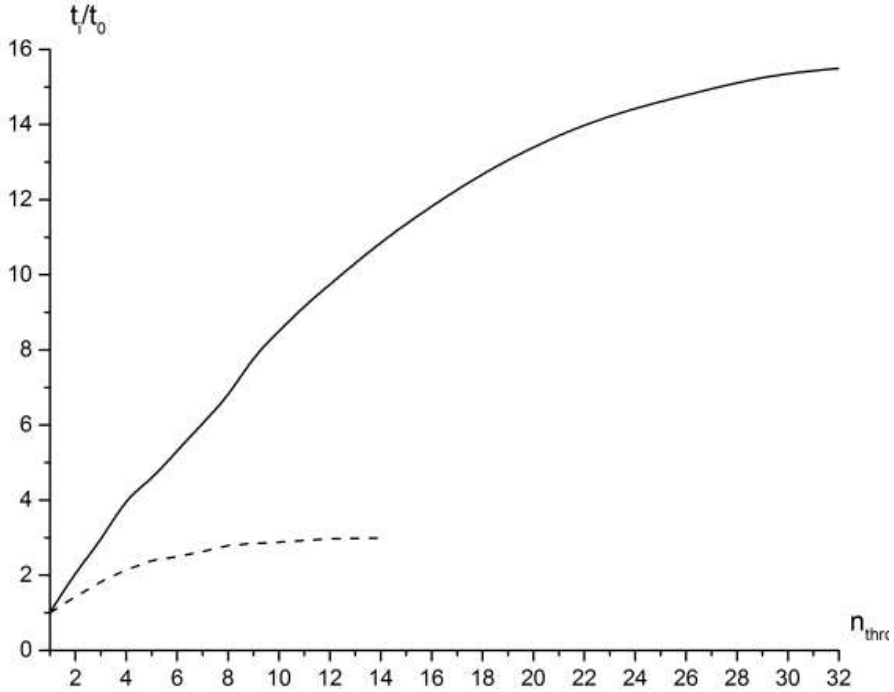


Рис. 3. Зависимость времени счёта тестовой задачи от количества потоков при использовании библиотеки OpenMP. Пунктирная линия — одномерные расчёты, сплошная линия — двумерные расчёты

Сравнение времени расчёта на различном количестве потоков и прирост производительности с увеличением используемых ядер представлен на рис. 3. В двумерной и одномерной постановке эффективность распараллеливания одинакова, а прирост производительности зависит от количества узлов сетки (рис. 3). Для одномерных расчётов происходит выход на экспоненциальное значение при достижении количества используемых ядер более 8 (пунктирная кривая). При распараллеливании для 2D задачи на этом же количестве потоков наблюдается линейный прирост производительности (рис. 3), а эффективный прирост производительности имеет место при решении тестовой задачи на 30 потоках (сплошная линия). Время расчёта по сравнению с исходной программой (без OpenMP) сократилось в 16 раз. Тестирование показало, что в дальнейшем использование программы с подключённой библиотекой OpenMP даёт значительный прирост производительности, и это будет использовано в расчётах.

2. Тестирование механизма горения частиц алюминия

В работах [18; 24; 28] отмечена зависимость скорости детонационной волны от загрузки и от размера частиц. Такое поведение вытекает из формул (1)–(3), зависящих как от размера частиц, так и от соотношения окислителя к горючему. Далее будут приведены результаты по тестированию модели детонации по зависимости от загрузки и размера частиц.

Тестирование модели детонационного горения алюминия проводилось на задаче распространения гетерогенной детонации во взвеси частиц алюминия в воздухе в плоском канале высотой 15 см с различной загрузкой реагирующих частиц диаметром $d = 1$ мкм. Инициирование детонационного горения осуществлялось с помощью камеры высокого давления длиной 3 см с параметрами $p_{\text{КВД}} = 10$ МПа, $T_{\text{КВД}} = 5000$ К. Мембрана камеры имела небольшой наклон для инициирования поперечных волн.

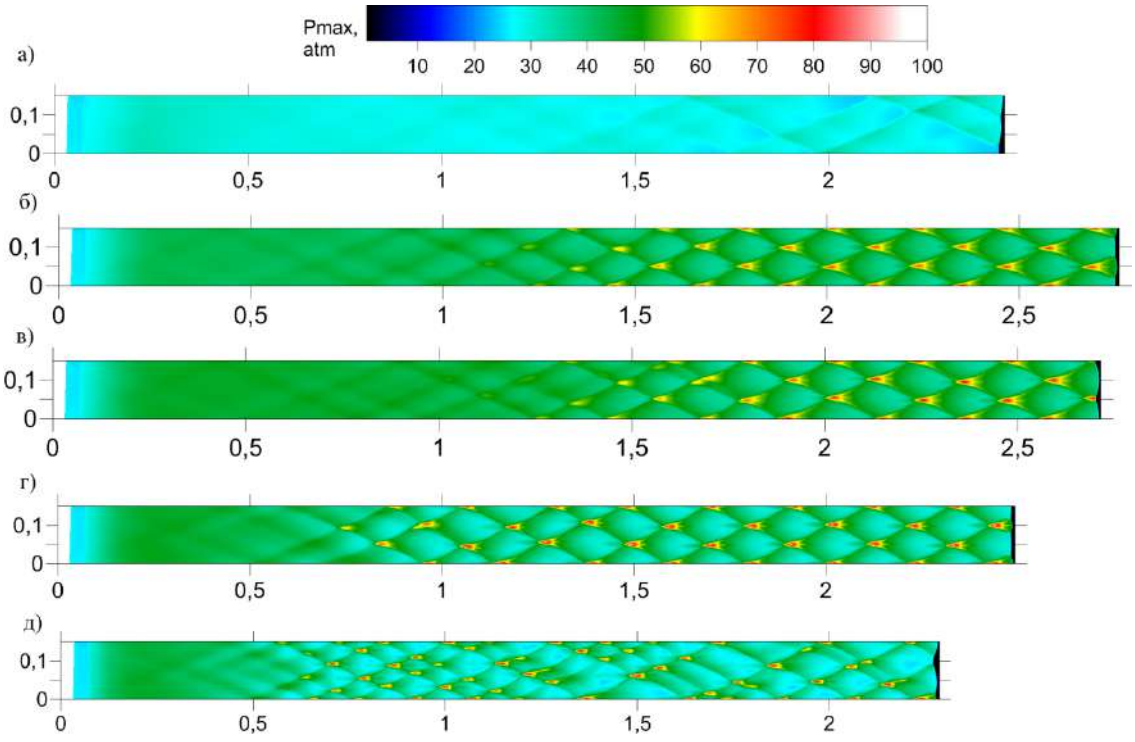


Рис. 4. Картины истории максимального давления при загрузке частиц $\rho_2 = 150$ г/м^3 (а), $\rho_2 = 300$ г/м^3 (б), $\rho_2 = 450$ г/м^3 (в), $\rho_2 = 600$ г/м^3 (г) и $\rho_2 = 750$ г/м^3 (д)

На рис. 4 представлены результаты расчётов в виде картин истории максимального давления ($p_{\max}(x,y) = \max_t(x,y,t)$) на один и тот же момент времени $t = 1.5$ мс. Плотность частиц алюминия варьировалась от $\rho_2 = 150$ г/м^3 (рис. 4, а) до 750 г/м^3 (рис. 4, д). Для малой загрузки частиц видно медленное зарождение слабых поперечных волн. На момент времени $t = 1.5$ мс наблюдается пара поперечных волн, образующих нерегулярную ячеистую структуру с одной ячейкой на ширину канала, и появление малозаметной третьей слабой поперечной волны (рис. 4, а). Скорость распространения фронта составляет $D = 1.51$ км/с. При увеличении плотности частиц до $\rho_2 = 300$ г/м^3 (рис. 4, б) происходит формирование регулярной ячеистой структуры с 1.5 ячейки на ширину канала и скоростью лидирующего фронта порядка $D = 1.66$ км/с. При плотности $\rho_2 = 450$ г/м^3 (рис. 4, в) и $\rho_2 = 600$ г/м^3 (рис. 4, г) ячеистая структура остаётся регулярной с размером ячейки $\lambda \approx 10$ см. Скорость лидирующего фронта составляет 1.63 и 1.48 км/с соответственно. При $\rho_2 = 750$ г/м^3 наблюдается замедление фронта до $D = 1.35$ км/с (рис. 4, д), при этом ячеистая структура становится нерегулярной и составляет 1.5 ячейки на ширину канала. Для всех рассмотренных случаев давление в тройных точках не превышало 100–105 атм. С увеличением загрузки частиц происходит сохранение давления в поперечных волнах на уровне 45–55 атм и снижение давления вне поперечных волн с 40 атм для $\rho_2 = 300$ г/м^3 до 25 атм для $\rho_2 > 600$ г/м^3.

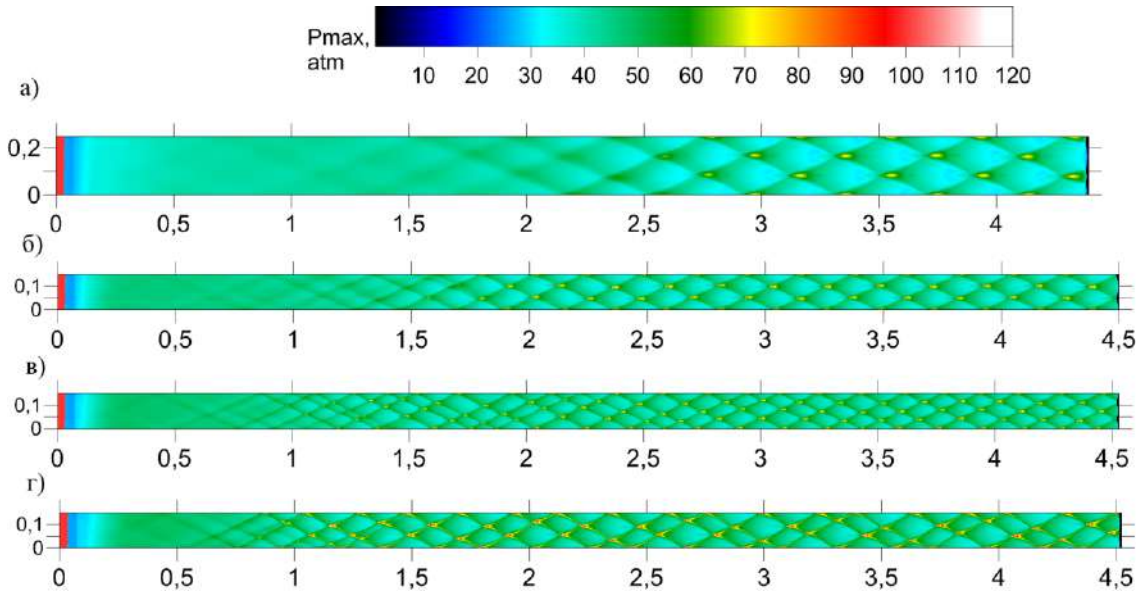


Рис. 5. Картины истории максимального давления при плотности частиц $\rho_2 = 450$ г/м^3 и размере частиц $d_2 = 2$ мкм (а), $d_2 = 1$ мкм (б), $d_2 = 0.6$ мкм (в), $d_2 = 0.3$ мкм (г)

На рис. 5 представлены результаты расчётов для взвеси алюминия в воздухе при плотности частиц $\rho_2 = 450$ г/м^3 и варьировании размера частиц d_2 от 2 до 0.3 мкм. Для частиц менее 1 мкм учитывается увеличение энергии активации (2) согласно [34]. Инициирование детонации осуществлялось с помощью камеры высокого давления с параметрами $p_{\text{КВД}} = 10$ МПа, $T_{\text{КВД}} = 5000$ К. Ширина канала составляла 25 см для $d_2 = 2$ мкм (рис. 5, а) и 15 см — для частиц $d_2 = 0.3$, 0.6 и 1 мкм (рис. 5, б–г). Видно, что с уменьшением размера частиц происходит уменьшение зоны формирования поперечных волн и развития ячеистой детонации. Так, для частиц $d_2 = 2$ мкм (рис. 5, а) ячеистая структура формируется на расстоянии $x = 2.5$ м от начала канала. Формируется ячеистая структура с размером ячейки $\lambda \approx 17$ см. Скорость распространения детонации составляет около 1.73 км/с. Давление в тройных точках составляет около 70–80 атм. Для $d_2 = 1$ мкм (рис. 5, б)

формирование ячеистой структуры происходит на расстоянии $x = 1.5$ м от начала канала. Размер ячейки составляет около $\lambda \approx 10$ см, а скорость фронта немного увеличивается и достигает 1.77 км/с. Давление в тройных точках возрастает до величины 100 атм. Для частиц $d_2 = 0.3$ и 0.6 мкм образование ячеистых структур происходит на расстоянии $x = 1$ м от начала канала. При $d_2 = 0.6$ мкм формируется регулярная ячеистая структура с размером ячейки $\lambda \approx 7.5$ см (рис. 5, в). Для $d_2 = 0.3$ мкм развивается нерегулярная ячеистая структура (рис. 5, г). Это происходит из-за того, что при переходе в субмикронный диапазон энергия активации начинает зависеть от размера частиц (1), (2). Размер ячейки колеблется в диапазоне $\lambda \approx 7$–10 см. Скорость распространения фронта для частиц субмикронного диапазона составляет около 1.79 км/с. Давление в тройных точках колеблется в диапазоне 100–110 атм. Расчёты подтверждают данные других авторов, что на размер детонационной ячейки влияет размер частиц. Для субмикронного диапазона частиц ячеистая структура может становиться нерегулярной, в результате чего определение среднего размера ячейки становится затруднительным.

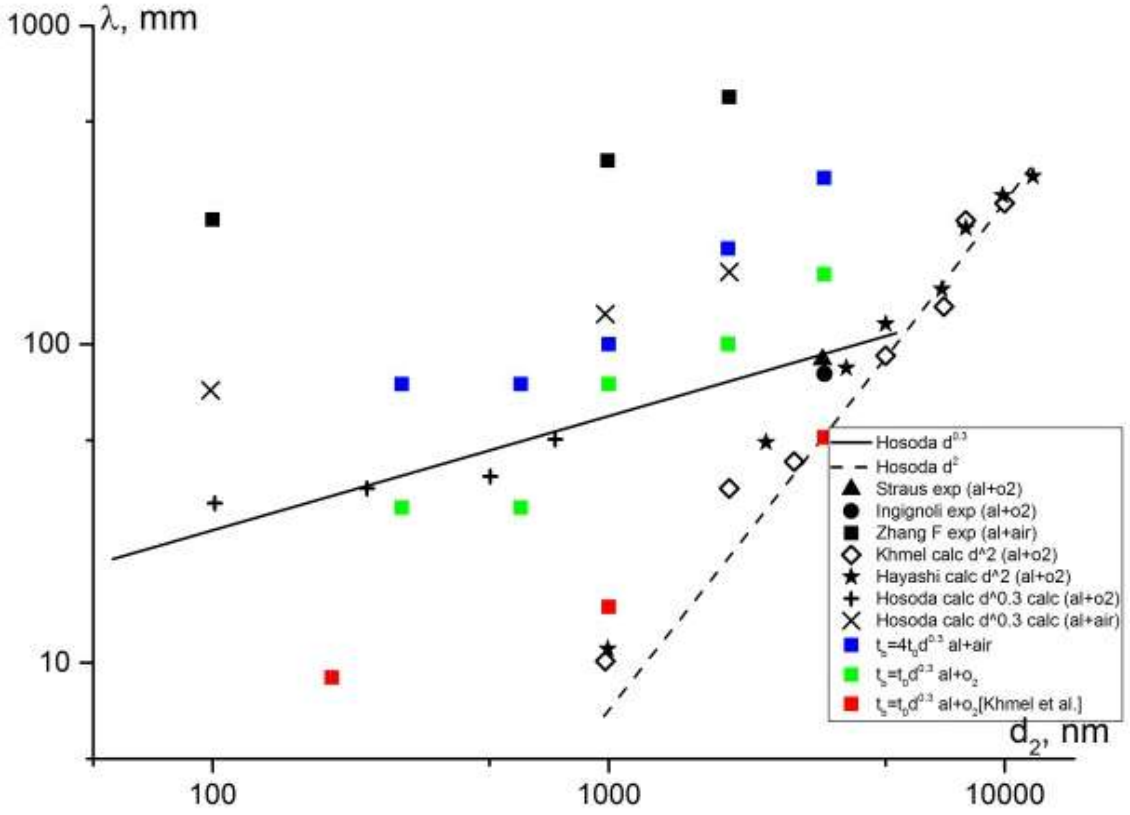


Рис. 6. Сравнение результатов расчётов по размеру детонационной ячейки

Верификация модели по размеру детонационной ячейки в зависимости от диаметра реагирующих частиц приведена на рис. 6 в сопоставлении результатов с данными других авторов. Экспериментальные данные по детонации в чистом кислороде для сферических частиц 3.5 мкм (Ingignoli) обозначены кружками, для хлопьевидных частиц (Straus) — треугольниками, для субмикронного диапазона размеров частиц [18] — плюсами (вдоль данных значений сплошной линией приведена зависимость $d^{0.3}$). Штриховая линия отвечает модели горения в диффузионном режиме d^2 и соотносится с данными [15] (пустые ромбы) и Hayashi [22] (звёзды). Обе модели d^2 и $d^{0.3}$ стыкуются в области $d_2 \approx 3.5$ мкм. Экспериментальные точки Zhang (квадраты) отвечают детонации взвеси алюминия в воздухе в открытом объёме, что объясняет более высокие величины размера ячеек. Согласно [18] (кресты) размер ячейки воздушных смесей больше относительно смесей алюминия в кислороде, что

обусловлено примерно в 4 раза меньшим количеством окислителя и удлинением зоны реакции. С использованием модели, учитывающей переход от диффузионного режима горения к кинетическому [28] (расширенная модель А. В. Федорова и Т. А. Хмель [15] — красные квадраты), размер ячеек уменьшается в сравнении с [18] (плюсы). При использовании представленной в настоящей работе расширенной модели детонационного горения алюминия (1), (2) с энерговыделением согласно модели [41] применительно к кислородным взвесям (зелёные квадраты) получено хорошее совпадение с данными [18] (плюсы). Для воздушных взвесей при увеличении τ_{20} в 4 раза результаты (рис. 6, синие квадраты) хорошо согласуются с результатами [18] для воздуха (кресты).

Сравнение определённой в рамках модели скорости детонационной волны с данными других авторов представлено на рис. 7. Штрих-пунктирной кривой показаны данные термодинамических расчётов в рамках программ [42] и [43]. Можно отметить завышенную (порядка 2.3 км/с) скорость детонационной волны в сравнении с экспериментальной (около 1.6 км/с в работах F. Zhang и др. [44], треугольники, рис. 7). Это можно объяснить тем, что в термодинамических расчётах алюминий считается газообразным, соответственно, модели не учитывают нагрев, плавление и испарение частиц. Результаты расчётов для воздушных взвесей (сплошные кривые) сравнивались с данными [18], где представлены результаты различных авторов. Для частиц 0.3 мкм (чёрная кривая) и 1 мкм (красная кривая) зависимости скорости детонации от загрузки частиц практически совпадают и согласуются с данными термодинамических расчётов [18] (штриховая линия) и данными Борисова и соавторов [45] (кружки). Значения для частиц 3.5 мкм (синяя кривая) находятся в небольшом разбросе с результатами по скорости 0.3 и 1 мкм, но согласуются с данными расчётов [18] (квадраты) и данными [44] (треугольники).

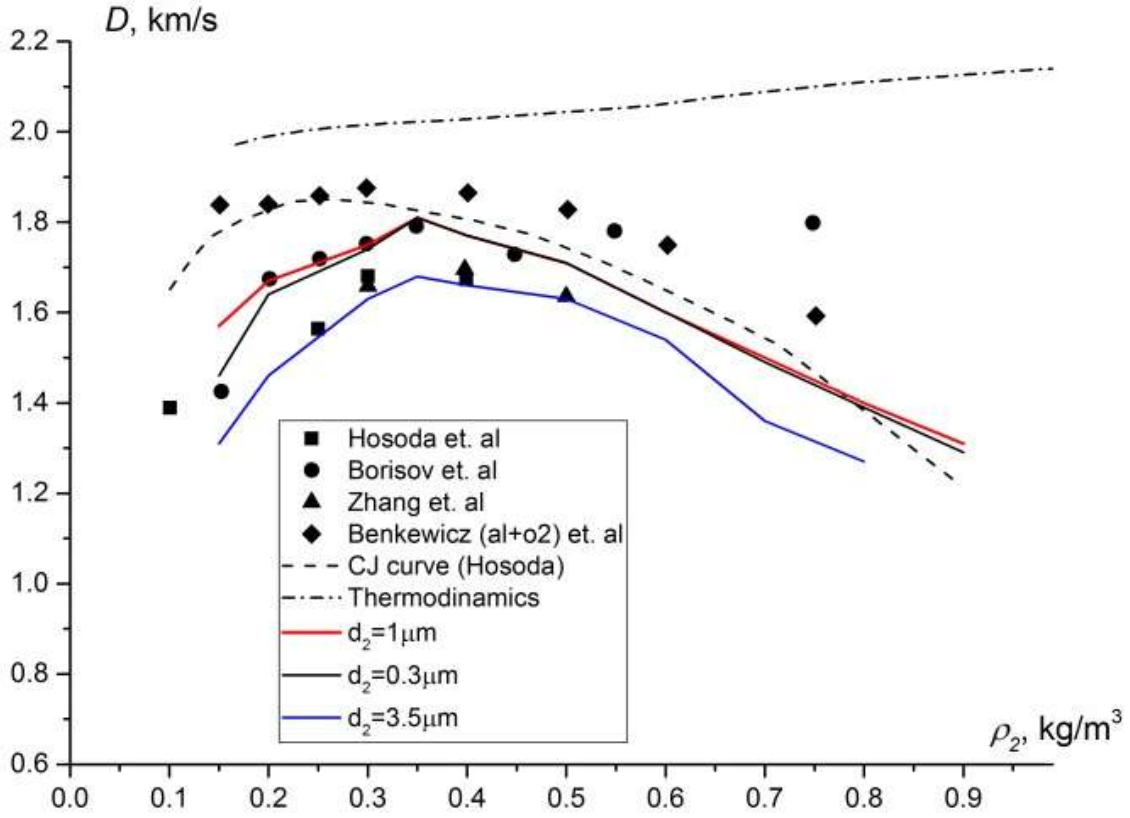


Рис. 7. Сравнение результатов расчётов по скорости детонационной волны

Выводы

Методами численного моделирования проведено тестирование приведённой кинетической схемы детонационного горения частиц алюминия в воздухе, которая учитывает образование газообразных субокислов алюминия и частиц конденсированного оксида алюминия.

Проведено тестирование численного алгоритма с применением методов параллельного программирования на основе библиотеки OpenMP, показавшее ускорение до 16 раз на 30 потоках.

Проведено тестирование численной схемы Рунге — Кутты различных порядков по времени, которое показало оптимальное использование схемы первого порядка с адаптивным временным шагом соответственно условию Куранта.

Проведены расчёты двумерных течений ячеистой детонации взвесей алюминия в воздухе в плоском канале при различных размерах частиц и различной загрузке. Показано, что загрузка частиц в среднем диапазоне концентраций не влияет на размер детонационной ячейки. Нарушение регулярности ячеистой структуры и изменение размера ячейки происходит либо для слишком бедных, либо для слишком богатых газовзвесей частиц. Влияние размера частиц на размер детонационной ячейки согласуется с экспериментальными и расчётными данными других авторов. Сравнение по скорости детонации для взвесей различной дисперсности и различной загрузки показало хорошее согласование с данными других авторов.

Список литературы

1. **Li G., Yang H. X., Yuan C. M., Eckhoff R. K.** A catastrophic aluminium-alloy dust explosion in China // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2016. Vol. 39. P. 121–130.
2. **Taveau J., Hochgreb S., Lemkowitz S., Roekaerts D.** Explosion hazards of aluminum finishing operations // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2018. Vol. 51. P 84–93.
3. **Eckhoff R. K., Li G.** Industrial dust explosions. A brief review // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, no. 4. P. 1669.
4. **Khasainov B. A., Veyssiere B.** Steady, plane, double-front detonations in gaseous detonable mixtures containing a suspension of aluminum particles // Dynamics of Explosions. 1988. P. 284–299.
5. **Veyssiere B., Khasainov B. A.** A model for steady, plane, double-front detonations (DFD) in gaseous explosive mixtures with aluminum particles in suspension // Combustion and Flame. 1991. Vol. 85, no. 1–2. P. 241–253.
6. **Fedorov A. V.** Structure of the heterogeneous detonation of aluminum particles dispersed in oxygen // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 1992. Vol. 28, no. 3. P. 277–286.
7. **Veyssiere B., Ingignoli W.** Existence of the detonation cellular structure in two-phase hybrid mixtures // Shock Waves. 2003. Vol. 12, no. 4. P. 291–299.
8. **Бекстед М. В.** Анализ данных по времени горения частиц алюминия // Физика горения и взрыва. 2005. Т. 41, вып. 5. С. 55–69.
9. **Lynch P., Krier H., Glumac N.** A correlation for burn time of aluminum particles in the transition regime // Proceedings of the Combustion Institute. 2009. Vol. 32, iss. 2. P. 1887–1893.
10. **Briand A., Veyssiere B., Khasainov B. A.** Modelling of detonation cellular structure in aluminium suspensions // Shock Waves. 2010. Vol. 20, no. 6. P. 521–529.

11. **Balakrishnan K., Kuhl A. L., Bell J. B., Beckner V. E.** An empirical model for the ignition of explosively dispersed aluminum particle clouds // Shock Waves. 2012. Vol. 22, no. 6. P. 591–603.
12. **Wu W., Wang Y., Wu K., Ma Z., Han W., Wang J., Wang G., Zhang M.** Experimental evaluation of aluminum powder fuel in a hydrogen/oxygen detonation tube // International Journal of Hydrogen Energy. 2023. Vol. 48, no. 62. P. 24089–24100.
13. **Starik A. M., Savel'ev A. M., Titova N. S.** Specific features of ignition and combustion of composite fuels containing aluminum nanoparticles (Review) // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2015. Vol. 51, no. 2. P. 197–222.
14. **Benkiewicz K., Hayashi A. K.** Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement // Shock Waves. 2003. Vol. 12, no. 5. P. 385–402.
15. **Fedorov A. V., Khmel T. A.** Numerical simulation of formation of cellular heterogeneous detonation of aluminum particles in oxygen // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2005. Vol. 41, no. 4. P. 435–448.
16. **Zhang F., Murray S. B., Gerrard K. B.** Aluminum particles-air detonation at elevated pressures // Shock Waves. 2006. Vol. 15, no. 5. P. 313–324.
17. **Veyssiere B., Khasainov B. A., Briand A.** Investigation of detonation initiation in aluminium suspensions // Shock Waves. 2008. Vol. 18, no. 4. P. 307–315.
18. **Hosoda H., Hayashi A. K., Yamada E.** Numerical analysis on combustion characteristics of nano aluiminum particle-oxygen two-phase detonation // Science and Technology of Energetic Materials. 2013. Vol. 74, no. 1–2. P. 34–40.
19. **Хмель Т. А., Лаврук С. А., Афанасенков А. А.** Распространение гибридной детонации в водород-кислородной смеси с частицами алюминия в канале с расширением // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 3. С. 371–386.
20. **Афанасенков А. А., Хмель Т. А.** Валидация модели гибридной детонации водород-воздушных смесей с частицами алюминия // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, вып. 2. С. 177–186.
21. **Хмель Т. А., Лаврук С. А.** Моделирование течений ячеистой детонации в смеси водород-кислород-аргон с частицами алюминия // Физика горения и взрыва. 2024. Т. 60, вып. 3. С. 104–116.
22. **Benkiewicz K., Hayashi A. K.** Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement // Shock Waves. 2003. Vol. 12, no. 5. P. 385–402.
23. **Sundaram D. S., Yang V., Zarko V. E.** Combustion of nano aluminum particles (Review) // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2015. Vol. 51, no. 2. P. 173–196.
24. **Khmel T. A., Lavruk S. A.** Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2021. Vol. 72. P. 104522.
25. **Lavruk S. A., Khmel T. A.** Regimes and critical conditions of detonation propagation in expanding channels in gas suspensions of ultrafine aluminum particles // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2021. Vol. 71. P. 104476.
26. **Fedorov A. V., Khmel T. A.** Cellular detonations in bidispersed gas-particle mixtures // Shock Waves. 2008. Vol. 18, no. 4. P. 277–280.
27. **Lavruk S. A., Fedorov A. V., Khmel T. A.** Cellular detonation propagation and degeneration in bi-disperse gas suspensions of micron- and nano-sized aluminum particles // Shock Waves. 2020. Vol. 30, no. 3. P. 273–286.
28. **Khmel T. A., Lavruk S. A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron aluminum particles with different distributions of concentration // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2022. Vol. 58, no. 3. P. 253–268.

29. **Khmel T. A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron and nanosized aluminum particles // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2019. Vol. 55, no. 5. P. 580–588.
30. **Khmel T. A., Lavruk S. A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of two fractions of aluminum nanoparticles // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2020. Vol. 56, no. 2. P. 188–197.
31. **Tropin D. A., Lavruk S. A.** Physicomathematical modeling of attenuation of homogeneous and heterogeneous detonation waves by clouds of water droplets // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2022. Vol. 58, no. 3. C. 80–90.
32. **Khmel T. A., Lavruk S. A.** Interaction of cellular detonation in aluminum particle suspensions with nonuniform concentrations and clouds of inert particles // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2023. Vol. 59, no. 3. P. 308–320.
33. **Kudryavtsev A. N., Kashkovsky A. V., Shershnev A. A., Kratova Y. V.** Three-dimensional numerical simulation of heterogeneous spin detonation in the Al/O2 gas suspension in channels with a circular cross section // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2023. Vol. 59, no. 1. P. 95–102.
34. **Khmel T. A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron and nanosized aluminum particles // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2019. Vol. 55, no. 5. P. 580–588.
35. **Fedorov A. V., Khmel T. A.** Problems of closing models that describe detonation of gas suspensions of ultrafine aluminum particles (Review) // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2019. Vol. 55, no. 1. P. 1–17.
36. **Bedarev I. A., Rylova K. V., Fedorov A. V.** Application of detailed and reduced kinetic schemes for the description of detonation of diluted hydrogen–air mixtures // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2015. Vol. 51, no. 5. P. 528–539.
37. **Starik A. M., Kuleshov P. S., Sharipov A. S., Titova N. S., Tsai C. J.** Numerical analysis of nanoaluminum combustion in steam // Combustion and Flame. 2014. Vol. 161, no. 6. P. 1659–1667.
38. **Khmel T. A.** Modeling of dynamic processes in dilute and dense gas suspensions (Review) // Combustion, Explosion and Shock Waves. 2021. Vol. 57, no. 3. P. 257–269.
39. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Vol. 49, no. 3. P. 357–393.
40. **Roache P. J.** Computational Fluid Dynamics. Albuquerque : Hermosa Publ., 1976.
41. **Khmel T. A., Lavruk S. A.** Simulation of cellular detonation flow in a hydrogen-oxygen-argon mixture with aluminum particles // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2024. Vol. 60, no. 3. P. 374–385.
42. **Трусов Б. Г.** Программная система TERRA для моделирования фазовых и химических равновесий // Тр. XIV Межд. конф. по хим. термодинамике. 2002.
43. CEARUN [Электронный ресурс]. URL: https://cearun.grc.nasa.gov/ (дата обращения: 10.04.2025).
44. Shock Wave Science and Technology Reference Library. Vol. 4. Heterogeneous Detonation. Berlin, Heidelberg : Springer, 2009.
45. **Borisov A. A., Khasainov B. A., Saneev E. L., Formin I. B., Khomik S. V., Veyssiere B.** On the detonation of aluminium suspensions in air and in oxygen // Dynamic Structure of Detonation in Gaseous and Dispersed Media. Ed. by A. A. Borisov. Dordrecht : Kluwer, 1991. P. 215–253.

Поступила в редакцию 14.04.2025.
После переработки 11.08.2025.

Сведения об авторах

Лаврук Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия; e-mail: lavruk@itam.nsc.ru.

Афанасенков Александр Александрович, аспирант, Институт теоретической и прикладной механики имени С. А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия; e-mail: afanasenkov@itam.nsc.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 733–749.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-733-749

TESTING A MODEL OF DETONATION COMBUSTION OF AIR SUSPENSION OF ALUMINUM PARTICLES

S.A. Lavruk[a], A.A. Afanasenkov

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[a] lavruk@itam.nsc.ru

The numerical modeling methods were used to test the reduced kinetic scheme of detonation combustion of aluminum particles in air, taking into account the formation of gaseous and condensed aluminum suboxides. The results of testing the numerical algorithm using parallel programming methods and the Runge–Kutta numerical scheme of different orders in time are presented. The results of calculating the cellular detonation of aluminum suspensions in air of different dispersion and loading are presented. It is shown that the degree of regularity of the cellular structure and the cell size are determined by the size and loading of the particles. The detonation velocity depends weakly on the particle size and depends significantly on the loading. The results are in the good agreement with the experimental and calculated data of other authors.

Keywords: *numerical modeling, heterogeneous detonation, gas suspension of aluminum particles, reduced kinetic model.*

References

1. **Li G., Yang H.X., Yuan C.M., Eckhoff R.K.** A catastrophic aluminium-alloy dust explosion in China. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2016, vol. 39, pp. 121–130.
2. **Taveau J., Hochgreb S., Lemkowitz S., Roekaerts D.** Explosion hazards of aluminum finishing operations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2018, vol. 51, pp. 84–93.
3. **Eckhoff R.K., Li G.** Industrial dust explosions. A brief review. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, no. 4, p. 1669.
4. **Khasainov B.A., Veyssiere B.** Steady, plane, double-front detonations in gaseous detonable mixtures containing a suspension of aluminum particles. *Dynamics of Explosions*, 1988, pp. 284–299.
5. **Veyssiere B., Khasainov B.A.** A model for steady, plane, double-front detonations (DFD) in gaseous explosive mixtures with aluminum particles in suspension. *Combustion and Flame*, 1991, vol. 85, no. 1–2, pp. 241–253.
6. **Fedorov A.V.** Structure of the heterogeneous detonation of aluminum particles dispersed in oxygen. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 277–286.
7. **Veyssiere B., Ingignoli W.** Existence of the detonation cellular structure in two-phase hybrid mixtures. *Shock Waves*, 2003, vol. 12, pp. 291–299.
8. **Beckstead M.W.** Correlating aluminum burning times. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 533–546.
9. **Lynch P., Krier H., Glumac N.** A correlation for burn time of aluminum particles in the transition regime. *Proceedings of the Combustion Institute*, 2009, vol. 32, iss. 2, pp. 1887–1893.

This research was funded by Russian Science Foundation, project number 24-79-00046, https://rscf.ru/project/24-79-00046/.

10. **Briand A., Veyssiere B., Khasainov B.A.** Modelling of detonation cellular structure in aluminium suspensions. *Shock Waves*, 2010, vol. 20, no. 6, pp. 521–529.
11. **Balakrishnan K., Kuhl A.L., Bell J.B., Beckner V.E.** An empirical model for the ignition of explosively dispersed aluminum particle clouds. *Shock Waves*, 2012, vol. 22, no. 6, pp. 591–603.
12. **Wu W., Wang Y., Wu K., Ma Z., Han W., Wang J., Wang G., Zhang M.** Experimental evaluation of aluminum powder fuel in a hydrogen/oxygen detonation tube. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2023, vol. 48, no. 62, pp. 24089–24100.
13. **Starik A.M., Savel'ev A.M., Titova N.S.** Specific features of ignition and combustion of composite fuels containing aluminum nanoparticles (Review). *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 197–222.
14. **Benkiewicz K., Hayashi A.K.** Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement. *Shock Waves*, 2003, vol. 12, no. 5, pp. 385–402.
15. **Fedorov A.V., Khmel T.A.** Numerical simulation of formation of cellular heterogeneous detonation of aluminum particles in oxygen. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2005, vol. 41, no. 4, pp. 435–448.
16. **Zhang F., Murray S.B., Gerrard K.B.** Aluminum particles-air detonation at elevated pressures. *Shock Waves*, 2006, vol. 15, no. 5, pp. 313–324.
17. **Veyssiere B., Khasainov B.A., Briand A.** Investigation of detonation initiation in aluminium suspensions. *Shock Waves*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 307–315.
18. **Hosoda H., Hayashi A.K., Yamada E.** Numerical analysis on combustion characteristics of nano aluiminum particle-oxygen two-phase detonation. *Science and Technology of Energetic Materials*, 2013, vol. 74, no. 1–2, pp. 34–40.
19. **Khmel T.A., Lavruk S.A., Afanasenkov A.A.** Popagation of hybrid detonation in a hydrogen-oxygen mixture with aluminum particles in a channel with expansion. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, iss. 3, pp. 371–386.
20. **Afanasenkov A.A., Khmel T.A.** Validation of the model of hybrid detonation of hydrogen-air mixtures with aluminum particles. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2024, vol. 9, no. 2, pp. 177–186.
21. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Simulation of cellular detonation flow in a hydrogen-oxygen-argon mixture with aluminum particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 374–385.
22. **Benkiewicz K., Hayashi A.K.** Two-dimensional numerical simulations of multi-headed detonations in oxygen-aluminum mixtures using an adaptive mesh refinement. *Shock Waves*, 2003, vol. 12, no. 5, pp. 385–402.
23. **Sundaram D.S., Yang V., Zarko V.E.** Combustion of nano aluminum particles (Review). *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 173–196.
24. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2021, vol. 72, p. 104522.
25. **Lavruk S.A., Khmel T.A.** Regimes and critical conditions of detonation propagation in expanding channels in gas suspensions of ultrafine aluminum particles. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2021, vol. 71, p. 104476.
26. **Fedorov A.V., Khmel T.A.** Cellular detonations in bidispersed gas-particle mixtures. *Shock Waves*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 277–280.
27. **Lavruk S.A., Fedorov A.V., Khmel T.A.** Cellular detonation propagation and degeneration in bi-disperse gas suspensions of micron- and nano-sized aluminum particles. *Shock Waves*, 2020, vol. 30, no. 3, pp. 273–286.
28. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron aluminum particles with different distributions of concentration. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 253–268.

29. **Khmel T.A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron and nanosized aluminum particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 580–588.
30. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of two fractions of aluminum nanoparticles. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 188–197.
31. **Tropin D.A., Lavruk S.A.** Physicomathematical modeling of attenuation of homogeneous and heterogeneous detonation waves by clouds of water droplets. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 80–90.
32. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Interaction of cellular detonation in aluminum particle suspensions with nonuniform concentrations and clouds of inert particles. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 308–320.
33. **Kudryavtsev A.N., Kashkovsky A.V., Shershnev A.A., Kratova Yu.V.** Three-dimensional numerical simulation of heterogeneous spin detonation in the Al/O2 gas suspension in channels with a circular cross section. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2023, vol. 59, no. 1, pp. 95–102.
34. **Khmel T.A.** Modeling of cellular detonation in gas suspensions of submicron and nanosized aluminum particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 580–588.
35. **Fedorov A.V., Khmel T.A.** Problems of closing models that describe detonation of gas suspensions of ultrafine aluminum particles (Review). *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 1–17.
36. **Bedarev I.A., Rylova K.V., Fedorov A.V.** Application of detailed and reduced kinetic schemes for the description of detonation of diluted hydrogen–air mixtures. *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 528–539.
37. **Starik A.M., Kuleshov P.S., Sharipov A.S., Titova N.S., Tsai C.J.** Numerical analysis of nanoaluminum combustion in steam. *Combustion and Flame*, 2014, vol. 161, no. 6, pp. 1659–1667.
38. **Khmel T.A.** Modeling of dynamic processes in dilute and dense gas suspensions (Review). *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 257–269.
39. **Harten A.** High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no. 3, pp. 357–393.
40. **Roache P.J.** *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, Hermosa Publ., 1976.
41. **Khmel T.A., Lavruk S.A.** Simulation of cellular detonation flow in a hydrogen-oxygen-argon mixture with aluminum particles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 374–385.
42. **Trusov B.G.** Programmnaya sistema TERRA dlya modelirovaniya fazovykh i khimicheskikh ravnovesiy [Program TERRA for modeling phase and chemical equilibrium]. *Proceedings of the XIV International Conference on Chemical Thermodynamics*, 2002. (In Russ.).
43. CEARUN. Available at: https://cearun.grc.nasa.gov/, accessed: 10.04.2025.
44. *Shock Wave Science and Technology Reference Library.* Vol.4. *Heterogeneous Detonation.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
45. **Borisov A.A., Khasainov B.A., Saneev E.L., Formin I.B., Khomik S.V., Veyssiere B.** On the detonation of aluminium suspensions in air and in oxygen. *Dynamic Structure of Detonation in Gaseous and Dispersed Media*, ed. by A.A. Borisov. Dordrecht, Kluwer, 1991. Pp. 215–253.

Article received 14.04.2025.
Corrections received 11.08.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 750–766.

УДК 622.279.72 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-750-766

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ ЗАХОРОНЕНИЯ ДИОКСИДА УГЛЕРОДА В ПОДМЕРЗЛОТНЫЙ ВОДОНОСНЫЙ КОЛЛЕКТОР В ГАЗОГИДРАТНОМ СОСТОЯНИИ

И. И. Рожин[1,a], **Г. И. Иванов**[1,2,b]

[1] *Институт проблем нефти и газа СО РАН, ФИЦ Якутский научный центр СО РАН, Якутск, Россия*

[2] *Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия*

[a] *i_rozhin@mail.ru,* [b] *ivganya@mail.ru*

В рамках задачи нагнетания газа через одиночную скважину в горизонтальный водоносный пласт изучается возможность подземного хранения (консервации) углекислого газа в гидратном состоянии, т. е. в твёрдой фазе, которая образуется при определённых термобарических условиях. Вычислительный эксперимент выполнен на основе математической модели неизотермической фильтрации газа и воды, выведенной на основе фундаментальных законов сохранения массы и энергии. В данной модели наиболее полно учтены основные физические особенности процесса: реальные свойства газа, эффект дросселирования, совместное движение воды и газа в однородной пористой среде, массообмен между газом и водой с гидратом. В вычислительном эксперименте оценивается динамика распределения гидратонасыщенности, водонасыщенности, давления и температуры в выбранном пласте, который характеризуется пористостью, проницаемостью и начальными значениями давления, температуры и водонасыщенности. Для проведения вычислительных экспериментов по образованию газогидрата использованы результаты лабораторных экспериментов по определению равновесных условий образования гидратов углексилого газа в поровом пространстве и водных растворах, имитирующих пластовые воды подмерзлотных горизонтов. Показано влияние равновесных условий гидратообразования на основной показатель эффективности процесса — гидратонасыщенность подземного хранилища газа.

Ключевые слова: *углекислый газ, газовый гидрат, многофазная неизотермическая фильтрация, фазовый переход.*

Введение

В настоящее время вопросам хранения газов в гидратном состоянии посвящено достаточно много работ, они представляют несомненный практический интерес и требуют дальнейших исследований. Такой способ хранения газа привлекателен тем, что газ в гидратном состоянии занимает гораздо меньший объём, чем в свободном состоянии при тех же температуре и давлении. Ю. Ф. Макогон в своей монографии [1] отметил, что интересным представляется вопрос сооружения подземных хранилищ газа с гидратными покрышками в районах распространения грунтов с низкой температурой. При этом перспективными выделил восточные районы нашей

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (рег. №122011100157-5).

страны — районы распространения многолетнемёрзлых грунтов, где незначительное заглубление ёмкостей обеспечивает весьма экономичное создание охлаждённых газогидратных хранилищ для выравнивания как суточных, так и сезонных неравномерностей газопотребления [2; 3].

В северных регионах, характеризующихся наличием многолетней мерзлоты, имеются термодинамические предпосылки для хранения газа в гидратном состоянии [1–7] в подмерзлотных водоносных горизонтах, т. е. в твёрдой фазе, которая образуется при закачке газа в пористые коллекторы при определённых термодинамических условиях (при определённых соотношениях между температурой и давлением, зависящих от компонентного состава газа, типа и минерализации пластовых вод) из воды (водного раствора, льда, водяных паров) и низкомолекулярных газов. Преимущества такого способа хранения заключаются в большей компактности и стабильности хранилища, так как газ в гидратном состоянии занимает гораздо меньший объём, чем в свободном состоянии при тех же температуре и давлении (в одном объёме гидрата может содержаться до 170 объёмов газа), и кроме того, при переходе в гидратное состояние связывается свободная пластовая вода. Следовательно, создание таких хранилищ газа будет способствовать многократному снижению объёма хранилищ и повышению их стабильности по сравнению с обычными подземными хранилищами, а подошва многолетнемёрзлых пород будет служить естественным непроницаемым для газа экраном. Более того, небольшая глубина таких хранилищ позволит существенно снизить затраты на их сооружение.

Оценка возможности создания подземных хранилищ газа в гидратном состоянии и, соответственно, подготовка их технологического проекта должны быть основаны на современных научных достижениях соответствующих разделов механики жидкости и газа, тепломассообмена, физико-химии газовых гидратов, а также — вычислительной математики.

В последние годы глобальное изменение климата, вызванное выбросами парниковых газов, стимулировало интерес к разработке различных технологий для снижения концентрации углекислого газа (CO_2) в атмосфере. Известны несколько подходов для долгосрочного хранения и утилизации улавливаемого антропогенного CO_2, включая закачку в геологические формации (например, в истощённые залежи нефти и газа, угольные пласты и засолённые водоносные горизонты), глубоководное хранение в океане и связывание путём химических превращений (например, для производства удобрений, сухого льда, пластмасс и др.), замещение метана в его гидрате диоксидом углерода и др. [8]. Заметно растёт интерес к математическому моделированию образования газовых гидратов в пористых средах. В частности, это связано с тем, что увеличение концентрации углекислого газа в атмосфере, вызванное антропогенной деятельностью, негативно сказывается на биосфере Земли, и одним из важных направлений подземного хранения газа является захоронение диоксида углерода в пористых коллекторах в газогидратном состоянии.

В работах [9–16], посвящённых математическому моделированию образования газовых гидратов в пористых коллекторах, использовались некоторые из следующих упрощающих допущений: 1) не учитывались реальные свойства газа; 2) не учитывалась зависимость равновесных условий образования гидратов от состава природного газа (ПГ), от типа и степени минерализации пластовых вод; 3) пластовая вода считалась неподвижной; 4) в уравнении энергии не учитывались адиабатическое расширение и эффект Джоуля — Томсона; 5) граничные условия ставились таким образом, чтобы свести исходную задачу к автомодельной; 6) соответствующие дифференциальные уравнения решались приближёнными аналитическими

методами.

В данной работе используется метод оценки возможности создания подземного газохранилища в гидратном состоянии в подходящих с геологической точки зрения водоносных пластах (подмерзлотных горизонтах), предложенный в работах [17–21]. При этом в математической модели все вышеупомянутые допущения не используются. Для решения соответствующих начально-краевых задач разработаны эффективные вычислительные алгоритмы, основанные на методе конечных разностей.

1. Постановка задачи

В работах [17–21] была оценена концептуальная возможность подземного хранения природного газа в гидратном состоянии в подмерзлотных водоносных горизонтах. Она основана на использовании математической модели многофазной неизотермической фильтрации реального газа и воды [22], в которой химическая реакция гидратообразования происходит при температуре, существенно зависящей от давления газа в фильтрующемся потоке. В этой модели наиболее полно учтены основные физические особенности этого процесса: реальные свойства газа, эффект Джоуля — Томсона, совместное движение воды и газа в однородной пористой среде, массообмен между газом и водой с гидратом. При этом используются модифицированные уравнения теории неизотермической многофазной фильтрации, которые выводятся на основе фундаментальных законов сохранения массы и энергии. В качестве уравнений движения используется обобщённый закон фильтрации Дарси для движущихся фаз, коэффициенты проницаемости в котором являются функциями насыщенности соответствующей фазой [23]. Замыкающие математическую модель соотношения: уравнение состояния реального газа; зависимости фазовых проницаемостей от соответствующих насыщенностей; зависимость температуры гидратообразования от давления газа, коэффициенты которой являются функциями компонентного состава природного газа, типа и минерализации пластовых вод.

Рассмотрение задачи выполнено для осесимметричной модели нагнетания газа через одиночную скважину в горизонтальный водоносный пласт, кровля и подошва которого непроницаемы и теплоизолированы. Считается, что течение газа происходит в пласте, изначально насыщенном водой либо водой вместе с газом. Скелет пористой среды недеформируемый, газ находится только в газообразном и гидратном, вода — только в жидком и гидратном состояниях, т. е. образования льда и пара не происходит.

В работе [24] показано, что доля теплопроводности в общем балансе переноса тепла пренебрежимо мала по сравнению с конвекцией, что позволяет в уравнении энергии принять равной нулю кондуктивную составляющую. Тогда выведенное на основе фундаментальных законов гидромеханики многофазных сред [25; 26] с учётом обобщённого закона Дарси уравнение энергии существенно упрощается. При этом вместо условия непроницаемости (отсутствие притока газа) на контуре пласта, использованного в работах [17–19], в данной работе, как в работах [20; 21], задаётся условие, которое допускает вытеснение воды за пределы границы хранилища.

Приведём полную систему дифференциальных уравнений начально-краевой задачи образования гидратов при нагнетании газа в однородный пористый пласт, изначально насыщенный газом и водой [17–21]:

$$(\rho c)_e \frac{\partial T}{\partial t} - mq\rho_h \frac{\partial \nu}{\partial t} - m(1-\nu-\sigma)\left(1+\frac{T}{z}\frac{\partial z}{\partial T}\right)\frac{\partial p}{\partial t} =$$
$$= k(1-\nu)\left(\rho_w c_w \frac{f_w}{\mu_w} + \rho_g c_g \frac{f_g}{\mu_g}\right)\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial r} - k(1-\nu)\rho_g \frac{f_g}{\mu_g}\frac{RT^2}{p}\frac{\partial z}{\partial T}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2, \tag{1}$$

$$m\frac{\partial}{\partial t}\left((1-\nu-\sigma)\frac{p}{zT}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k(1-\nu)f_g}{\mu_g}\frac{p}{zT}\frac{\partial p}{\partial r}\right) - m\rho_h \varepsilon R\frac{\partial \nu}{\partial t}, \tag{2}$$

$$m\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{k(1-\nu)f_w}{\mu_w}\frac{\partial p}{\partial r}\right) - m(1-\varepsilon)\frac{\rho_h}{\rho_w}\frac{\partial \nu}{\partial t}, \tag{3}$$

$$p(r,0) = p_0,\ T(r,0) = T_0,\ \nu(r,0) = \nu_0,\ \sigma(r,0) = \sigma_0, \tag{4}$$

$$T(r_b,t) = T_b,\ p(r_b,t) = p_b(t) \text{ или } 2\pi r_b H\frac{\rho_g}{\rho_n}\frac{k(1-\nu)f_g}{\mu_g}\frac{\partial p(r_b,t)}{\partial r} = -Q, \tag{5}$$

$$-\frac{\partial p(r_k,t)}{\partial r} = \frac{f_w(p(r_k,t)-p_0)}{r_k \ln(r_{out}/r_k)}. \tag{6}$$

В математической модели (1)–(6) приняты следующие обозначения: $(\rho c)_e = (1-m)\rho_s c_s + m(1-\nu-\sigma)\rho_g c_g + m\rho_h c_h + m\rho_w c_w$ — эффективное значение объёмной теплоёмкости пористой среды, содержащей газ, гидрат и пластовую воду; c — удельная теплоёмкость, f — фазовая проницаемость, H — мощность пласта, k — абсолютная проницаемость, m — пористость, p — давление, q — удельная теплота фазового перехода «газ + вода (водный раствор) $\to$ гидрат», R — газовая постоянная, r — радиальная координата, r_b — наружный радиус скважины, r_k — радиус контура пласта, r_{out} — радиус гидродинамического влияния, T — температура, t — время, z — коэффициент сжимаемости, ε — содержание газа в единице объёма гидрата, μ — динамическая вязкость, ρ — плотность, ρ_n — плотность газа при нормальных физических условиях, σ — водонасыщенность, ν — гидратонасыщенность. Нижние индексы g, h, s, w, 0 величин означают газ, гидрат, скелет пористой среды, воду и начальное состояние соответственно.

Уравнение энергии (1), уравнения фильтрации газа (2) и воды (3) с начальными условиями (4), а также граничными условиями на забое скважины (5) и на контуре хранилища (6) замыкаются:

1) соотношениями для относительных фазовых проницаемостей газа и воды [23; 26; 27]:

$$f_g(G) = \begin{cases} \left(\frac{G-0.1}{0.9}\right)^{3.5}, & 0.1 < G \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant G \leqslant 0.1, \end{cases} \tag{7}$$

$$f_w(\sigma) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma-0.2}{0.8}\right)^{3.5}, & 0.2 < \sigma \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant \sigma \leqslant 0.2, \end{cases} \tag{8}$$

где $G = 1-\sigma-\nu$ — газонасыщенность пористой среды;

2) условием термодинамического равновесия «газ + вода (водный раствор) $\to$ гидрат»

$$T = \alpha_1 \ln p + \alpha_2, \tag{9}$$

где α_1, α_2 — эмпирические константы, определяемые по экспериментальным данным или путём аппроксимации равновесных условий гидратообразования для газа данного состава с учётом типа и степени минерализации пластовых вод, которые можно вычислить по методикам [28; 29];

3) уравнением состояния реального газа

$$\rho_g = p/zRT, \tag{10}$$

где зависимость коэффициента сжимаемости газа от давления и температуры определяется эмпирическим уравнением Латонова — Гуревича [30]:

$$z = (0.17376 \ln (T/T_c) + 0.73)^{p/p_c} + 0.1p/p_c.$$

Критические параметры газовой смеси можно определить по правилу Кейа [31]:

$$p_c = \sum_{i=1}^{n} y_i p_{ci}, \quad T_c = \sum_{i=1}^{n} y_i T_{ci},$$

где p_{ci}, T_{ci}, y_i — критические давление, температура и молярная доля i-го компонента газовой смеси.

С помощью разработанной математической модели (1)–(10) и алгоритма численной реализации [17–20] оценивается динамика распределения гидратонасыщенности, водонасыщенности, давления и температуры в выбранном пласте, который характеризуется пористостью, проницаемостью и начальными значениями давления, температуры и водонасыщенности. Численное решение задачи проводится путём аппроксимации исходных уравнений и граничных условий экономичными конечно-разностными схемами, для реализации которых созданы алгоритмы, основанные на идеях реализации метода простых итераций и потоковой прогонки [32; 33].

Результаты расчётов [17–21] показали, что возможность создания подземных хранилищ газа в гидратном состоянии существенно зависит от коллекторских свойств и гидродинамических характеристик водоносных горизонтов. При этом время закачки газа в водонасыщенный коллектор на небольших глубинах, соответствующих подошве многолетней мерзлоты, было ограничено 10 днями [17–19]. В работах [20; 21] это время увеличено до 100 дней, что соответствует реальному периоду снижения газопотребления летом, а также радиус контура питания увеличен от 100 до 300 м.

Следует отметить, что в отличие от работ [17–21], в которых используется равномерная сетка, здесь представлены результаты вычислительного эксперимента при квазиравномерной сетке по радиальной координате, так как основные изменения гидратонасыщенности и водонасыщенности происходят вблизи нагнетательной скважины:

$$r_i = h_0 i + r_w \left(\frac{R_k - h_0 n}{r_w} \right)^{i/n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где h_0 — «начальный» шаг ($0 \leqslant h_0 \leqslant R_k/n$, при $h_0 = R_k/n$ сетка равномерная).

2. Результаты вычислительного эксперимента

В вычислительном эксперименте принималось условие, при котором углекислый газ не сжижается, т. е. в результате нагнетания газа температура не превышала 283.15 K, а давление не увеличивалось свыше 6 МПа. Изучалось влияние равновесных условий гидратообразования и интенсивности закачки газа на динамику полей температуры, давления, водонасыщенности и гидратонасыщенности. Исходные параметры были взяты из работ [15; 17–20; 34]: $\rho_w = 1000$ кг/м^3, $\rho_s = 2650$ кг/м^3, $\rho_h = 1110$ кг/м^3, $c_w = 4200$ Дж/(кг·K), $c_s = 700$ Дж/(кг·K), $c_h = 2500$ Дж/(кг·K), $c_g = 840.5$ Дж/(кг·K), $q = 345$ кДж/кг, $\varepsilon = 0.28$, $\mu_w = 1.8 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\mu_g =$

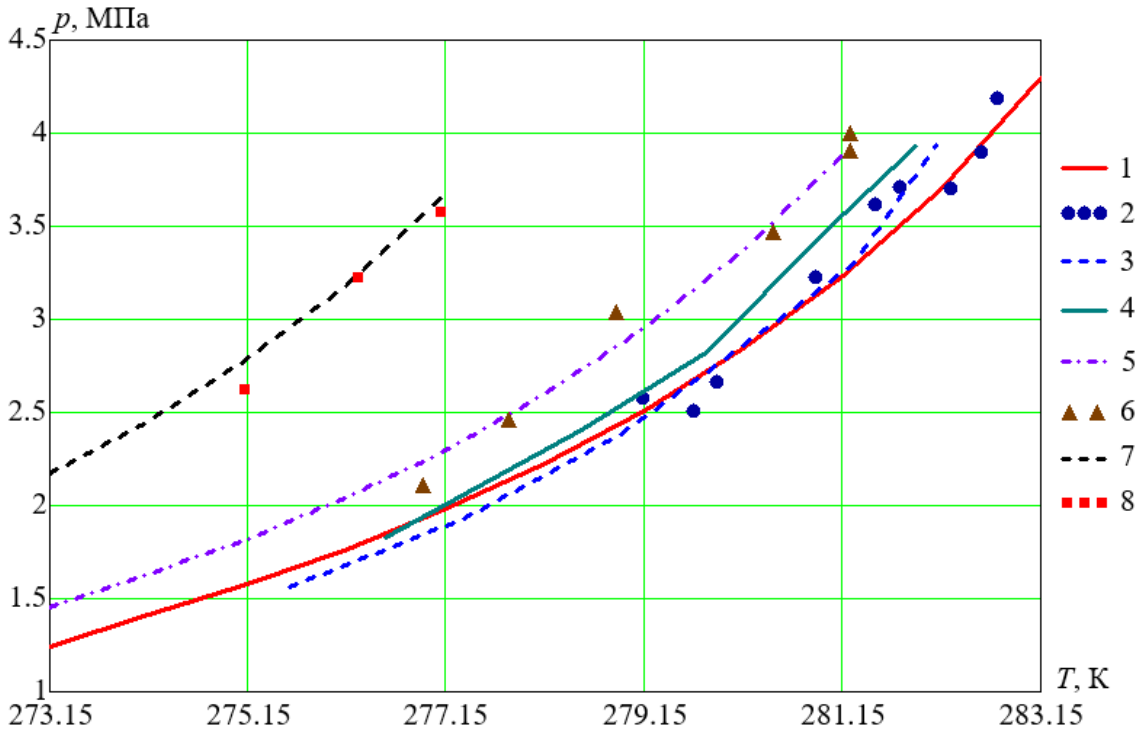


Рис. 1. Равновесные условия образования гидратов углекислого газа для систем: 1 — «CO_2 – вода»; 2 — «CO_2 – песок – вода»; 3 — «CO_2 – песок – 0.25% $NaHCO_3$»; 4 — «CO_2 – песок – 2% $NaHCO_3$»; 5 — «CO_2 – 3% NaCl»; 6 — «CO_2 – песок – 3% NaCl»; 7 — «CO_2 – 10% NaCl»; 8 — «CO_2 – песок – 10% NaCl»

$1.445 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $p_0 = 3 \cdot 10^6$ Па, $T_0 = 274.15$ K, $T_b = 279.15$ K, $H = 10$ м, $r_b = 0.1$ м, $r_k = 300.1$ м, $r_{out} = 1000.1$ м, $R = 188.914$ Дж/(кг·K), $p_c = 7.382 \cdot 10^6$ Па, $T_c = 304.19$ K.

Ранее результаты расчётов [17–21] показали, что возможность создания подземных хранилищ газа в гидратном состоянии существенно зависит от коллекторских свойств и данных гидродинамических исследований водоносных горизонтов. Предпочтение следует отдавать водонасыщенным коллекторам с пористостью меньше 0.2, что обеспечивает более равномерное заполнение хранилища гидратами. Проницаемость должна быть выше 10^{-14} м^2, чтобы при больших темпах закачки не допустить чрезмерного роста давления, которое может привести к потере герметичности кровли и подошвы коллектора. Поэтому во всех расчётах принимались значения пористости $m = 0.15$ и проницаемости $k = 8 \cdot 10^{-13}$ м^2. В начальный момент водоносный пласт не содержит гидратов $\nu_0 = 0$ и его водонасыщенность $\sigma_0 = 0.9$. Варьируемые параметры: расход закачиваемого газа (1 и 2 м^3/с) и равновесные условия гидратообразования.

Образование гидратов в пористых средах, насыщенных водой и газом, имеет свои особенности из-за взаимодействия воды, содержащейся в порах, с частицами дисперсной породы. К числу факторов, влияющих на равновесные условия гидратообразования, помимо состава газа и минерализации поровой воды, относятся минералогический состав, дисперсность и влагосодержание горной породы.

Для проведения вычислительных экспериментов использованы результаты расчётных и лабораторных экспериментов [35] по определению равновесных условий образования гидратов CO_2 в поровом пространстве дисперсных сред и водных растворах, имитирующих пластовые воды подмерзлотных горизонтов — пресная вода, растворы гидрокарбоната натрия (ГКН) и хлорида натрия (ХН). Эти результаты представлены на рис. 1, где узлы кривых 1, 5 и 7 вычислены по методике Сло-

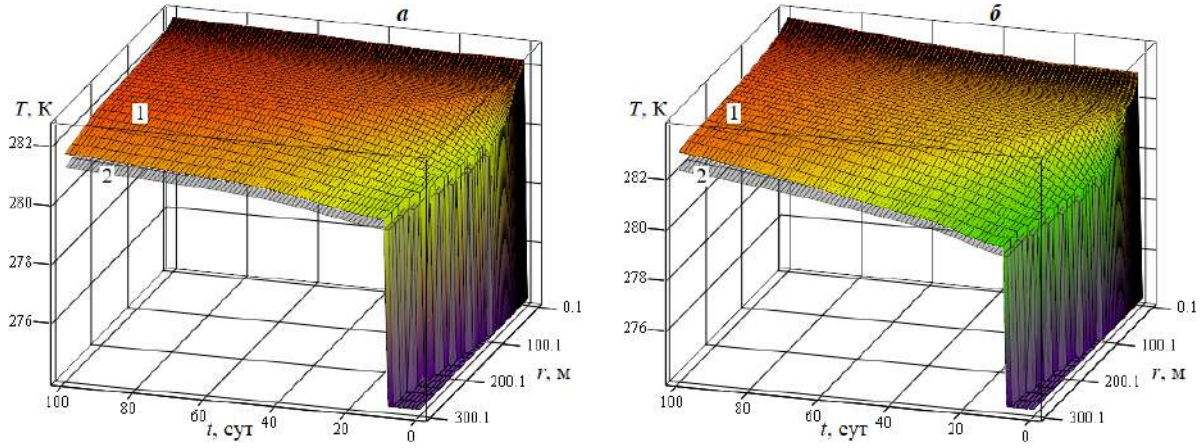


Рис. 2. Температурное поле для систем «CO_2 – вода» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – вода» (поверхность 2): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

ана [29], а остальные относятся к данным лабораторных экспериментов по синтезу гидратов в пористой среде (речной песок). Коэффициенты уравнения (9), аппроксимирующего полученные данные, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты равновесной кривой гидратообразования

Система	α_1, K	α_2, K
«CO_2 – вода»	8.207	158.066
«CO_2 – речной песок – вода»	6.632	181.175
«CO_2 – речной песок – водный раствор ГКН, 2.5 г/л»	7.158	173.667
«CO_2 – речной песок – водный раствор ГКН, 20 г/л»	6.935	176.610
«CO_2 – водный раствор ХН, 30 г/л»	8.186	157.124
«CO_2 – речной песок – водный раствор ХН, 30 г/л»	7.064	173.866
«CO_2 – водный раствор ХН, 100 г/л»	7.567	162.798
«CO_2 – речной песок – водный раствор ХН, 100 г/л»	6.256	182.618

Из рис. 1 видно, что наиболее благоприятные условия гидратообразования углекислого газа будут для пластов с пресной водой и с водным раствором ГКН, т. е. при заданной температуре гидраты будут образовываться при относительно низких давлениях, с которыми связаны глубины подмерзлотных водоносных горизонтов. Но при заданном давлении (т. е. для заданной глубины водоносного пласта) гидраты диоксида углерода будут образовываться при относительно низких температурах в пластах с водным раствором ХН. В этом случае чем больше минерализация пластовой воды, тем меньше равновесная температура гидратообразования.

Анализ результатов вычислительного эксперимента начнём с рассмотрения динамики полей температуры газа из-за её определяющей роли в образовании гидратов. На рис. 2 видно, что за сравнительно небольшое время (несколько часов) температура газа существенно повышается. При $t = 1.25$ сут для системы «CO_2 – вода» в случае малого расхода нагнетания газа температура вблизи забоя скважины увеличивается до 282.2 K, а в случае большого расхода — до 283.1 K. Естественно, скорость распространения фронта сильно зависит от темпа нагнетания газа. Т. е. в этот момент времени температурный фронт достигает расстояний 95.4 и 108.1 м при расходах газа 1 и 2 м^3/с соответственно. Тогда как для системы «CO_2 – песок – вода» температура в призабойной зоне будет немного меньше, она увеличится до 281.6 K при малом расходе и до 282.3 K — при большом расходе. Но при этом фронт температуры будет находиться немного дальше и достигнет расстояний 101.5 и 115.2 м. После 5 суток нагнетания газа температурный фронт достигает рас-

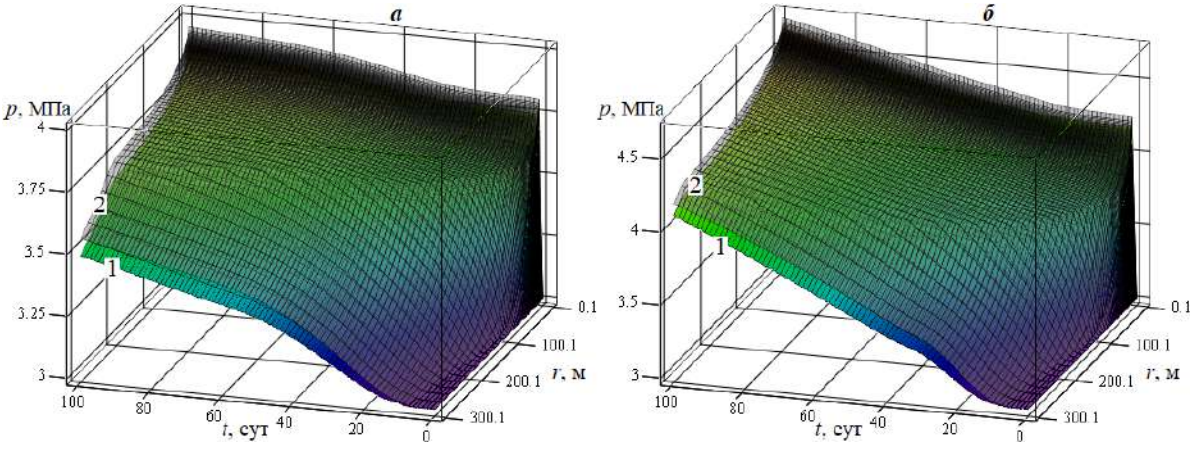


Рис. 3. Поле давления для систем «CO_2 – вода» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – вода» (поверхность 2): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

стояний 196.3 и 210.5 м для системы «CO_2 – вода», 210.5 и 225.7 м — для системы «CO_2 – песок – вода» при малом и большом расходе газа соответственно.

При малом расходе газа фронт температуры достигнет границы пласта через 9 и 8 сут, а при большом расходе — через 7.5 и 6.5 сут для систем «CO_2 – вода» и «CO_2 – песок – вода» соответственно. В конце нагнетания газа температура почти выравнивается по всему пласту, разница температур для систем «CO_2 – вода» и «CO_2 – песок – вода», т. е. при использовании pT-условий в свободном объёме и в пористой среде, составляет: при расходе газа 1 м^3/с в призабойной зоне — 0.65 K, на контуре пласта — 0.48 K; при расходе газа 2 м^3/с в призабойной зоне — 0.96 K, на контуре пласта — 0.74 K. Рис. 2 иллюстрирует все эти особенности и показывает влияние пористой среды, т. е. изменение равновесных условий гидратообразования, на скорость перемещения температурного фронта и на динамику распределения температуры.

Интенсивность нагнетания газа, равновесные условия образования гидратов также влияют на динамику и распределение давления в хранилище (см. поверхности 1 и 2 на рис. 3). Вблизи забоя нагнетательной скважины давление растёт с той же скоростью, что и температура. Так, на забое при малом расходе газа оно почти достигает своего предела 3.96 МПа для системы «CO_2 – песок – вода» и 3.89 МПа для системы «CO_2 – вода», в то время как при большом расходе оно увеличивается постепенно до 4.7 МПа для системы «CO_2 – песок – вода» и до 4.63 МПа — для системы «CO_2 – вода». На контуре хранилища в конце нагнетания газа давление для системы «CO_2 – песок – вода» будет больше давления для системы «CO_2 – вода» на 0.07 МПа при малом расходе и на 0.08 МПа — при большом расходе. При этом максимальная разница давлений между этими системами наблюдается в момент времени 66 сут при малом расходе (0.08 МПа) и 55 сут — при большом расходе (0.12 МПа).

Рассмотрим влияние динамики полей давления и температуры на вытеснение воды и образование гидратов в хранилище. Получено, что скорость фронта водонасыщенности (рис. 4) существенно меньше скорости температурного фронта. Также скорость распространения фронта водонасыщенности зависит от темпа нагнетания газа. При $t = 1.25$ сут для обеих систем в случае малого расхода фронт водонасыщенности достигает 26.1 м, а в случае большого расхода — 34.9 м. На рис. 4 видно, что распределение водонасыщенности качественно согласуется с решением задачи Бакли — Леверетта [23]. Влияние образования гидратов, т. е. перехода части воды в неподвижную фазу, проявляется в немонотонности распределения водонасыщен-

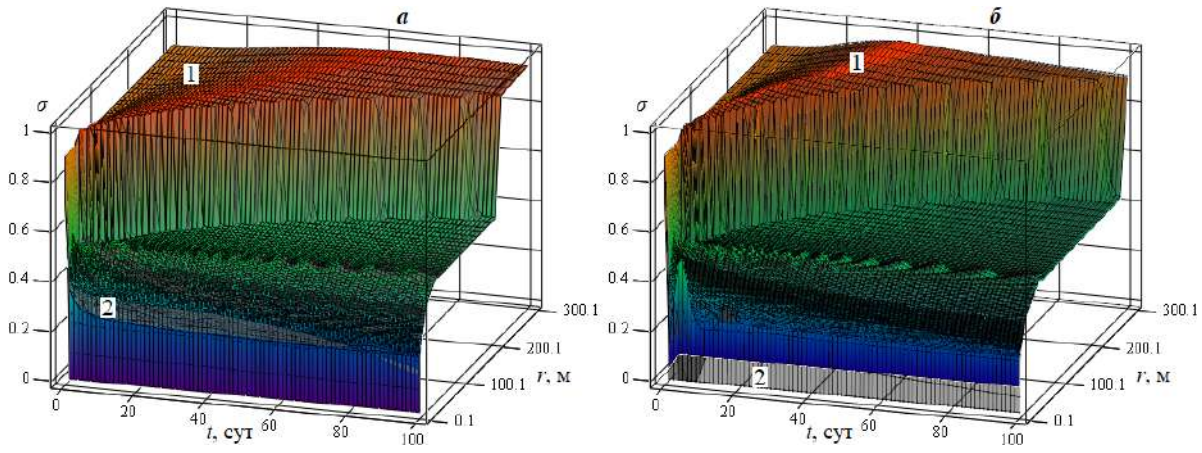


Рис. 4. Поле водонасыщенности для систем «CO_2 – вода» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – вода» (поверхность 2): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

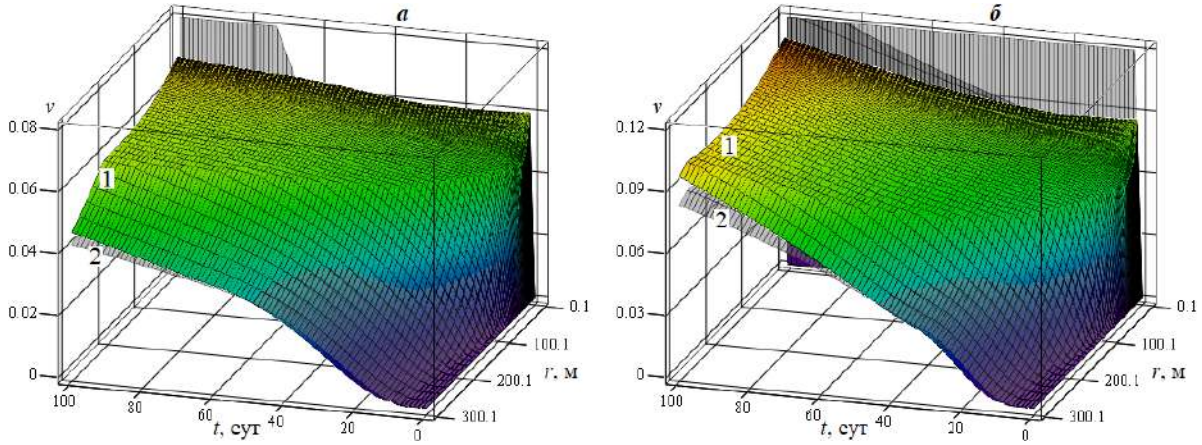


Рис. 5. Поле гидратонасыщенности для систем «CO_2 – вода» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – вода» (поверхность 2): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

ности за фронтом и в том, что перед фронтом водонасыщенность всегда меньше 1. Так, в конце нагнетания газа в средней части пласта водонасыщенность будет равна 0.47 при малом расходе и 0.45 — при большом расходе. Однако в соответствии с теорией двухфазного течения в пористой среде [23] нагнетание газа не может вытеснить всю пластовую воду. На контуре хранилища в конце нагнетания газа водонасыщенность достигает значения 0.95 при малом расходе и 0.91 — при большом расходе. На этой границе пласта максимальное значение водонасыщенности 0.96 будет в момент времени $t = 71$ сут при малом расходе и $t = 36$ сут — при большом расходе.

На рис. 5 видно, что высокая скорость закачки приводит к увеличению гидратонасыщенности в пласте. Это ясно из того факта, что высокое давление благоприятно для образования гидратов. В призабойной зоне при расходе газа 1 м^3/с максимальное значение гидратонасыщенности для системы «CO_2 – песок – вода» равно 0.19, тогда как для системы «CO_2 – вода» — 0.068. При увеличении расхода газа в 2 раза в этой зоне максимальное значение гидратонасыщенности для системы «CO_2 – песок – вода» составит 0.55, а для системы «CO_2 – вода» — 0.11. Тем самым вблизи нагнетательной скважины полная закупорка порового пространства гидратами не происходит. Гидратонасыщенность изменяется монотонно: во всех точках пласта вначале резко увеличивается, затем скорость роста замедляется и выходит почти на стационарный режим. Перспективным является рост насыщения гидратами на границе пласта со временем. Гидратонасыщенность на этом контуре хранилища в конце процесса нагнетания составит: 0.046 (при расходе газа 1 м^3/с) и

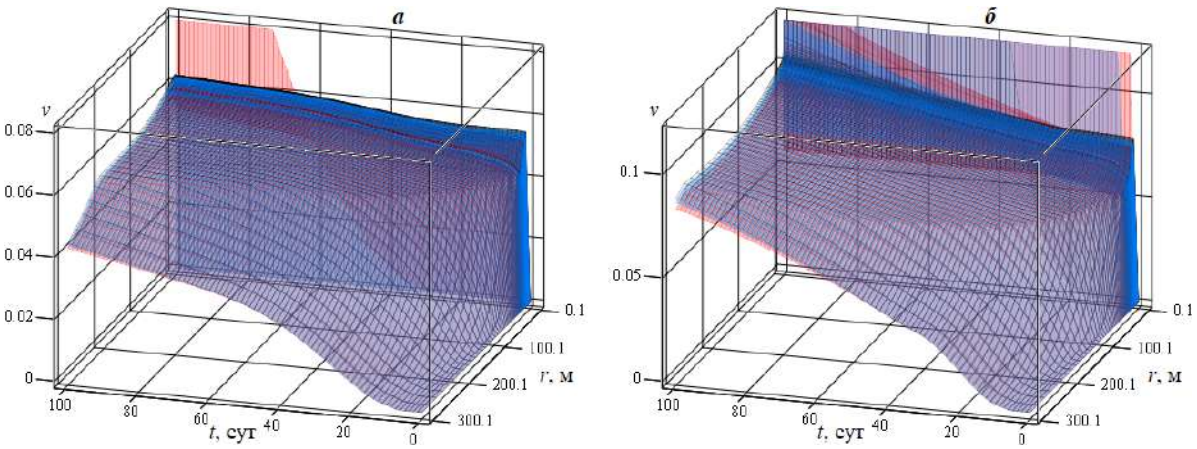


Рис. 6. Поле гидратонасыщенности для систем «CO_2 – песок – вода» (красная поверхность), «CO_2 – песок – 0.25% $NaHCO_3$» (синяя поверхность), «CO_2 – песок – 2% $NaHCO_3$» (черно-белая поверхность): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

0.096 (при расходе газа 2 м^3/с) для системы «CO_2 – вода»; 0.042 (при расходе газа 1 м^3/с) и 0.082 (при расходе газа 2 м^3/с) для системы «CO_2 – песок – вода».

Сравнение результатов рассмотренных вариантов расчёта показало, что в целом по пласту (кроме призабойной зоны) гидратонасыщенность при использовании равновесных условий образования гидратов CO_2 в свободном объёме будет больше, чем в случае использования равновесных условий образования гидратов CO_2 в пористой среде, так как равновесные условия гидратообразования в пористой среде немного смещены относительно равновесных условий, полученных в свободном объёме, в область более высоких давлений и низких температур. Величина гидратонасыщенности сильно зависит от интенсивности закачки газа. Конечно, это не прямое, а косвенное воздействие, которое объясняется различием в изменениях давления и температуры при существенно разных темпах закачки. В то же время значение гидратонасыщенности перед фронтом свидетельствует о том, что в этой части хранилища далеко не вся вода перешла в гидрат.

Далее для остальных систем ограничимся только результатами расчёта полей гидратонасыщенности — основного показателя эффективности консервации диоксида углерода. Как показано на рис. 6, гидратонасыщенность пласта с гидрокарбонатно-натриевым типом вод немного превышает гидратонасыщенность водоносного пласта без солей. Это объясняется также смещением равновесных условий гидратообразования в область более высоких давлений и низких температур (см. рис. 1). При этом в отличие от пласта с пресной водой для пласта с водным раствором гидрокарбоната натрия коэффициенты условия термодинамического равновесия (9): α_1 больше, а α_2 меньше. Но вблизи нагнетательной скважины гидраты образуются больше для пласта с пресной водой. Так, при меньшем расходе газа (1 м^3/с) в конце процесса закачки газа для системы «CO_2 – песок – вода» гидратонасыщенность достигает значения 0.19, для системы «CO_2 – песок – 0.25% $NaHCO_3$» — 0.063, для системы «CO_2 – песок – 2% $NaHCO_3$» — 0.062. При увеличении расхода в 2 раза максимальная насыщенность гидратами в этой зоне равна: для системы «CO_2 – песок – вода» — 0.55; для системы «CO_2 – песок – 0.25% $NaHCO_3$» — 0.48, для системы «CO_2 – песок – 2% $NaHCO_3$» — 0.51. В целом получено, что водный раствор гидрокарбоната натрия является термодинамическим промотором гидратообразования по сравнению с пресной водой.

К моменту окончания закачки углекислого газа почти во всём пласте образуется зона смеси гидрата с водой, однако гидратонасыщенность при этом составляет около 0.08 при большом расходе газа и 0.05 — при малом расходе. Учитывая рост

гидратонасыщенности во времени по закону, близкому к линейному, можно утверждать, что увеличение продолжительности закачки газа приведёт к существенному увеличению этого показателя.

Гидратонасыщенность для пласта с хлоридно-натриевым типом вод, рассчитанная по равновесным условиям гидратообразования в пористой среде, будет ниже, чем гидратонасыщенность по равновесным условиям образования гидратов в свободном объёме (рис. 7 и 8).

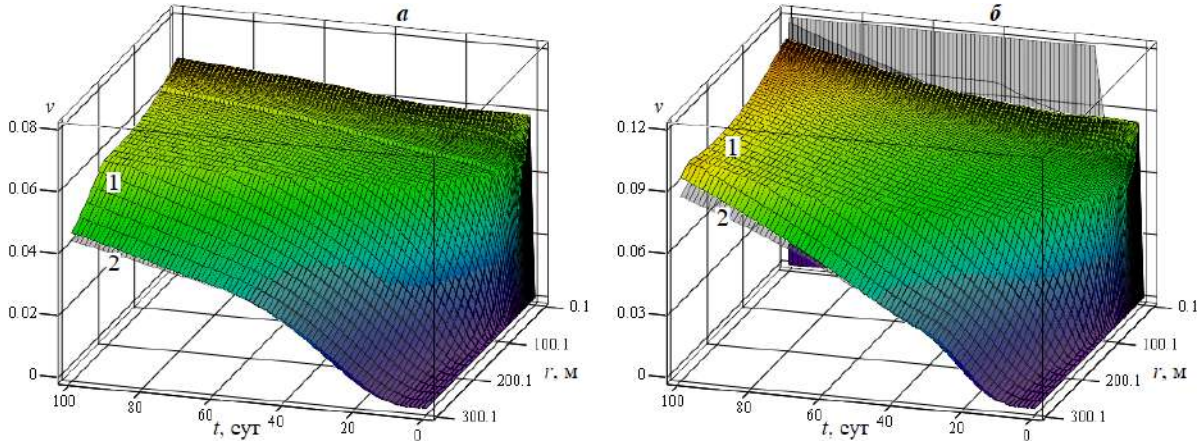


Рис. 7. Поле гидратонасыщенности для систем «CO_2 – 3% NaCl» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – 3% NaCl» (поверхность 2): *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

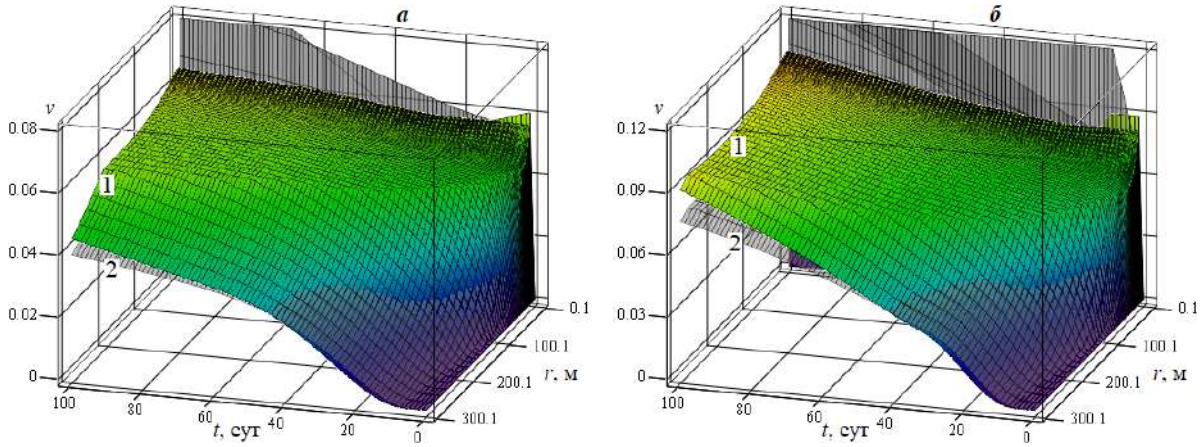


Рис. 8. Поле гидратонасыщенности для систем «CO_2 – 10% NaCl» (поверхность 1) и «CO_2 – песок – 10% NaCl» (поверхность 2); *а* — при расходе газа 1 м^3/с; *б* — 2 м^3/с

Показанное положение поверхностей свидетельствует о том, что в конце процесса нагнетания гидратонасыщенность будет выше для системы с большим значением коэффициента α_1 и малым значением коэффициента α_2. При меньшей интенсивности нагнетания вблизи скважины гидратонасыщенность достигает максимального значения 0.068, если использовать pT-условия гидратообразования в свободном объёме, и 0.062 в случае использования pT-условия гидратообразования в пористой среде (см. рис. 7, *а*). Но при большей интенсивности нагнетания картина изменяется в обратную сторону: максимальные значения гидратонасыщенности равны 0.11 и 0.49 в случаях использования pT-условий гидратообразования в свободном объёме и в пористой среде соответственно (см. рис. 7, *б*).

В ходе расчётов было получено, что при закачке углекислого газа в пласты с пресной водой и с хлоридно-натриевым типом вод с концентрацией 3 % (т. е. для систем «CO_2 – вода» и «CO_2 – 3% NaCl») поля давления, водонасыщенности и гидратонасыщенности практически совпадают в силу малого отличия в коэффициентах равновесной кривой гидратообразования α_1 и α_2.

Максимальные значения гидратонасыщенности вблизи нагнетательной скважины для системы «CO_2 – 10% NaCl» равны 0.064 и 0.1 соответственно при расходах газа 1 и 2 м^3/с, а для системы «CO_2 – песок – 10% NaCl» — 0.11 и 0.21 соответственно при расходах газа 1 и 2 м^3/с (см. рис. 8). Эти значения, как в предыдущих случаях, на рисунках урезаны.

Очевидно, что с увеличением степени минерализации водного раствора хлорида натрия интенсивность образования гидратов уменьшается, так как при заданной температуре гидраты будут образовываться при более высоких давлениях или при заданном давлении — при более низких температурах (см. рис. 1). При меньшем расходе газа поверхности полей гидратонасыщенности практически сливаются. С увеличением темпа нагнетания расхождение — гидратонасыщенность для пласта с водным 10%-м раствором NaCl меньше, чем гидратонасыщенность для пласта с водным 3%-м раствором NaCl. Это расхождение более заметно в случае использования в расчётах pT-условий гидратообразования в поровом пространстве.

Выводы

Проведены численные расчёты при использовании термобарических условий образования гидратов CO_2 в поровом пространстве при учёте минерализации пластовой воды гидрокарбонатно-натриевого и натрий-хлоридного типов. Выявлена связь гидратонасыщенности с коэффициентами условия термодинамического равновесия: при равных условиях в конце процесса нагнетания гидратонасыщенность будет выше для системы с большим значением коэффициента α_1 и малым значением коэффициента α_2.

Сравнение результатов рассмотренных вариантов расчёта показало, что в целом по пласту (кроме призабойной зоны) гидратонасыщенность при использовании равновесных условий образования гидратов CO_2 в свободном объёме будет больше, чем в случае использования равновесных условий образования гидратов CO_2 в пористой среде. Это объясняется тем, что равновесные условия гидратообразования в пористой среде немного смещены относительно равновесных условий, полученных в свободном объёме, в область более высоких давлений и низких температур.

К моменту окончания закачки углекислого газа почти во всём пласте образуется зона смеси гидрата с водой, однако гидратонасыщенность при этом составляет около 0.08 при большом расходе газа и 0.05 — при малом расходе. Учитывая рост гидратонасыщенности во времени по закону, близкому к линейному, можно утверждать, что увеличение продолжительности закачки газа приведёт к существенному росту этого показателя.

Оценивая результаты вычислительного эксперимента в целом, можно утверждать, что при современных технологиях закачки создание подземных хранилищ газа в гидратном состоянии вполне реализуемо.

Список литературы

1. **Макогон Ю. Ф.** Гидраты природных газов. М. : Недра, 1974.
2. **Бык С. Ш., Макогон Ю. Ф., Фомина В. И.** Газовые гидраты. М. : Химия, 1980.
3. **Макогон Ю. Ф.** Газовые гидраты, предупреждение их образования и использование. М. : Недра, 1985.
4. **Истомин В. А.** Физико-химические исследования газовых гидратов: проблемы и перспективы. М. : ИРЦ Газпром, 2000.

5. **Swinkels W. J. A. M., Drenth R. J. J.** Thermal reservoir simulation model of production from naturally occurring gas hydrate accumulations // SPE Reservoir Evaluation and Engineering. 2000. Vol. 3, iss. 6. P. 559–566.
6. **Sun X., Mohanty K. K.** Kinetic simulation of methane hydrate formation and dissociation in porous media // Chemical Engineering Science. 2006. Vol. 61, no. 1. P. 3476–3495.
7. **Uddin M., Coombe D. A., Law D. A., Gunter W. D.** Numerical studies of gas–hydrates formation and decomposition in a geological reservoir // Journal of Energy Resources Technology. 2008. Vol. 130, no. 3. P. 032501.
8. **Zhenxue D., Ye Zh., Stauffer P.H., et al.** Injectivity evaluation for offshore CO_2 sequestration in marine sediments // Energy Procedia. 2017. No. 114. P. 2921–2932.
9. **Nurislamov O. R., Shagapov V. Sh.** Gas injection into a moist porous medium with the formation of a gas hydrate // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, no. 5. P. 581–591.
10. **Tsypkin G. G.** Formation of carbon dioxide hydrate at the injection of carbon dioxide into a depleted hydrocarbon field // Fluid Dynamics. 2014. Vol. 49, no. 6. P. 789–795.
11. **Shagapov V. Sh., Musakaev N. G., Khasanov M. K.** Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 84. P. 1030–1039.
12. **Шагапов В. Ш., Мусакаев Н. Г.** Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М. : Наука, 2016.
13. **Shagapov V. S., Rafikova G. R., Khasanov M. K.** The theory of the replacement of methane by carbon dioxide in gas hydrates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2019. Vol. 53, no. 1. P. 64–74.
14. **Khasanov M. K., Rafikova G. R., Musakaev N. G.** Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate // Energies. 2020. Vol. 13. P. 440.
15. **Musakaev N. G., Khasanov M. K.** Solution of the problem of natural gas storages creating in gas hydrate state in porous reservoirs // Mathematics. 2020. Vol. 8, iss. 1. P. 36.
16. **Хасанов М. К., Столповский М. В.** Математическая модель инжекции углекислого газа в газогидратный пласт // Теорет. основы хим. технологии. 2021. Т. 55, № 4. С. 517–528.
17. **Бондарев Э. А., Рожин И. И., Попов В. В., Аргунова К. К.** Математическое моделирование создания подземного хранилища природного газа в гидратном состоянии // Научные труды НИПИ «Нефтегаз» ГНКАР. 2015. № 2. С. 54–67.
18. **Бондарев Э. А., Рожин И. И., Попов В. В., Аргунова К. К.** Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // Криосфера Земли. 2015. Т. XIX, № 4. С. 64–74.
19. **Рожин И. И.** Термодинамические эффекты в математических моделях добычи природного газа в северных регионах : дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2015.
20. **Bondarev E. A., Rozhin I. I., Popov V. V., Argunova K. K.** Underground storage of natural gas in hydrate state: primary injection stage // Journal of Engineering Thermophysics. 2018. Vol. 27, no. 2. P. 221–231.
21. **Рожин И. И., Аргунова К. К.** Моделирование подземного хранения природного газа в гидратном состоянии в подмерзлотных водоносных горизонтах // Вестн. Северо-Восточ. федер. ун-та им. М. К. Аммосова. Сер.: Науки о Земле. 2022. № 2 (26). С. 10–21.
22. **Bondarev E. A., Kapitonova T. A.** Simulation of multiphase flow in porous media accompanied by gas hydrate formation and dissociation // Russian Journal of Engineering Thermophysics. 1999. Vol. 9, no. 1–2. P. 83–97.
23. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М. : Гостоптехиздат, 1963.

24. **Bondarev E. A., Argunova K. K., Rozhin I. I.** Plane-parallel nonisothermal gas filtration: The role of thermodynamics // Journal of Engineering Thermophysics. 2009. Vol. 18, no. 2. P. 168–176.
25. **Бондарев Э. А., Бабе Г. Д., Гройсман А. Г., Каниболотский М. А.** Механика образования гидратов в газовых потоках. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1976.
26. **Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. М.** Подземная гидравлика. М. : Недра, 1986.
27. **Чэнь Чж.** Задачи фильтрации двухфазной жидкости при учёте массовых сил : дис. ... канд. техн. наук. М., 1962.
28. **Истомин В. А., Квон В. Г.** Предупреждение и ликвидация газовых гидратов в системах добычи газа. М. : ООО «ИРЦ Газпром», 2004.
29. **Sloan E. D., Koh C. A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Boca Raton : Taylor&Francis Group/CRC Press, 2008.
30. **Латонов В. В., Гуревич Г. Р.** Расчёт коэффициента сжимаемости природных газов // Газовая промышленность. 1969. № 2. С. 7–9.
31. **Kay W. B.** Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures // Industrial&Engineering Chemistry Research. 1936. Vol. 28. P. 1014–1019.
32. **Васильев В. И., Попов В. В., Тимофеева Т. С.** Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000.
33. **Бондарев Э. А., Попов В. В.** Динамика образования гидратов при добыче природного газа // Вычислительные технологии. 2002. № 1. С. 28–33.
34. **Воронов В. П., Городецкий Е. Е., Григорьев Б. А., Муратов А. Р.** Экспериментальное исследование процесса замещения метана в газовом гидрате диоксидом углерода // Науч.-тех. сб. «Вести газовой науки». 2011. № 2 (7). С. 235–248.
35. **Калачева Л. П., Иванова И. К., Портнягин А. С., Иванов В. К., Аргунова К. К., Бубнова А. Р.** Оценка возможности захоронения углекислого газа в гидратном состоянии в подмерзлотных водоносных горизонтах Вилюйской синеклизы // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2023. Т. 18, № 4.

Поступила в редакцию 21.10.2024.
После переработки 04.08.2025.

Сведения об авторах

Рожин Игорь Иванович, доктор технических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Якутский научный центр СО РАН», Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия; e-mail: i_rozhin@mail.ru.

Иванов Гаврил Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент Института математики и информатики, Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова, Якутск, Россия; старший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Якутский научный центр СО РАН», Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск, Россия; e-mail: ivganya@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 750–766.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-750-766

COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN THE PROBLEM OF CARBON DIOXIDE DISPOSAL IN A SUBPERMAFROST AQUIFER IN A GAS HYDRATE STATE

I.I. Rozhin[1,a], **G.I. Ivanov**[1,2,b]

[1] *Institute of Oil and Gas Problems SB RAS, Yakut Scientific Center SB RAS, Yakutsk, Russia*
[2] *North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov, Yakutsk, Russia*
[a] *i_rozhin@mail.ru,* [b] *ivganya@mail.ru*

As part of the task of injecting gas through a single well into a horizontal aquifer, the possibility of underground storage (conservation) of carbon dioxide in a hydrate state, i.e. in a solid phase, which is formed under certain thermobaric conditions, is being studied. The computational experiment was carried out on the basis of a mathematical model of non-isothermal filtration of gas and water, derived on the basis of the fundamental laws of conservation of mass and energy. In this model, the main physical features of the process are most fully taken into account: the real properties of the gas, the throttling effect, the joint movement of water and gas in a homogeneous porous medium, mass transfer between gas and water with hydrate. The computational experiment evaluates the dynamics of the distribution of hydrate saturation, water saturation, pressure and temperature in the selected reservoir, which is characterized by porosity, permeability and initial values of pressure, temperature and water saturation. To conduct computational experiments on the formation of gas hydrate, the results of laboratory experiments were used to determine the equilibrium conditions of carbon dioxide hydrates formation in pore space and aqueous solutions simulating stratum waters of subpermafrost horizons. The influence of the equilibrium conditions of hydrate formation on the main indicator of the process efficiency — the hydrate saturation of the underground gas storage facility — is shown.

Keywords: *carbon dioxide, hydrate formation, multiphase nonisothermal filtration, computational experiment.*

References

1. **Makogon Yu.F.** *Gidraty prirodnykh gazov* [Hydrates of natural gases]. Moscow, Nedra, 1974. (In Russ.).
2. **Byk S.Sh., Makogon Yu.F., Fomina V.I.** *Gazovye gidraty* [Gas hydrates]. Moscow, Khimiya, 1980. (In Russ.).
3. **Makogon Yu.F.** *Gazovye gidraty, preduprezhdenie ikh obrazovaniya i ispol'zovaniye* [Gas hydrates, prevention of their occurrence and exploitation], Nedra, Moscow, 1985. (In Russ.).
4. **Istomin V.A.** *Fiziko-himicheskie issledovaniya gazovyh gidratov: problemy i perspektivy* [Physico-chemical studies of gas hydrates: problems and prospects]. Moscow, IRC Gazprom, 2000. (In Russ.).
5. **Swinkels W.J.A.M., Drenth R.J.J.** Thermal reservoir simulation model of production from naturally occurring gas hydrate accumulations. *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*, 2000, vol. 3, no. 6, pp. 559–566.

The work was performed within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (reg. no. 122011100157-5).

6. **Sun X., Mohanty K.K.** Kinetic simulation of methane hydrate formation and dissociation in porous media. *Chemical Engineering Science*, 2006, vol. 61, no. 1, pp. 3476–3495.
7. **Uddin M., Coombe D.A., Law D.A., Gunter W.D.** Numerical studies of gas-hydrates formation and decomposition in a geological reservoir. *Journal of Energy Resources Technology*, 2008, vol. 130, no. 3, p. 032501.
8. **Zhenxue D., Ye Zh., Stauffer P.H., et al.** Injectivity evaluation for offshore CO_2 sequestration in marine sediments. *Energy Procedia*, 2017, no. 114, pp. 2921–2932.
9. **Nurislamov O.R., Shagapov V.Sh.** Gas injection into a moist porous medium with the formation of a gas hydrate. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 5, pp. 581–591.
10. **Tsypkin G.G.** Formation of carbon dioxide hydrate at the injection of carbon dioxide into a depleted hydrocarbon field. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 789–795.
11. **Shagapov V.Sh., Musakaev N.G., Khasanov M.K.** Formation of gas hydrates in a porous medium during an injection of cold gas. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 84, pp. 1030–1039.
12. **Shagapov V.Sh., Musakaev N.G.** *Dinamika obrazovaniya i razlozheniya gidratov v sistemakh dobychi, transportirovki i khraneniya gaza* [The Dynamics of formation and decomposition of hydrates in the natural gas extraction, transportation and storage systems]. Moscow, Nauka, 2016. (In Russ.).
13. **Shagapov V.S., Rafikova G.R., Khasanov M.K.** The theory of the replacement of methane by carbon dioxide in gas hydrates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 64–74.
14. **Khasanov M.K., Rafikova G.R., Musakaev N.G.** Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate. *Energies*, 2020, vol. 13, p. 440.
15. **Musakaev N.G., Khasanov M.K.** Solution of the problem of natural gas storages creating in gas hydrate state in porous reservoirs. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1, p. 36.
16. **Khasanov M.K., Stolpovskii M.V.** Matematicheskaya model' inzhektsii uglekislogo gaza v gazogidratnyy plast [Mathematical model of injection of carbon dioxide into a gas-hydrate-bearing formation]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical foundations of chemical engineering], 2021, vol. 55, no. 4, pp. 699–710. (In Russ.).
17. **Bondarev E.A., Rozhin I.I., Popov V.V., Argunova K.K.** Matematicheskoye modelirovaniye sozdaniya podzemnogo khranilishcha prirodnogo gaza v gidratnom sostoyanii [Mathematical modeling of natural gas underground storage in hydrate state]. *Nauchnye trudy NIPI Neftegaz GNKAR* [SOCAR Proceedings], 2015, no. 2, pp. 54–67. (In Russ.).
18. **Bondarev E.A., Rozhin I.I., Popov V.V., Argunova K.K.** Otsenka vozmozhnosti podzemnogo khraneniya gidratov prirodnogo gaza v zone mnogoletney merzloty [Assessment of possibility of natural gas hydrates underground storage in permafrost regions]. *Kriosfera Zemli* [Earth's Cryosphere], 2015, vol. XIX, no. 4, pp. 58–67. (In Russ.).
19. **Rozhin I.I.** *Termodinamicheskiye effekty v matematicheskikh modelyakh dobychi prirodnogo gaza v severnykh regionakh* [The thermodynamic effects in mathematical models of natural gas production in northern regions]. Thesis of Doctor of Technical Sciences. Novosibirsk, 2015. (In Russ.).
20. **Bondarev E.A., Rozhin I.I., Popov V.V., Argunova K.K.** Underground storage of natural gas in hydrate state: primary injection stage. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2018, vol. 27, no. 2, pp. 221–231.
21. **Rozhin I.I., Argunova K.K.** Modelirovaniye podzemnogo khraneniya prirodnogo gaza v gidratnom sostoyanii v podmerzlotnykh vodonosnykh gorizontakh [Modeling of natural gas underground storage in a hydrated state in permafrost aquifers]. *Vestnik Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta imeni M.K. Ammosova. Seriya: Nauki o Zemle*

[Vestnik of North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov. Earth Sciences], 2022, no. 2 (26), pp. 10–21. (In Russ.).

22. **Bondarev E.A., Kapitonova T.A.** Simulation of multiphase flow in porous media accompanied by gas hydrate formation and dissociation. *Russian Journal of Engineering Thermophysics*, 1999, vol. 9, no. 1–2, pp. 83–97.
23. **Charny I.A.** *Podzemnaya gidrogazodinamika* [Underground Hydrogasdynamics]. Moscow, Gostoptekhizdat, 1963. (In Russ.).
24. **Bondarev E.A., Argunova K.K., Rozhin I.I.** Plane-parallel nonisothermal gas filtration: the role of thermodynamics. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2009, vol. 18, no. 2, pp. 168–176.
25. **Bondarev E.A., Babe G.D., Groisman A.G., Kanibolotsky M.A.** *Mekhanika obrazovaniya gidratov v gazovykh potokakh* [Mechanics of hydrate formation in gas flows]. Novosibirsk, Nauka, Siberian Branch, 1976. (In Russ.).
26. **Basniev K.S., Vlasov A.M., Kochina I.N., Maksimov V.M.** *Podzemnaya gidravlika* [Underground Hydraulics]. Moscow, Nedra, 1986. (In Russ.).
27. **Chen Ch.** *Zadachi fil'tratsii dvukhfaznoy zhidkosti pri uchyote massovykh sil* [Problems of filtration of a two-phase liquid taking into account mass forces]. PhD Thesis in Engineering, Institute of Petroleum Chemistry and Gas Industry named after I.M. Gubkin, Moscow, 1962. (In Russ.).
28. **Istomin V.A., Kwon V.G.** *Preduprezhdeniye i likvidatsiya gazovykh gidratov v sistemakh dobychi gaza* [Prevention and elimination of gas hydrates in gas production systems]. Moscow, IRTs Gazprom LLC, 2004. (In Russ.).
29. **Sloan E.D., Koh C.A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Boca Raton, Taylor&Francis Group/CRC Press, 2008.
30. **Latonov V.V., Gurevich G.R.** Raschyot koeffitsienta szhimayemosti prirodnykh gazov [Calculation of the compressibility coefficient of natural gases]. *Gazovaya promyshlennost'* [Journal Gas Industry], 1969, no. 2, pp. 7–9. (In Russ.).
31. **Kay W.B.** Density of hydrocarbon gases and vapors at high temperature and pressures. *Industrial&Engineering Chemistry Research*, 1936, vol. 28, pp. 1014–1019.
32. **Vasiliev V.I., Popov V.V., Timofeeva T.S.** *Vychislitel'nye metody v razrabotke mestorozhdeniy nefti i gaza* [Computational methods in the development of oil and gas fields]. Novosibirsk, SB RAS, 2000. (In Russ.).
33. **Bondarev E.A., Popov V.V.** Dinamika obrazovaniya gidratov pri dobyche prirodnogo gaza [Dynamics of hydrate formation during gas production]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2002, no. 1, pp. 28–33. (In Russ.).
34. **Voronov V.P., Gorodetsky E.E., Grigoriev B.A., Muratov A.R.** Eksperimental'noye issledovaniye protsessa zameshcheniya metana v gazovom gidrate dioksidom ugleroda [Experimental study of the process of replacing methane in gas hydrate with carbon dioxide]. *Nauchno-tekhnicheskiy sbornik "Vesti gazovoy nauki"* [Scientific-technical collection book "News of gas science"], 2011, no. 2 (7), pp. 235–248. (In Russ.).
35. **Kalacheva L.P., Ivanova I.K., Portnyagin A.S., Ivanov V.K., Argunova K.K., Bubnova A.R.** Otsenka vozmozhnosti zakhoroneniya uglekislogo gaza v gidratnom sostoyanii v podmerzlotnykh vodonosnykh gorizontakh Vilyuyskoy sineklizy [Assessment of the possibility of carbon dioxide burial in a hydrate state in the sub-permafrost aquifers of the Vilyuy syneclise]. *Neftegazovaya geologiya. Teoriya i praktika* [Petroleum Geology. Theoretical and Applied Studies], 2023, vol. 18, no. 4. (In Russ.).

Article received 21.10.2024.
Corrections received 04.08.2025.

ФИЗИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 767–776.

УДК 537.9+537.6 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-767-776

ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА НА ОБЪЁМНО-ЦЕНТРИРОВАННОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ

А. К. Муртазаев, К. Ш. Муртазаев[a], М. А. Магомедов[b], М. К. Рамазанов, М. Р. Джамалудинов

Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия
[a] 5kurban@mail.ru, [b] magomedov_ ma@mail.ru

Репличным алгоритмом метода Монте-Карло выполнено исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга на объёмно-центрированной кубической решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля. Изучено влияние внешнего магнитного поля на термодинамические и магнитные свойства данной модели. Получены температурные и полевые зависимости основных термодинамических параметров. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины внешнего магнитного поля для рассматриваемой модели. Получены магнитные структуры основного состояния в широком интервале магнитного поля.

Ключевые слова: *метод Монте-Карло, магнитное поле, спиновая система, объёмно-центрированная кубическая решётка, модель Гейзенберга.*

Введение

В физике конденсированного состояния в последнее время большой интерес вызывают исследования спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями. Исследование фазовых переходов (ФП) и термодинамических свойств таких систем позволяет получить ответы на актуальные вопросы в теории фазовых переходов и магнетизма [1]. Большинство работ посвящено исследованиям с треугольной решёткой или двумерным системам [2–4]. Трёхмерная модель Гейзенберга на объёмно-центрированной кубической (ОЦК) решётке с учётом конкурирующих обменных взаимодействий изучалась разными методами. Термодинамические свойства квантовой антиферромагнитной модели Гейзенберга с учётом взаимодействия первых J_1 и вторых ближайших соседей J_2 со спиновой и одноионной анизотропией на ОЦК решётке исследованы в работах [5; 6]. В этих работах с использованием метода функции Грина второго порядка в рамках приближения случайных фаз исследована область, где $J_2/J_1<2/3$, т. е. фаза Нееля. Анализируется влияние фрустрации на характер температурной зависимости намагниченности подрешётки. Проведён анализ влияния спиновой и одноионной анизотропии на намагниченность подрешёток, температуру Нееля, свободную и внутреннюю энергию. В ряде работ

Исследование выполнено в рамках научной программы НЦФМ (проект «Исследования в сильных и сверхсильных магнитных полях»).

проведена оценка влияния вторых ближайших соседей J_2 на критическую температуру для модели Гейзенберга на ОЦК решётке с ферро- и антиферромагнитными взаимодействиями разными методами и алгоритмами: высокотемпературным разложением для структурного фактора [7], с помощью функции Грина второго порядка [8], с помощью анализа высокотемпературных разложений подрешёточной восприимчивости [9].

Для антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с помощью метода Монте-Карло (МК) было исследовано влияние J_2 на критическую температуру и на род ФП. Получены структуры основного состояния в широком диапазоне значений $k{=}J_2/J_1$. Для данной модели было показано, что изменение обменных взаимодействий J_2 приводит к изменению рода ФП, температуры ФП и класса универсальности [10–12]. Для этой же модели без учёта внешнего магнитного поля (МП) было показано, что изменение величины взаимодействия вторых ближайших соседей приводит к изменению структур основного состояния [13; 14].

Однако невыясненными остаются вопросы, связанные с влиянием внешнего МП на ФП, термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитной модели Гейзенберга. Насколько нам известно, исследование классической модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего МП до сих пор никем не проводилось. В ряде работ показано, что учёт внешнего МП ведёт к изменению многих свойств фундаментального характера в антиферромагнитных спиновых системах [14–16].

В данной работе на основе метода МК проведены исследования антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля. Исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями на основе современных методов позволит получить ответы на вопросы, связанные с ФП, термодинамическими и магнитными свойствами спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями.

1. Модель и метод исследования

Гамильтониан системы может быть представлен в следующем виде [17]:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_l) - h \sum_{\langle i \rangle} \overrightarrow{S}_i,$$

где $\vec{S}_i$ — трёхкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Первый член в формуле учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей ($J_1{<}0$), а второй — следующих за ближайшими соседей ($J_2{<}0$). h — величина магнитного поля (приводится в единицах $|J_1|$). Магнитное поле менялось в интервале $0 \leqslant h \leqslant 20$. В данной работе рассматривается случай, когда величины обменных взаимодействий $J_2 = J_1 = -1.0$, а величина $k = J_2/J_1 = 1$.

Известно, что для данной антиферромагнитной модели при $k = 1$ в системе наблюдается антиферромагнитная фаза 2-го типа AF2 [10]. Для правильного описания этой фазы необходимы четыре подрешётки. Схематически модель представлена на рис. 1, *a*. Антиферромагнитная фаза AF2 приведена на рис. 1, *b* [10; 18–20].

Моделирование методом Монте-Карло — один из наиболее мощных методов статистической физики, широко применяемый для изучения ФП и критических явлений. Теоретические и экспериментальные подходы к исследованию процессов вблизи критических температур зачастую оказываются менее эффективными [21]. В данной работе используется метод Монте-Карло. С помощью этого метода при

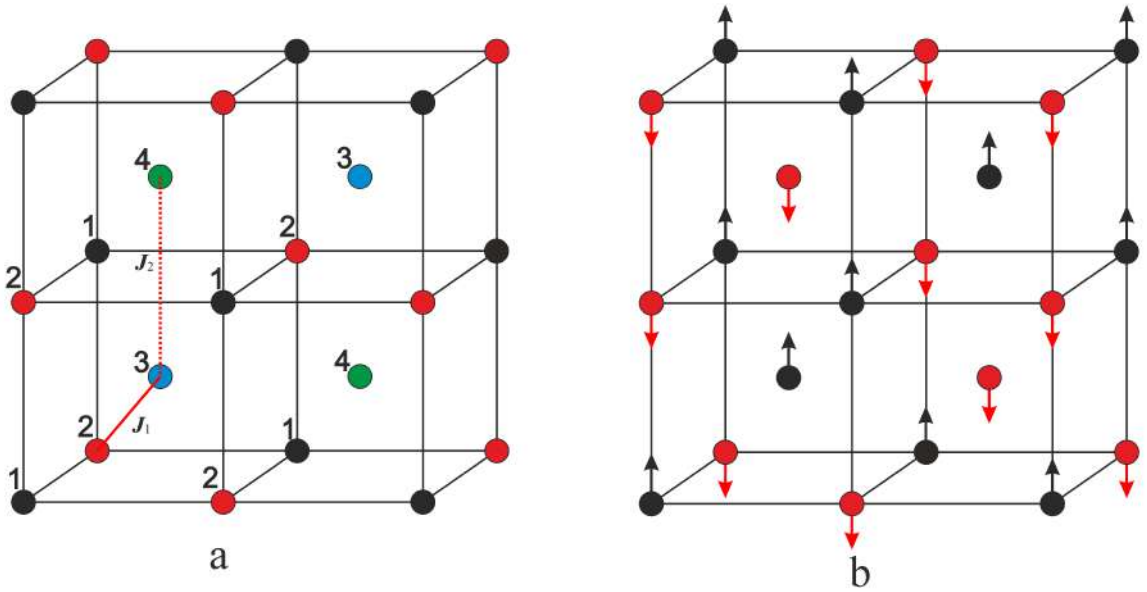


Рис. 1. a) схематическое изображение объёмно-центрированной кубической решётки, цифрами обозначены четыре подрешётки; b) AF2 упорядоченная фаза

изучении систем с конкурирующими обменными взаимодействиями и внешними магнитными полями можно выявить чёткую зависимость термодинамических параметров от взаимодействия вторых ближайших соседей и внешнего магнитного поля. Спиновые системы с дальнодействующими обменными взаимодействиями и дополнительными внешними факторами успешно изучаются этим методом. В данном исследовании мы используем репличный алгоритм метода МК. Он обладает рядом преимуществ над классическим алгоритмом Метрополиса [22; 23].

Расчёты проводились с использованием периодических граничных условий и линейными размерами $L = 12$–24, $N = 2\text{x}L\text{x}L\text{x}L$, где L измеряется в размерах элементарной ячейки, N — количество спинов в системе. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 = 10^5$ МК шагов на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка тестируемой модели. Усреднение вычисляемых параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau{=}10\tau_0$ МК шагов на спин.

2. Результаты Монте-Карло моделирования

Для построения температурной зависимости теплоёмкости использовалось выражение [24]: $C = (NK^2)\left(\langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2\right)$, где $K = |J_1|/k_BT$, U — внутренняя энергия.

Магнитная восприимчивость вычислялась по формуле [25]

$$\chi = \begin{cases} (NK)\left(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2\right), & T < T_N, \\ (NK)\langle m^2\rangle, & T \geqslant T_N, \end{cases}$$

где m — намагниченность, T_N — критическая температура. Для намагниченности системы использовалась формула

$$m = \frac{3}{N}\sqrt{\left\langle M_x^2 + M_y^2 + M_z^2\right\rangle/3}.$$

Намагниченность подрешёток вычислялась по формуле $\langle|\vec{M}_r|\rangle = \langle\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\rangle$, где $r = 1, 2, 3, 4$ — номер подрешётки (рис. 1, *a*).

Температурные зависимости для теплоёмкости и восприимчивости приведены на рис. 2. Отметим, что рост значения h сопровождается сдвигом максимумов в сторону более низких температур, одновременно с этим наблюдается спад абсолютных

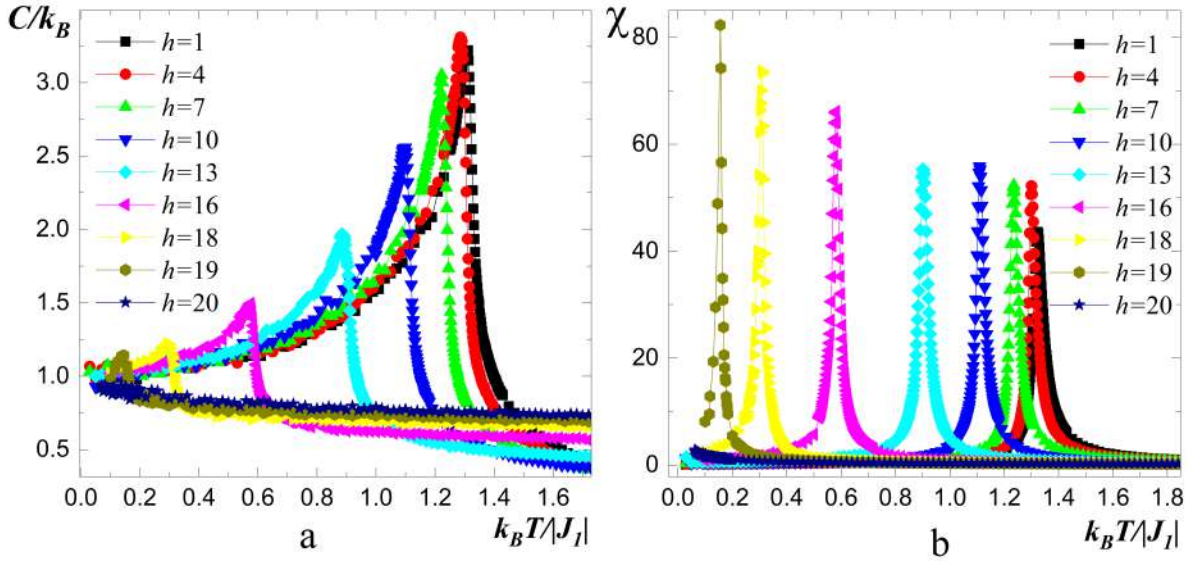


Рис. 2. a) Зависимость теплоёмкости C/k_B от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных значений h; b) зависимость магнитной восприимчивости χ от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных значений h

значений максимумов теплоёмкости и не значительный рост абсолютных значений восприимчивости. Очевидно, что это связано с подавлением флуктуаций с увеличением магнитного поля. Рост абсолютных значений магнитной восприимчивости (рис. 2, *b*) при росте значения МП связан с тем, что происходит рост флуктуаций намагниченности в точке ФП. Рост значения магнитного поля смещает температуру упорядочения к более низким значениям. На рис. 2 видно, что с увеличением МП температура ФП стремится к нулю и в конце концов размывается ФП.

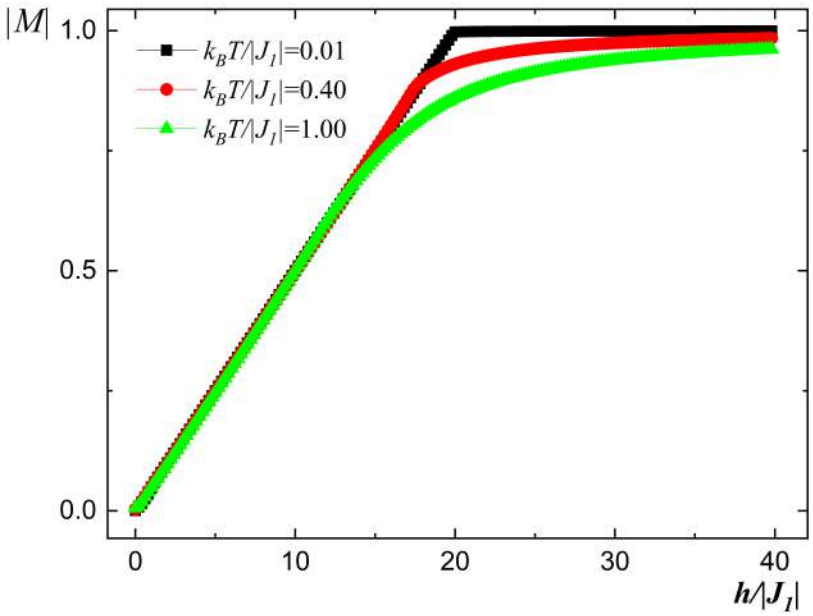


Рис. 3. Зависимость намагниченности m от магнитного поля $h/|J_1|$ для разных значений температур

На рис. 3 представлена зависимость намагниченности m от величины МП для разных значений температур. В антиферромагнитной модели Гейзенберга наблюдается единственное плато намагниченности, которое соответствует ферромагнитному упорядочению. Для основного состояния при $k_BT/|J_1| = 0.01$ с ростом поля намагниченность растёт прямолинейно и доходит до значения $m = 1$. Можно заметить, что для температур $k_BT/|J_1| = 0.4$ и 1.0 не достигается полное насыщение намагниченности при том же значении поля, что и для $k_BT/|J_1| = 0.01$. Это связано с температурными флуктуациями.

Для определения критический температуры T_N и анализа природы ФП был использован метод кумулянтов Биндера U_L четвёртого порядка [24–26]

$$U_L = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle_L}{3 \langle M^2 \rangle_L^2}.$$

На рис. 4 представлены зависимости кумулянтов Биндера четвёртого порядка

U_L для разных размеров системы L при значении магнитного поля $h = 7.0$. На рисунке видна отчётливая точка пересечения кривых при $T_N = 1.231$, которая свидетельствует, что в системе реализуется ФП второго рода. С помощью данного метода можно с высокой точностью определить температуру ФП и его тип. Точка пересечения кривых кумулянтов Биндера для разных линейных размеров указывает на критическую температуру [24–26].

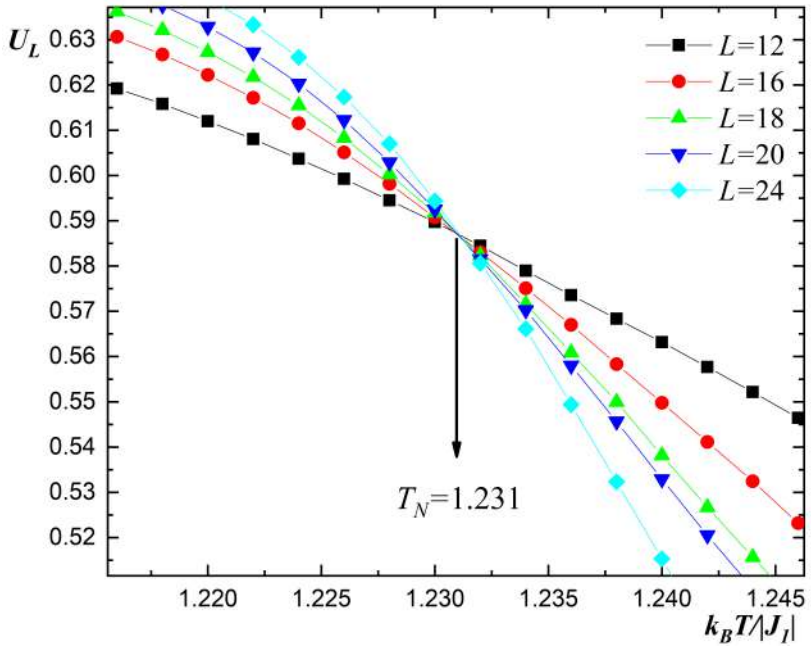


Рис. 4. Зависимость кумулянта Биндера U_L от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных L при $h = 7.0$

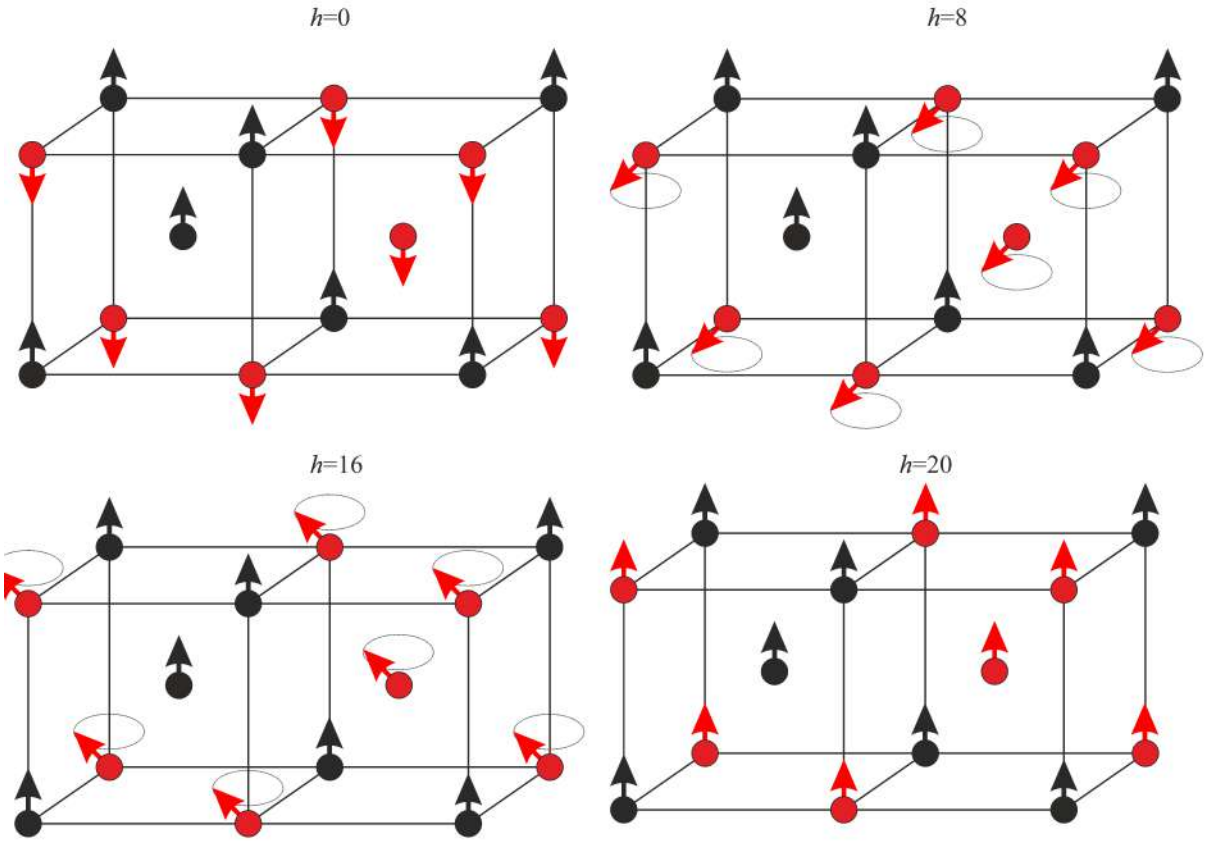


Рис. 5. Магнитное упорядочение подрешёток при наличии внешнего магнитного поля

Аналогичные зависимости кумулянтов Биндера были получены для всех значений магнитного поля в интервале $0 \leqslant h \leqslant 19$. Анализ наших результатов показывает, что в интервале $0 \leqslant h \leqslant 19$ наблюдается ФП второго рода.

На рис. 5 приведены магнитные структуры основного состояния при разных значениях магнитного поля. Магнитное поле направлено вдоль спинов, окрашенных чёрным цветом (вверх). Структуры получены в основном состоянии при близкой к нулю температуре. Видно, что с увеличением значения МП спины подрешёток, направленные против направления МП, ориентируются по направлению поля. При достижении магнитного поля $h = 20.0$ система в основном состоянии упорядочена ферромагнитно.

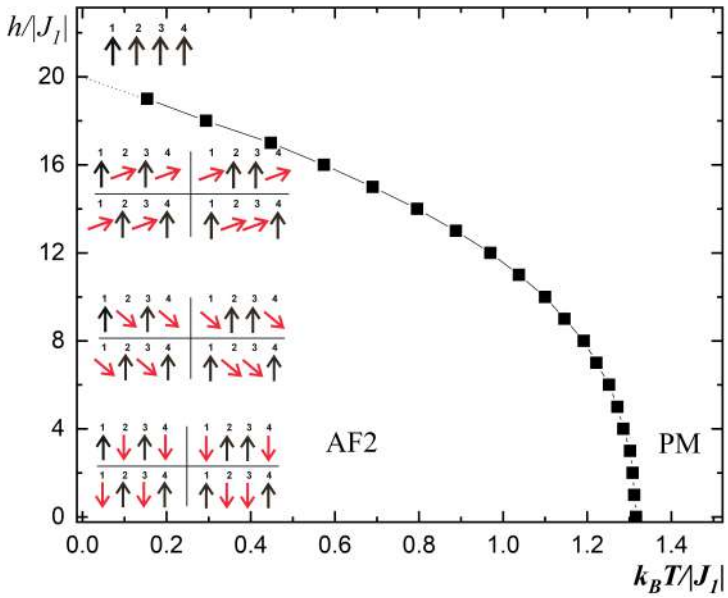


Рис. 6. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от магнитного поля $h/|J_1|$

На рис. 6 показана фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля h. Чёрными и красными стрелками обозначены направления спинов в каждой подрешётке, а цифры над стрелками указывают на номер подрешётки. При небольшом или нулевом значении магнитного поля система имеет упорядочение типа AF2. AF2 может иметь 4 вариации антиферромагнитного упорядочения, как показано на рис. 6 [10]. На рис. 6 видно, что с увеличением значения МП две противонаправленные подрешётки плавно поворачиваются по направлению магнитного поля и при значении магнитного поля $h = 20$ система переходит в ферромагнитное состояние. Дальнейшее увеличение магнитного поля $h \geqslant 20$ подавляет ФП. Анализ результатов показывает, что во всём интервале значения магнитного поля $0 \leqslant h \leqslant 19$ в системе реализуется ФП второго рода из антиферромагнитной фазы AF2 в парамагнитную фазу PM. С увеличением значения магнитного поля антиферромагнитная фаза основного состояния плавно переходит в ферромагнитную фазу.

Заключение

Проведены исследования антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с учётом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей для $k = J_2/J_1 = 1$ при наличии внешнего магнитного поля. Получены зависимости теплоёмкости C, восприимчивости χ от температуры для разных значений МП. Также построены зависимости намагниченности m от величины магнитного поля для раз-

ных температур. Определён род фазового перехода в большом интервале магнитного поля и показано, что в системе реализуется только ФП второго рода. Получены магнитные структуры основного состояния для разных значений МП. Показано, что в основном состоянии для данной модели реализуется AF2-упорядочение. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины магнитного поля антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями.

Список литературы

1. **Lacroix C., Mendels P., Mila F. (eds.)** Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011.
2. **Chubukov A. V., Golosov D. I.** Quantum theory of an antiferromagnet on a triangular lattice in a magnetic field // Journal of Physics: Condensed Matter. 1991. Vol. 3. P. 69.
3. **Kawamura H.** Monte Carlo study of chiral criticality — XY and Heisenberg stacked-triangular antiferromagnets // Journal of the Physical Society of Japan. 1992. Vol. 61, no. 4. P. 1299–1325.
4. **Gvozdikova M., Melchy P., Zhitomirsky M.** Magnetic phase diagrams of classical triangular and kagome antiferromagnets // Journal of Physics: Condensed Matter. 2011. Vol. 23. P. 164209.
5. **Mi B.-Zh.** Thermodynamic properties of frustrated arbitrary spin-S J1-J2 quantum Heisenberg antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation // Solid State Communications. 2016. Vol. 239. P. 20–26.
6. **Mi B.-Zh.** Magnetism and thermodynamics of the anisotropic frustrated spin-1 Heisenberg antiferromagnet on a body-centered cubic lattice // Solid State Communications. 2017. Vol. 251. P. 79–87.
7. **Richter J., Meuller P., Lohmann A., et al.** High-temperature expansion for frustrated magnets: Application to the J1-J2 model on the BCC lattice // Physics Procedia. 2015. Vol. 75. P. 813–820.
8. **Sushkov O. P., Oitmaa J., Weihong Z.** Quantum phase transitions in the two-dimensional J1-J2 model // Physical Review B. 2001. Vol. 63. P. 104420.
9. **Richter J., Ivanov N. B., Retzlaff K.** On the violation of Marshall–Peierls sign rule in the frustrated J1-J2 Heisenberg antiferromagnet // Europhysics Letters. 1994. Vol. 25. P. 545–550.
10. **Murtazaev A. K., Kurbanova D. R., Ramazanov M. K.** Phase transitions and critical properties of the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with second-neighbor interactions // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2019. Vol. 156, no. 5. P. 980–988.
11. **Murtazaev A. K., Kurbanova D. R., Ramazanov M. K.** Phase diagram of the antiferromagnetic Heisenberg model on a bcc lattice with competing first and second neighbor interactions // Physica A. 2020. Vol. 545. P. 123548.
12. **Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Kurbanova D. R., et al.** Phase transitions and the critical properties of the Heisenberg model on a body-centered cubic lattice // Physics of the Solid State. 2019. Vol. 61. P. 1107–1112.
13. **Binder K., Landau D. P.** Phase diagrams and critical behavior in Ising square lattices with nearest- and next-nearest-neighbor interactions // Physical Review B. 1980. Vol. 21, no. 5. P. 1941–1962.
14. **Ye M., Chubukov A. V.** Quantum phase transitions in the Heisenberg J1-J2 triangular antiferromagnet in a magnetic field // Physical Review B. 2017. Vol. 95. P. 014425.
15. **Kazuaki M., Yukiyasu O.** Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field // Physical Review B. 2020. Vol. 101. P. 184427.

16. **Yamamoto D., Suzuki C., Marmorini G., et al.** Quantum and thermal phase transitions of the triangular SU(3) Heisenberg model under magnetic fields // Physical Review Letters. 2020. Vol. 125. P. 057204.
17. **Moran-Lopez J. L., Aguilera-Granja F., Sanchez J. M.** Phase transitions in king square antiferromagnets with first and second-neighbour interactions // Journal of Physics: Condensed Matter. 1994. Vol. 6. P. 9759–9772.
18. **Banavar J. R., Jasnow D., Landau D. P.** Fluctuation-induced first-order transition in a bcc Ising model with competing interactions // Physical Review B. 1979. Vol. 20, no. 9. P. 3820–3827.
19. **Oitmaa J., Zheng W.** Phase diagram of the bcc S=1/2 Heisenberg antiferromagnet with first and second neighbor exchange // Physical Review B. 2004. Vol. 69. P. 064416.
20. **Pantic M. R., Kapor D., Radosevic S., et al.** Phase diagram of spin-1/2 quantum Heisenberg J1-J2 antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation // Solid State Communications. 2014. Vol. 182. P. 55–58.
21. **Metropolis N., Rosenbluth W., Rosenbluth N., et al.** Equation of state calculations by fast computing machines // The Journal of Chemical Physics. 1953. Vol. 21, no. 6. P. 1087–1092.
22. **Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y.** Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers // Peptide Science. 2001. Vol. 60. P. 96.
23. **Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Badiev M. K.** Phase transitions and critical phenomena in the antiferromagnetic Ising model on a layered triangular lattice // Physica A. 2018. Vol. 507. P. 210–218.
24. **Binder K., Wang J. Sh.** Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations // Journal of Statistical Physics. 1989. Vol. 55. P. 87–126.
25. **Peczak P., Alan M., Ferrenberg A. M., et al.** High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet // Physical Review B. 1991. Vol. 43, no. 7. P. 6087–6093.
26. **Binder K., Heermann D. W.** Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. An Introduction. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1988.

Поступила в редакцию 30.04.2025.
После переработки 04.08.2025.

Сведения об авторах

Муртазаев Акай Курбанович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, директор Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, Махачкала, Россия; e-mail: akai2005@mail.ru

Муртазаев Курбан Шамильевич, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: 5kurban@mail.ru.

Магомедов Магомед Алиевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной физики и физики фазовых переходов, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: magomedov_ma@mail.ru

Рамазанов Магомедшейх Курбанович, кандидат физико-математических наук, заведеющий лабораторией математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: sheikh77@mail.ru

Джамалудинов Магомед Русланович, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: dzhamaludinov.1993@mail.ru

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 767–776.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-767-776

STUDY OF THE ANTIFERROMAGNETIC HEISENBERG MODEL ON A BODY-CENTERED CUBIC LATTICE

A.K. Murtazaev, K.Sh. Murtazaev[a], M.A. Magomedov[b], M.K. Ramazanov, M.R. Jamaludinov

Institute of Physics named after Kh.I. Amirkhanov, Dagestan Federal Research Center of RAS, Makhachkala, Russia

[a] 5kurban@mail.ru, [b] magomedov_ma@mail.ru

Monte Carlo replica-exchange algorithm was used to study the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with competing exchange interactions in the presence of an external magnetic field. The influence of the external magnetic field on the thermodynamic and magnetic properties of this model was investigated. Temperature and field dependences of the main thermodynamic parameters were obtained. A phase diagram of the critical temperature as a function of the external magnetic field was constructed for the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice. The ground-state magnetic structures were obtained over a wide range of magnetic fields.

Keywords: *Monte Carlo method, magnetic field, spin system, volume-centered cubic lattice, Heisenberg model.*

References

1. **Lacroix C., Mendels P., Mila F. (eds.)** *Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011.
2. **Chubukov A.V., Golosov D.I.** Quantum theory of an antiferromagnet on a triangular lattice in a magnetic field. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1991, vol. 3, p. 69.
3. **Kawamura H.** Monte Carlo study of chiral criticality — XY and Heisenberg stacked-triangular antiferromagnets. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1992, vol. 61, no. 4, pp. 1299–1325.
4. **Gvozdikova M., Melchy P., Zhitomirsky M.** Magnetic phase diagrams of classical triangular and kagome antiferromagnets. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2011, vol. 23, p. 164209.
5. **Mi B.-Zh.** Thermodynamic properties of frustrated arbitrary spin-S J1-J2 quantum Heisenberg antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation. *Solid State Communications*, 2016, vol. 239, pp. 20–26.
6. **Mi B.-Zh.** Magnetism and thermodynamics of the anisotropic frustrated spin-1 Heisenberg antiferromagnet on a body-centered cubic lattice. *Solid State Communications*, 2017, vol. 251, pp. 79–87.
7. **Richter J., Meuller P., Lohmann A., et al.** High-temperature expansion for frustrated magnets: Application to the J1-J2 model on the BCC lattice. *Physics Procedia*, 2015, vol. 75, pp. 813–820.
8. **Sushkov O.P., Oitmaa J., Weihong Z.** Quantum phase transitions in the two-dimensional J1-J2 model. *Physical Review B*, 2001, vol. 63, p. 104420.
9. **Richter J., Ivanov N.B., Retzlaff K.** On the violation of Marshall–Peierls sign rule in the frustrated J1-J2 Heisenberg antiferromagnet. *Europhysics Letters*, 1994, vol. 25, pp. 545–550.

The work was performed within the framework of the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics (NCPM) under the project “Research in High and Ultra-High Magnetic Fields”.

10. **Murtazaev A.K., Kurbanova D.R., Ramazanov M.K.** Phase transitions and critical properties of the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with second-neighbor interactions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 156, no. 5, pp. 980–988.
11. **Murtazaev A.K., Kurbanova D.R., Ramazanov M.K.** Phase diagram of the antiferromagnetic Heisenberg model on a bcc lattice with competing first and second neighbor interactions. *Physica A*, 2020, vol. 545, p. 123548.
12. **Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Kurbanova D.R., et al.** Phase transitions and the critical properties of the Heisenberg model on a body-centered cubic lattice. *Physics of the Solid State*, 2019, vol. 61, pp. 1107–1112.
13. **Binder K., Landau D.P.** Phase diagrams and critical behavior in Ising square lattices with nearest- and next-nearest-neighbor interactions. *Physical Review B*, 1980, vol. 21, no. 5, pp. 1941–1962.
14. **Ye M., Chubukov A.V.** Quantum phase transitions in the Heisenberg J1-J2 triangular antiferromagnet in a magnetic field. *Physical Review B*, 2017, vol. 95, p. 014425.
15. **Kazuaki M., Yukiyasu O.** Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field. *Physical Review B*, 2020, vol. 101, p. 184427.
16. **Yamamoto D., Suzuki C., Marmorini G., et al.** Quantum and thermal phase transitions of the triangular SU(3) Heisenberg model under magnetic fields. *Physical Review Letters*, 2020, vol. 125, p. 057204.
17. **Moran-Lopez J.L., Aguilera-Granja F., Sanchez J.M.** Phase transitions in king square antiferromagnets with first and second-neighbour interactions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1994, vol. 6, pp. 9759–9772.
18. **Banavar J.R., Jasnow D., Landau D.P.** Fluctuation-induced first-order transition in a bcc Ising model with competing interactions. *Physical Review B*, 1979, vol. 20, no. 9, pp. 3820–3827.
19. **Oitmaa J., Zheng W.** Phase diagram of the bcc S=1/2 Heisenberg antiferromagnet with first and second neighbor exchange. *Physical Review B*, 2004, vol. 69, p. 064416.
20. **Pantic M.R., Kapor D., Radosevic S., et al.** Phase diagram of spin-1/2 quantum Heisenberg J1-J2 antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation. *Solid State Communications*, 2014, vol. 182, pp. 55–58.
21. **Metropolis N., Rosenbluth W., Rosenbluth N., et al.** Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 1953, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092.
22. **Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y.** Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers. *Peptide Science*, 2001, vol. 60, p. 96.
23. **Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Badiev M.K.** Phase transitions and critical phenomena in the antiferromagnetic Ising model on a layered triangular lattice. *Physica A*, 2018, vol. 507, pp. 210–218.
24. **Binder K., Wang J.Sh.** Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations. *Journal of Statistical Physics*, 1989, vol. 55, pp. 87–126.
25. **Peczak P., Alan M., Ferrenberg A.M., et al.** High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet. *Physical Review B*, 1991, vol. 43, no. 7, pp. 6087–6093.
26. **Binder K., Heermann D.W.** *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. An Introduction.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1988.

Article received 30.04.2025.
Corrections received 04.08.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 777–787.

УДК 546.26:543.442.3 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-777-787

СТРУКТУРНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ УГЛЕРОДНОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ПЕКОВОГО КОКСА В ПРОЦЕССЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ

А. Г. Фазлитдинова[a], В. А. Тюменцев[b], И. П. Карих[c]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]fazlitdinovaag@mail.ru, [b]tyum@csu.ru, [c]ivan_karix@mail.ru

Методами рентгеновской дифракции и спектроскопии комбинационного рассеяния исследована последовательность структурных преобразований углеродного материала, изготовленного на основе пекового кокса, в процессе высокотемпературной обработки в интервале температур 1100–2200 °C. Показано, что рекристаллизация углеродных материалов сопровождается формированием кристаллов графита через ряд промежуточных метастабильных состояний. Повышение температуры обработки от 1100 до ∼1800 °C стимулирует только процесс перекристаллизации наноструктурированного углеродного материала. Обнаружена температурная область (∼1900 °C), при которой происходит резкая перестройка структуры материала, проявляющаяся в существенных изменениях значений межплоскостного расстояния, размеров областей когерентного рассеяния и фазового состава углеродного материала.

Ключевые слова: *пековый кокс, графитация, рентгеноструктурный анализ, спектроскопия комбинационного рассеяния, тонкая структура.*

Введение

Графитированные углеродные материалы конструкционного назначения обладают рядом уникальных эксплуатационных свойств — химической и радиационной стойкостью, высокой тепло- и электропроводностью, низким коэффициентом трения — и способны работать при высоких температурах [1–4]. В качестве исходного прекурсора для производства графитированных материалов широко используют пековый кокс. Прокаленные при ∼800–1000 °C дисперсные пековые коксы, поступающие на стадию смешения с пековым связующим, содержат до 96.5 масс. % углерода, водорода — до 0.9 масс. %, серы — до 0.6 масс. %, азота — до 1.2 масс. %, кислорода — до 0.7 масс. % [5]. В процессе высокотемпературной обработки (карбонизации и графитации) происходит постепенное удаление летучих [6–8]. При температурах выше 1400 °C активируется процесс перекристаллизации наноструктурированных углеродных материалов на основе нефтяных или пековых коксов, наблюдается постепенное увеличение размеров областей когерентного рассеяния (ОКР) и уменьшение межплоскостного расстояния d_{002} от ∼3.5 до 3.37–3.35 Å [1; 9; 10] (степень графитации материалов постепенно увеличивается [11]). Активные химические преобразования наноструктурированных углеродных материалов при высоких температурах могут оказывать существенное влияние на одновременно развивающуюся перекристаллизацию, стимулировать этот процесс. При этом

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ФПНИ «ЧелГУ» (№ 2025/16).

изменение значения d_{002} от условий обработки может происходить ступенчато. Так, авторы [12–16] полагают, что в углеродных материалах могут формироваться метастабильные состояния, отличающиеся значением d_{002}. В [13] отмечается, что таким состояниям соответствуют межплоскостные расстояния d_{002} при значениях, равных 3.36, 3.37, 3.40, 3.425 и 3.44 Å. В работах [14; 15] на зависимостях d_{002} от условий обработки обнаружены плато при d_{002} 3.38, 3.40, 3.425, 3.44 и 3.55/3.68 Å. Возможность существования промежуточных углеродных фаз впервые была рассмотрена в работах В. Г. Нагорного [12]. Автором проанализированы возможные угловые сопряжения графитовых плоскостей, в результате которых могут сформироваться в углеродном материале области со следующими значениями межплоскостных расстояний: $d_{G0} = 0.365$ нм, $d_{G1} = 0.344$ нм (турбостратная структура), $d_{G2} = 0.3354$ нм (графитовая структура), $d_{G3} = 0.334$ нм. Формирование нескольких таких метастабильных состояний в углеродном материале обусловливает появление асимметрии дифракционных максимумов (002) и (004). Анализ профилей таких асимметричных максимумов позволяет получать новые данные о тонкой структуре углеродного материала [17–19].

Целью работы является исследование закономерностей изменения тонкой структуры пековых коксов в зависимости от температуры обработки методами рентгеновской дифракции и спектроскопии комбинационного рассеяния.

Объекты и методы исследования

Исследования проведены на образцах, изготовленных на пековом коксе, связующее ∼25 масс.% пека. Образцы углеродных материалов прошли термообработку в интервале температур от 1100 до 2200 °C. Скорость подъёма температуры до заданного значения составляла 300 град./ч, время изотермической выдержки — 3 часа.

Рентгеноструктурные исследования выполнены с помощью порошкового дифрактометра D8 ADVANCE в геометрии Брегга — Брентано (фильтрованное Cu Kα-излучение, сканирование θ/θ). Межплоскостные расстояния и размеры ОКР (L_{hkl}) определяли по центру тяжести и интегральной ширине дифракционных максимумов (предварительно проведено разделение дуплета Kα):

$$L_{hkl} = \frac{k \cdot \lambda}{\beta \cdot \cos\theta}, \tag{1}$$

где λ — длина волны рентгеновского излучения CuKα_1 (1.5405 Å); β — интегральная ширина максимума; $k = 0.89$ — при вычислении средних размеров ОКР в направлении (002); $k = 1.84$ — при вычислении средних размеров ОКР в направлении (100).

Спектры комбинационного рассеяния регистрировали в широком спектральном диапазоне 350–4000 см$^{-1}$ с помощью лазерного спектрометра КР фирмы EnSpectr с длиной волны 532 нм. Для определения средних характеристик линий КР выполнено микрокартирование исследуемых образцов с шагом 50 мкм (∼50 измерений в точках каждого образца с шагом 50 мкм). Средние размеры ОКР (L_a, нм) в базисной плоскости определяли по формуле, предложенной в [20, 21]:

$$L_a = 2{,}4 \cdot 10^{-10} \cdot \lambda^4 \cdot \left(\frac{I_D}{I_G}\right)^{-1},$$

где λ — длина волны излучения (532 нм), I_D/I_G — отношение интенсивностей линий спектра D и G.

Обработку экспериментально наблюдаемых дифракционных максимумов проводили с помощью программного пакета OriginLab.

Экспериментальная часть

На рис. 1 приведены профили характерного для углеродного материала дифракционного максимума (002), полученные от образцов, прошедших высокотемпературную обработку в интервале от 1100 до 2200 °C. По центру тяжести и интегральной ширине таких асимметричных максимумов вычислены средние значения межплоскостных расстояний d_{002} и размеров областей когерентного рассеяния L_{002}.

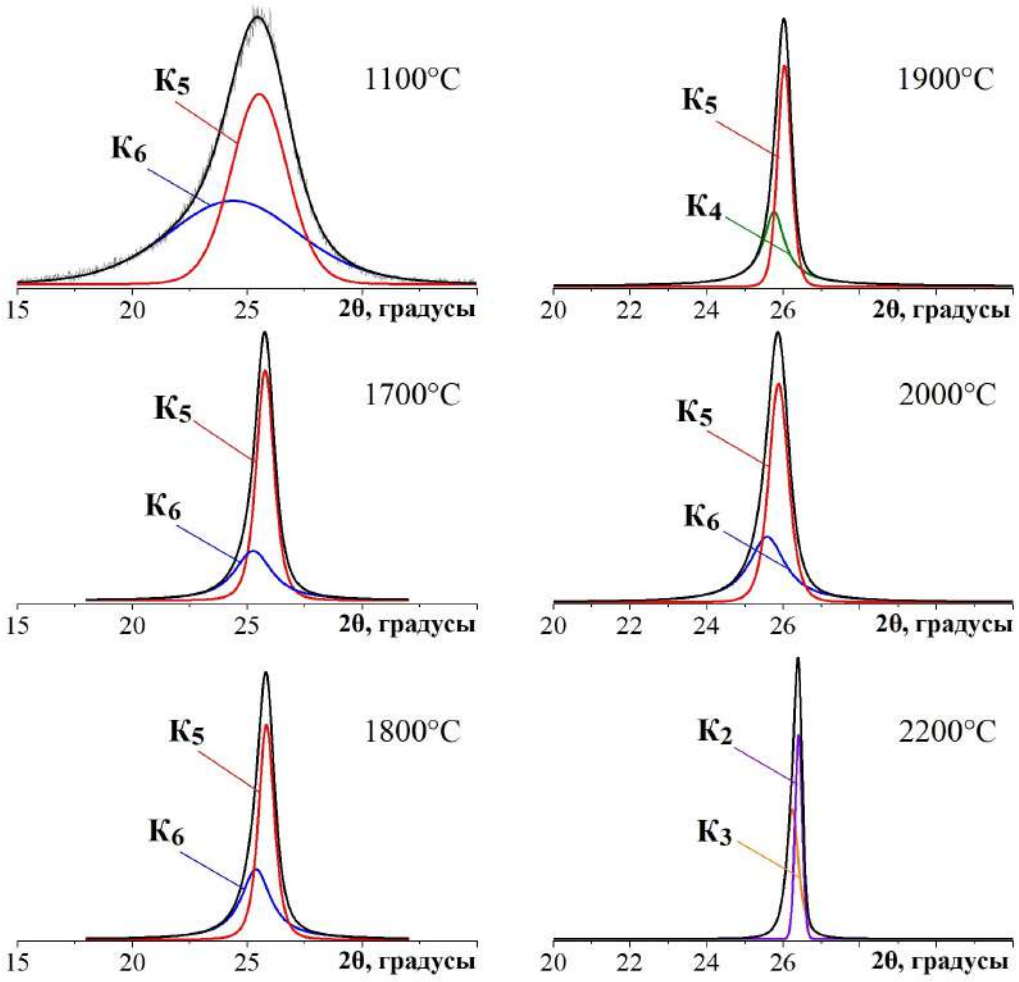


Рис. 1. Профили дифракционных максимумов (002) исследованных образцов углеродного материала на основе пекового кокса и результаты разделения максимума на симметричные компоненты

Как видно на рис. 2, по мере повышения температуры обработки до 1400 °C наблюдается уменьшение средних значений d_{002} от 3.56 до 3.48 Å. В интервале температур 1400–1800 °C средние значения d_{002} практически не изменяются. Дальнейшее уменьшение значений межплоскостного расстояния до 3.39 Å (температура ∼2200 °C) не монотонно. При температуре обработки ∼1900 °C, по сравнению с ∼2000 °C, происходят более активные структурные преобразования углеродного материала, сопровождающиеся существенным уменьшением среднего значения d_{002} и ростом средних размеров ОКР L_{002} до 3.45 Å и ∼ 12.5 нм соответственно. Среднее значение L_{002} углеродного материала достаточно плавно в интервале 1100–1800 °C увеличивается от ∼2.5 до ∼7.5 нм, а в результате обработки при ∼2200 °C возрастает до ∼22.5 нм.

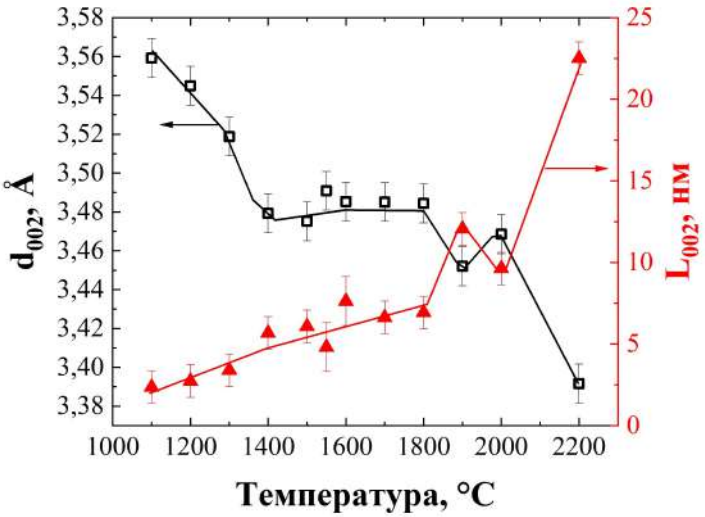


Рис. 2. Изменение средних значений межплоскостного расстояния (d_{002}) и средних размеров областей когерентного рассеяния (L_{002}) углеродного материала в процессе графитации

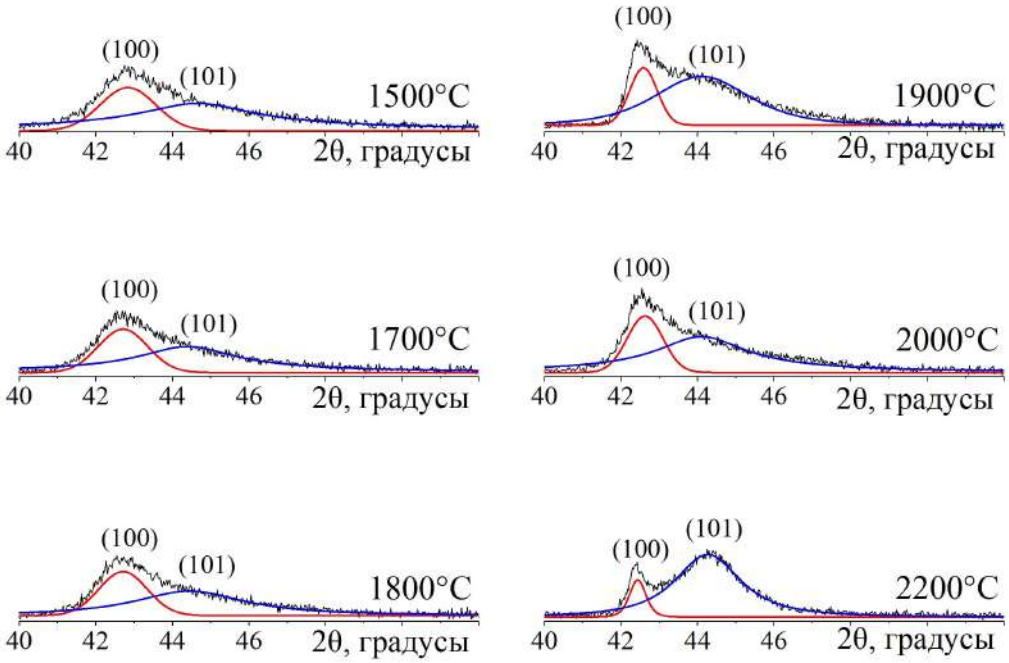


Рис. 3. Фрагменты рентгенограмм углеродного материала на основе пекового кокса, прошедших термообработку при 1500–2200 °C

Для определения средних размеров ОКР в азимутальной плоскости (L_{100}) были записаны рентгенограммы исследуемых углеродных материалов, прошедших термообработку при 1500 °C и выше, в диапазоне брэгговских углов от 40 до 52 градусов. На рентгенограммах образцов наблюдается широкий максимум, являющийся результатом наложения близко расположенных дифракционных максимумов (100) и (101) графита (брэгговские углы 2θ — ∼42.3 и ∼44.5 градуса соответственно, PDF № 01-089-7213). Для вычисления средних размеров ОКР L_{100} по формуле Шеррера (1) проведено разделение таких профилей на две компоненты, описываемые функциями Пирсона (рис. 3). По выделенной таким образом компоненте (100) определили центр тяжести, интегральную ширину максимумов и вычислили значения d_{100} и L_{100}. В образцах, прошедших термообработку в интервале 1500–1800 °C и 2000 °C, средние размеры ОКР L_{100} составляют ∼10–16 нм. В процессе изотермической выдержки при 1900 °C наблюдается более активная перекристаллизация материала, значение L_{100} увеличивается до 20 нм. После термообработки при 2200 °C средние размеры ОКР составляют ∼30 нм (рис. 4).

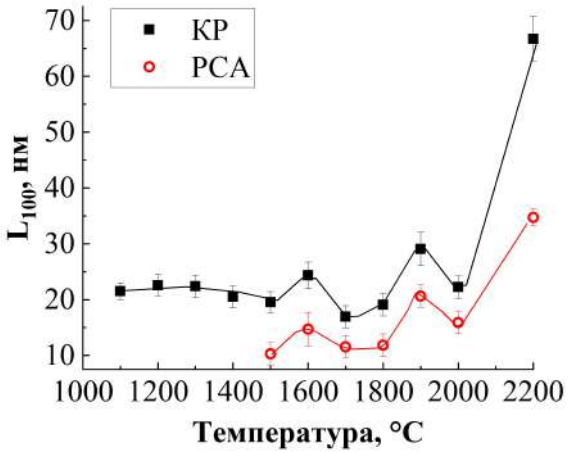


Рис. 4. Изменение средних значений размеров ОКР (L_{100}) углеродного материала в процессе термообработки, вычисленных по данным рентгеновской дифракции (РСА) и спектроскопии комбинационного рассеяния (КР)

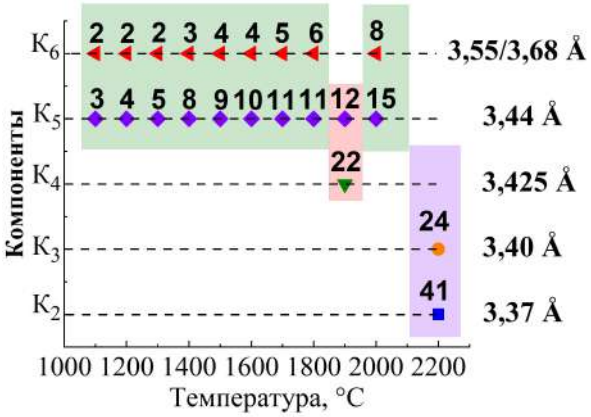


Рис. 5. Последовательность изменения компонентного состава и размеров L_{002} (указаны числами рядом с точками на графике) углеродного материала, изготовленного на основе пекового кокса, по мере повышения температуры обработки от 1100 до 2200 °С

Рассмотрим более детально изменение тонкой структуры углеродного материала в процессе высокотемпературной обработки. Дифракционный максимум (002) остаётся асимметричным на всех этапах термообработки (рис. 1), что, по-видимому, обусловлено структурной неоднородностью исследуемого материала. Аналогично работам [17–19] проведено разделение асимметричных профилей (002) на минимальное количество компонент, описываемых функцией Пирсона. Применительно к исследованному материалу асимметричные максимумы можно представить в виде суперпозиции двух симметричных компонент, коэффициент детерминации $R^2 =$ 0.9962–0.9997, рис. 1. Этим компонентам соответствуют метастабильные состояния со значениями межплоскостных расстояний d_{002}, близкими к таковым, приведённым в работах [13; 14; 16–19]. Так, в углеродном материале, прошедшем термообработку в температурном диапазоне от 1100 до 1800 °С, присутствуют метастабильные состояния К5 (d_{002} ~3.44 Å) и К6 (d_{002} ~3.55/3.68 Å), размеры ОКР L_{002} которых постепенно увеличиваются от 3 до 11 нм и от 2 до 6 нм соответственно, рис. 5. Компонентный состав образца изменяется после обработки при температуре 1900 °С.

Наряду с метастабильным состоянием К5 (средние размеры увеличились до ~12 нм) появляется состояние К4, которому соответствуют значения d_{002} ~3.425 Å и L_{002} ~22 нм. После обработки исходного образца при более высокой температуре 2000 °С в углеродном материале вновь регистрируются две компоненты К5 и К6, которым соответствуют значения L_{002} ~15 и 8 нм. В образце, прошедшем термообработку при 2200 °С, формируются новые метастабильные состояния К2 и К3, межплоскостные расстояния которых составляют d_{002} ~ 3,37 и ~ 3,40 Å, а размеры ОКР — ~41 и 24 нм соответственно.

Процесс структурных преобразований углеродного материала на основе пекового кокса исследован методом спектроскопии комбинационного рассеяния в более широком температурном интервале от 1100 до 2200 °С. На спектрах КР наблюдаются характерные для sp^2-углерода линии первого порядка D (в области ~1350 $см^{-1}$, «defects, disorder») и G (в области ~1580 $см^{-1}$, «graphite»), а также линия D' (~1620 $см^{-1}$) как плечо на линии G, которую связывают с дефектами решётки графита (рис. 6). После обработки при 1800 °С и выше появляется линия второго порядка 2D (в области ~2700 $см^{-1}$). Изменение параметров линий спектра КР исследуемых образцов приведено в таблице. Повышение температуры сопровождается уменьшением полуширины ($\Delta\nu_{1/2}$) линий, что обусловлено образованием

sp^2-углерода в образцах.

По результатам микрокартирования (выполнено ∼50 измерений в точках каждого образца с шагом 50 мкм) были вычислены средние значения соотношений интенсивностей линий D и G (I_D/I_G) и среднеквадратического отклонения $\sigma(I_D/I_G)$, см. таблицу.

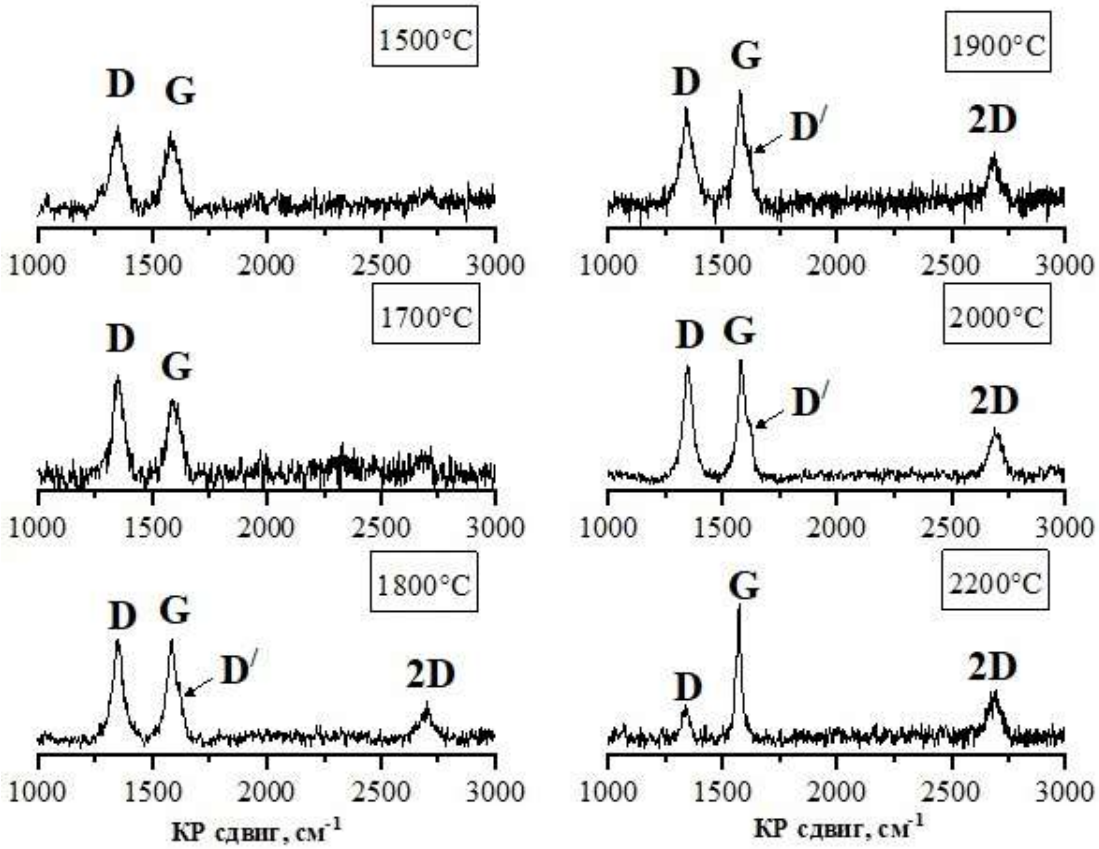


Рис. 6. Спектры КР углеродных композитов на основе пекового кокса, прошедших термообработку в интервале 1500–2200 °C

Положение (ν) и полуширина ($\Delta\nu_{1/2}$) линий D и G спектра КР, среднее значение (I_D/I_G) и среднеквадратическое отклонение (σ) величины степени разупорядоченности структуры исследуемых образцов углеродных материалов

T, °C	D		G		I_D/I_G	$\sigma(I_D/I_G)$
	ν, см$^{-1}$	$\Delta\nu_{1/2}$, см$^{-1}$	ν, см$^{-1}$	$\Delta\nu_{1/2}$, см$^{-1}$		
1100	1344.7	98.2	1590.8	79.2	0.89	0.07
1200	1343.9	73.5	1597.4	67.7	0.85	0.10
1300	1342.4	88.0	1584.7	79.7	0.86	0.08
1400	1344.4	71.9	1584.9	74.0	0.94	0.09
1500	1344.3	72.8	1583.7	76.3	0.99	0.08
1600	1348.7	53.4	1583.6	57.0	0.79	0.06
1700	1350.7	62.6	1592.8	67.6	1.14	0.12
1800	1349.2	66.9	1589.4	69.4	1.01	0.09
1900	1346.1	64.6	1543.7	54.9	0.66	0.15
2000	1350.1	50.9	1586.4	51.8	0.86	0.09
2200	1343.3	47.0	1571.2	26.6	0.29	0.05

Для углеродного материала, прошедшего обработку в температурном диапазоне при 1100–1500 °C, среднее значение I_D/I_G и величина $\sigma(I_D/I_G)$ составляют ∼0.90 и 0.08 соответственно. Интенсивность линии D в спектре КР уменьшилась после обработки углеродного материала при 1600 °C, в результате значение степени

разупорядоченности (отношение I_D/I_G) составило ∼0.79. Повышение температуры обработки до 1800 °C обусловливает увеличение значения I_D/I_G до ∼1.00. Резкое уменьшение значения степени разупорядоченности (отношения I_D/I_G) и увеличение среднеквадратического отклонения $\sigma(I_D/I_G)$ до ∼0.15 наблюдается у образца, прошедшего термообработку при 1900 °C. Это может быть обусловлено более активной перекристаллизацией наноструктурированного материала и формированием метастабильных состояний К5 и К4, которым соответствуют значения d_{002} ∼3.44 и 3.425 Å, а также L_{002} ∼12 и 22 нм соответственно. В процессе изотермической термообработки при более высокой температуре 2000 °C столь активной перекристаллизации наноструктурированного углеродного материала не наблюдается. Структурные преобразования активируются при 2200 °C — соотношение интенсивностей I_D/I_G и величина $\sigma(I_D/I_G)$ уменьшаются до ∼0.29 и 0.05 соответственно.

Заключение

Методами рентгеновской дифракции и спектроскопии комбинационного рассеяния исследована последовательность структурных преобразований углеродного материала, изготовленного на основе пекового кокса, в процессе высокотемпературной обработки в интервале температур 1100–2200 °C. Показано, что углеродный материал во всём исследованном температурном интервале изотермических обработок гетерогенен. По результатам анализа профиля асимметричного максимума (002) можно предполагать одновременное присутствие в образце двух метастабильных состояний. Повышение температуры обработки от 1100 до ∼1800 °C стимулирует только процесс перекристаллизации наноструктурированного углеродного материала (размеры ОКР L_{002} увеличились в ∼4 раза, L_{100} в ∼1.2 раза). При этом фазовый состав образцов не меняется — присутствуют метастабильные состояния К5 и К6, (d_{002} ∼3.44 и ∼3.55/3.68 Å). В процессе изотермической выдержки при ∼1900 °C наблюдается более активная по сравнению с ∼2000 °C перекристаллизация углеродного материала и формирование ОКР нового метастабильного состояния К4, которому соответствуют значения d_{002} ∼3.425 Å и L_{002} ∼22 нм. После термообработки при 2200 °C в углеродном материале формируются метастабильные состояния К2 и К3, d_{002} которых ∼3.37 и ∼3.40 Å соответственно.

Список литературы

1. **Liu F., Wang H., Xue L., Fan L., Zhu Zh.** Effect of microstructure on the mechanical properties of PAN-based carbon fibers during high-temperature graphitization // Journal of Materials Science. 2008. Vol. 43, no. 10. P. 4316–4322.

2. **Kurpaska L., Frelek-Kozak M., Wilczopolska M., et al.**, Structural and mechanical properties of different types of graphite used in nuclear applications // Journal of Molecular Structure. 2020. Vol. 1217. P. 128370.

3. **Liu H., Zhu Sh., Chang Y., Hou W., Han G.** Pitch-based carbon materials: a review of their structural design, preparation and applications in energy storage // New Carbon Materials. 2023. Vol. 38, no. 3. P. 459–473.

4. **Xu X., Cui L., Shi J., et al.** Effects of co-carbonization of medium and low temperature refined pitch and high temperature refined pitch on the structure and properties of needle coke // Journal of Analytical and Applied Pyrolysis. 2023. Vol. 169. P. 105783.

5. **Степаненко М. А., Брон Я. А., Кулаков Н. К.** Производство пекового кокса. Харьков : Металлургиздат, 1961.

6. **Legin-Kolar M., Radenovic A., Ugarkovic D.** Changes in structural parameters of different cokes during heat treatment to 2400 °C // Fuel. 1999. Vol. 78, no. 13. P. 1599–1605.
7. **Li Ch., Liu X., Zhou Zh., Dai Zh., Yang J., Wang F.** Effect of heat treatment on structure and gasification reactivity of petroleum coke // International Journal of Coal Science & Technology. 2016. Vol. 3, no.1. P. 53–61.
8. **Lee S., Hwang Y., Byun T., Ko J., Roh J.** Effect of heating rate, temperature, and residence time during graphitization on the mechanical and electrical properties of isotropic graphite blocks // Carbon. 2023. Vol. 208. P. 443–451.
9. **Zhao J., Yang L., Li F., Yu R., Jin C.** Structural evolution in the graphitization process of activated carbon by high-pressure sintering // Carbon. 2009. Vol. 47, no. 3. P. 744–751.
10. **Samoilov V. M., Verbets D. B., Bubnenkov I. A., et al.** Influence of graphitization conditions at 3000°C on structural and mechanical properties of high-modulus polyacrylonitrile-based carbon fibers // Inorganic Materials: Applied Research. 2018. Vol. 9, no. 5. P. 890–899.
11. **Бубненков И. А., Кошелев Ю. И., Швецов А. А., Бардин Н. Г., Макаров Н. А., Насибулин А. В.** Влияние изменения структурных параметров пекового кокса при термообработке на процесс взаимодействия с расплавом кремния // Новые огнеупоры. 2016. № 12. С. 20–25.
12. **Нагорный В. Г.** Некоторые типы дефектов структуры и процесс графитации углерода // Конструкционные материалы на основе углерода: сб. науч. тр. 1980. № 5. С. 36–46.
13. **Lachter J., Bragg R. H.** Interstitials in graphite and disordered carbons // Physical Review B. 1986. Vol. 33, no. 12. P. 8903–8905.
14. **Aladekomo J. B., Bragg R. H.** Structural transformations induced in graphite by grinding: Analysis of 002 x-ray diffraction line profiles // Carbon. 1990. Vol. 28, no. 6. P. 897–906.
15. **Shen T. D., Ge W. Q., Wang K. Y., et al.** Structural disorder and phase transformation in graphite produced by ball milling // NanoStructured Materials. 1996. Vol. 7, no. 4. P. 393.
16. **Vazquez-Santos M. B., Geissler E., Laszlo K., et al.** Comparative XRD, Raman, and TEM study on graphitization of PBO-derived carbon fibers // The Journal of Physical Chemistry C. 2012. Vol. 116, no. 1. P. 257.
17. **Тюменцев В. А., Фазлитдинова А. Г.** Взаимосвязь режимов получения и тонкой структуры углерода волокна // Журн. техн. физики. 2016. Т. 86, вып. 3. С. 62–69.
18. **Фазлитдинова А. Г., Тюменцев В. А.** Изменение тонкой структуры природного графита в процессе механического диспергирования // Рос. нанотехнологии. 2024. Т. 19, вып. 2. С. 214–200.
19. **Фазлитдинова А. Г., Тюменцев В. А.** Исследование структурных превращений высокосернистого углеродного материала в процессе графитации методами спектроскопии комбинационного рассеяния и рентгеноструктурного анализа // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технологии. 2024. Т. 67, вып. 10. С. 114–121.
20. **Cancado L. G., Takai K., Enoki T., et al.** General equation for determination of the crystalline size La of nanographite by Raman spectroscopy // Applied Physics Letters. 2006. Vol. 88. P. 163106.
21. **Pimenta M. A., Dresselhaus G., Dresselhaus M. S., Cancado L. G., Jorio A., Saito R.** Studying disorder in graphite-based systems by Raman spectroscopy // Physical Chemistry Chemical Physics. 2007. Vol. 9. P. 1276–1291.

Поступила в редакцию 12.09.2025.
После переработки 07.10.2025.

Сведения об авторах

Фазлитдинова Альфия Габдиловна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: fazlitdinovaag@mail.ru.

Тюменцев Василий Александрович, доктор химических наук, профессор, профессор кафедры физики конденсированного состояния, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: tyum@csu.ru.

Карих Иван Павлович, студент физического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ivan_karix@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 777–787.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-777-787

STRUCTURAL TRANSFORMATIONS OF CARBON MATERIALS BASED ON PITCH COKE DURING HIGH TEMPERATURE TREATMENT

A.G. Fazlitdinova[a], V.A. Tyumentsev[b], I.P. Karikh[c]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]fazlitdinovaag@mail.ru, [b]tyum@csu.ru, [c]ivan_karix@mail.ru

The sequence of structural transformations of a carbon material made on the basis of pitch coke during high-temperature treatment in the temperature range of 1100–2200°C was studied by X-ray diffraction and Raman spectroscopy methods. It was shown that recrystallization of carbon materials is accompanied by the formation of graphite crystals through a number of intermediate metastable states. Increasing the treatment temperature from 1100 to ∼1800°C stimulates only the recrystallization process of the nanostructured carbon material. A temperature range (∼1900°C) was found in which a sharp restructuring of the material structure occurs, manifested in significant changes in the values of the interplanar distance, the sizes of the coherent scattering regions and the phase composition of the carbon material.

Keywords: *pitch coke, graphitization, X-ray diffraction analysis, Raman spectroscopy, fine structure.*

References

1. **Liu F., Wang H., Xue L., Fan L., Zhu Zh.** Effect of microstructure on the mechanical properties of PAN-based carbon fibers during high-temperature graphitization. *Journal of Materials Science*, 2008, vol. 43, no. 10, pp. 4316–4322.
2. **Kurpaska L., Frelek-Kozak M., Wilczopolska M., et al.** Structural and mechanical properties of different types of graphite used in nuclear applications. *Journal of Molecular Structure*, 2020, vol. 1217, p. 128370.
3. **Liu H., Zhu Sh., Chang Y., Hou W., Han G.** Pitch-based carbon materials: a review of their structural design, preparation and applications in energy storage. *New Carbon Materials*, 2023, vol. 38, no. 3, pp. 459–473.
4. **Xu X., Cui L., Shi J., et al.** Effects of co-carbonization of medium and low temperature refined pitch and high temperature refined pitch on the structure and properties of needle coke. *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, 2023, vol. 169, p. 105783.
5. **Stepanenko M.A., Bron Ya.A., Kulakov N.K.** *Proizvodstvo pekovogo koksa* [Production of pitch coke]. Kharkov, Metallurgizdat, 1961. (In Russ.).
6. **Legin-Kolar M., Radenovic A., Ugarkovic D.** Changes in structural parameters of different cokes during heat treatment to 2400°C. *Fuel*, 1999, vol. 78, no. 13, pp. 1599–1605.
7. **Li C., Liu X., Zhou Z., Dai Z., Yang J., Wang F.** Effect of heat treatment on structure and gasification reactivity of petroleum coke. *International Journal of Coal Science & Technology*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 53–61.
8. **Lee S., Hwang Y., Byun T., Ko J., Roh J.** Effect of heating rate, temperature, and residence time during graphitization on the mechanical and electrical properties of isotropic graphite blocks. *Carbon*, 2023, vol. 208, pp. 443–451.

The studies were funded by projects of Scientific Research Support Fund of Chelyabinsk State University (№ 2025/16).

9. **Zhao J., Yang L., Li F., Yu R., Jin C.** Structural evolution in the graphitization process of activated carbon by high-pressure sintering. *Carbon*, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 744–751.
10. **Samoilov V.M., Verbets D.B., Bubnenkov I.A., et al.** Influence of graphitization conditions at 3000°C on structural and mechanical properties of high-modulus polyacrylonitrile-based carbon fibers. *Inorganic Materials: Applied Research*, 2018, vol. 9, no. 5, pp. 890–899.
11. **Bubnenkov I.A., Koshelev Yu.I., Shvetsov A.A., Bardin N.G., Makarov N.A., Nasibulin A.V.** Vliyaniye izmeneniya strukturnykh parametrov pekovogo koksa pri termoobrabotke na protsess vzaimodeystviya s rasplavom kremniya [Effect of changes in the structural parameters of pitch coke during heat treatment on the process of interaction with molten silicon]. *Novye ogneupory* [New refractories], 2016, no. 12, pp. 20–25. (In Russ.).
12. **Nagorny V.G.** Nekotorye tipy defektov struktury i protsess grafitatsii ugleroda [Some types of structural defects and the process of carbon graphitization]. *Konstruktsionnye materialy na osnove ugleroda* [Carbon-based structural materials], 1980, no. 5, pp. 32–46. (In Russ.).
13. **Lachter J., Bragg R.H.** Interstitials in graphite and disordered carbons. *Physical Review B*, 1986, vol. 33, no. 12, pp. 8903–8905.
14. **Aladekomo J.B., Bragg R.H.** Structural transformations induced in graphite by grinding: Analysis of 002 x-ray diffraction line profiles. *Carbon*, 1990, vol. 28, no. 6, pp. 897–906.
15. **Shen T.D., Ge W.Q., Wang K.Y., et al.** Structural disorder and phase transformation in graphite produced by ball milling. *NanoStructured Materials*, 1996, vol. 7, no. 4, p. 393.
16. **Vazquez-Santos M.B., Geissler E., Laszlo K., et al.** Comparative XRD, Raman, and TEM study on graphitization of PBO-Derived carbon fibers. *The Journal of Physical Chemistry C*, 2012, vol. 116, no. 1, p. 257.
17. **Tyumentsev V.A., Fazlitdinova A.G.** Relation between the synthesis conditions and the fine structure of fiber carbon. *Technical Physics*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 380–387.
18. **Fazlitdinova A.G., Tyumentsev V.A.** Changes in the fine structure of natural graphite in the process of mechanical dispersion. *Nanobiotechnology Reports*, 2024, vol. 19, no. 1, pp. 89–95.
19. **Fazlitdinova A.G., Tyumentsev V.A.** Study of structural transformation of high-sulfur carbon materials during graphitization by Raman spectroscopy and X-ray diffraction analysis. *ChemChemTech*, 2024, vol. 67, no. 10, pp. 114–121.
20. **Cancado L.G., Takai K., Enoki T. et al.** General equation for determination of the crystalline size La of nanographite by Raman spectroscopy. *Applied Physics Letters*, 2006, vol. 88, p. 163106.
21. **Pimenta M.A., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S., Cancado L.G., Jorio A., Saito R.** Studying disorder in graphite-based systems by Raman spectroscopy. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2007, vol. 9, pp. 1276–1291.

Article received 12.09.2025.
Corrections received 07.10.2025.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 788–800.

УДК 530.182.1 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-788-800

ДИНАМИКА КИНКОВ УРАВНЕНИЯ φ^4 В МОДЕЛИ С ДВУМЯ ТОЧЕЧНЫМИ ПРИМЕСЯМИ

М. И. Фахретдинов[a], Е. Г. Екомасов[b]

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
[a] fmi106tf@gmail.com, [b] ekomasoveg@gmail.com

С помощью численных методов рассмотрена задача нелинейной динамики кинков для уравнения φ^4 в модели с двумя точечными примесями. Уравнение φ^4 применяется во многих областях физики, от космологии и физики элементарных частиц до биофизики и теории конденсированного состояния. Топологические дефекты, или кинки, в этой теории описывают устойчивые, корпускулярные возбуждения. На практике эти возбуждения по мере их распространения обязательно взаимодействуют с примесями или несовершенствами фонового потенциала. Для численного счёта нами был применён метод линий. Точечная примесь описывается с помощью дельта-функции. Анализируется случай притягивающей примеси. Кинк запускался в направлении примесей с разными начальными скоростями. В работе определены и описаны все возможные сценарии динамики кинка с учётом резонансных эффектов. Установлено, что среди найденных сценариев динамики кинка есть сценарии резонансной динамики кинка, полученные для случая одной точечной примеси, например, квазитуннелирование и отталкивание от притягивающего потенциала. Показано, что динамика кинка с двумя примесями содержит и новые сценарии его динамики по сравнению со случаем одной примеси. Найдены критические и резонансные скорости движения кинка в зависимости от параметров примеси и расстояния между ними. Построена диаграмма возможных сценариев динамики кинка в зависимости от его начальной скорости и расстояния между примесями.

Ключевые слова: *уравнение φ^4, кинк, солитон.*

Введение

Уравнение φ^4, относящееся к классу уравнений Клейна — Гордона, широко используется во многих областях физики, от космологии и физики элементарных частиц до биофизики и теории конденсированного состояния [1; 2]. Новый импульс к изучению этого уравнения в последние годы придало использование его для описания физических процессов в графене [3; 4]. Кинк уравнения φ^4 отличается от кинка другого типа уравнения Клейна — Гордона — уравнения синус-Гордона (УСГ) [5] наличием внутренней моды колебаний [1]. Эта колебательная степень свободы может накапливать энергию и периодически отдавать её, что приводит к возникновению резонансов во взаимодействиях кинк-антикинк [2; 6; 7] и кинк-примесь [1; 8; 9], а также стимулировать образование пары кинк-антикинк [10]. Кинк модели φ^4 с возбуждёнными внутренними модами колебаний получили название воблинг-кинк [1; 11]. В уравнении φ^4 [6; 12; 13] кинки и антикинки не могут просто проходить друг через друга. Численно было установлено, что при больших скоростях кинк и

Работа выполнена в рамках государственного задания, соглашение #075-03-2024-123/1 от 15.02.2024, тема #324-21.

антикинк неупруго отражаются друг от друга, теряя энергию. При более низких скоростях кинк и антикинк связывались в долгоживущее колебательное состояние, напоминающее бризер синус-Гордона, но медленно затухающее.

Для применения модели φ^4 в практических приложениях часто нужно модифицировать уравнение, внося в него дополнительные слагаемые, или считать коэффициенты функциями от координат и времени [1; 2; 14–17]. Например, часто рассматривают наличие примесей, т. е. пространственной неоднородности потенциала. Для УСГ эта задача разработана достаточно хорошо. Рассмотрена динамика кинка и генерация локализованных волн для моделей с точечными и протяжёнными примесями, одной и многими примесями, изучено влияние функции, описывающей неоднородность параметра [5; 18–21]. Для модели φ^4 с примесями пока сделано намного меньше. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную примесную моду [1]. В [22] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяжёнными примесями, имеющих пространственные профили Гаусса или Лоренца. В [23] исследованы кинк-антикинковые столкновения в присутствии протяжённой примеси гауссовского вида. В [24] рассмотрены решения уравнения φ^4 в модели с одиночной примесью, описываемой функцией гиперболического вида, в [25; 26] — описываемой функцией прямоугольного вида. Динамика кинка для случая малых возмущений модели φ^4 рассмотрена с помощью деформированного потенциала в [27].

Для УСГ в модели с двумя и тремя примесями получено много интересных результатов [28–30], описывающих динамику кинков, возбуждение локализованных на примесях волн бризерного и солитонного типа, их структуру и эволюцию. Для уравнения φ^4 в модели с двумя примесями рассмотрена пока только динамика кинка [31].

В данной работе рассмотрена динамика кинка для модели φ^4 с двумя точечными примесями.

1. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим уравнение φ^4 в модели с пространственной неоднородностью потенциала, описываемой некоторой функцией $K(x)$:

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0. \tag{1}$$

Пространственную неоднородность $K(x)$ потенциала уравнения (1) возьмём в самом простом виде, в виде двух примесей точечного вида:

$$K(x) = 1 - \varepsilon\,\delta\,(x) - \varepsilon\,\delta\,(x - d)\,,$$

где ε — константа, $\delta(x)$ — дельта-функция, d — расстояние между двумя примесями. Уравнение (1) было решено численно методом прямых [32] на интервале по координате $x \in [-L, L]$, $L = 60$, шаг по координате $\Delta x = 0.01$. Граничные условия $u_x|_{x=-L} = u_x|_{x=L} = 0$. В начальный момент времени на некотором расстоянии x_0 от первой примеси находился кинк, являющийся решением уравнения (1) при $K(x) = 1$,

$$u(x,t) = \operatorname{th}\frac{x - x_0 - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}},$$

где $x_0 = 10$ — начальное положение кинка, $0 < v_0 < 1$ — начальная скорость кинка. Рассмотрим динамику кинка, движущегося с постоянной скоростью v_0, спустя некоторое время после его взаимодействия с точечными примесями. Шаг по

времени выбирался автоматически программой для решения получившейся в ходе применения метода прямых системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Дельта-функция численно аппроксимировалась функцией вида

$$\delta(x) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\gamma^2 x^2\right),$$

где $\gamma = 80$.

2. Результаты вычислений и обсуждение

Рассмотрим случай одинаковых притягивающих примесей с $\varepsilon = 0.5$. Для исследования динамики кинка будем в каждый момент времени находить $X_c(t)$ — координату центра кинка, которая определяется как точка x_c, при которой $u(x_c, t) = 0$ (кинк изменяется от –1 до 1 с центром в 0). Вначале рассмотрим, как она зависит от начальной скорости кинка v_0 и расстояния между примесями d. При малых d ($d < 2$) численный счёт показывает, что существуют три типа траекторий кинка (рис. 1). Линия 1 на рис. 1 описывает сценарий динамики кинка, который колеблется в области между примесями. С увеличением начальной скорости кинка, когда она превышает некоторое значение v_{cr}, кинк проходит области расположения обеих примесей (линия 2 на рис. 1). При некоторых отдельных значениях v_0 наблюдается отражение кинка от примесей (линия 3 на рис. 1). При увеличении d ($d \approx 2$) возникают сценарии динамики, при которых кинк начинает колебаться то в области первой, то в области второй примеси (рис. 2).

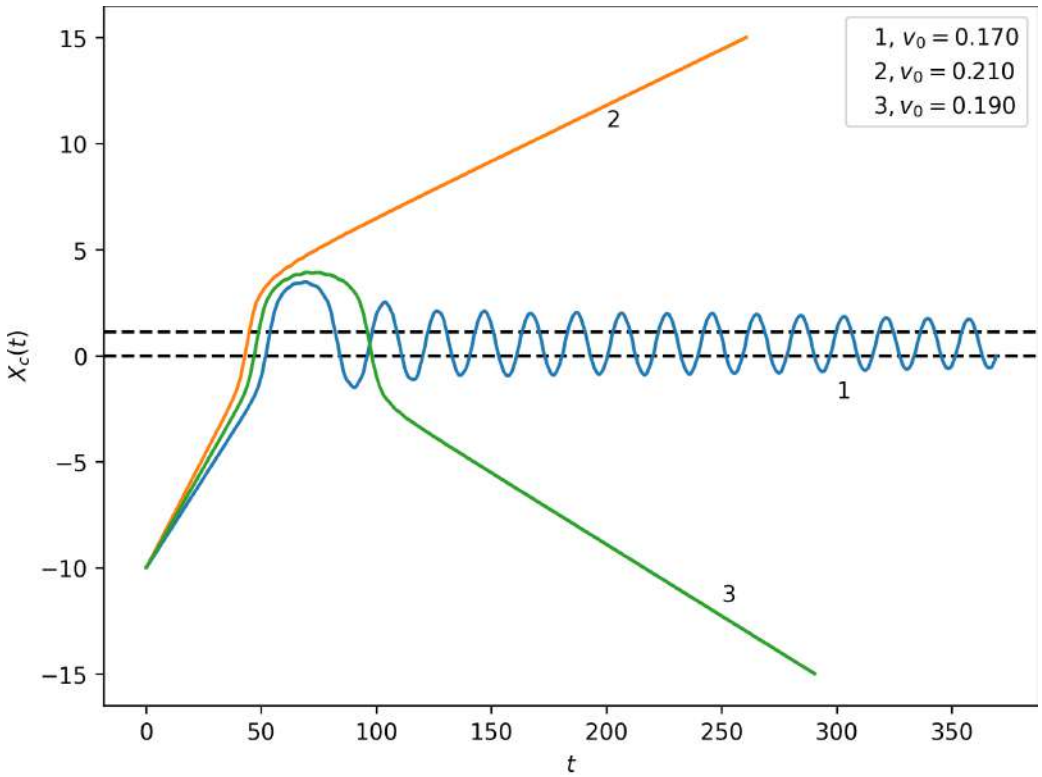


Рис. 1. Зависимость координаты центра кинка $X_c(t)$ для разных значений скоростей при $d = 1.120$

При дальнейшем увеличении d ($d > 2.3$) наблюдаются новые сценарии динамики кинка (рис. 3). Например, кинк может останавливаться на первой примеси (линия 2 на рис. 3), на второй примеси (линия 1 на рис. 3) или проходить обе примеси (линия 3 на рис. 3), если начальная скорость больше v_{cr}. Остановку или захват на

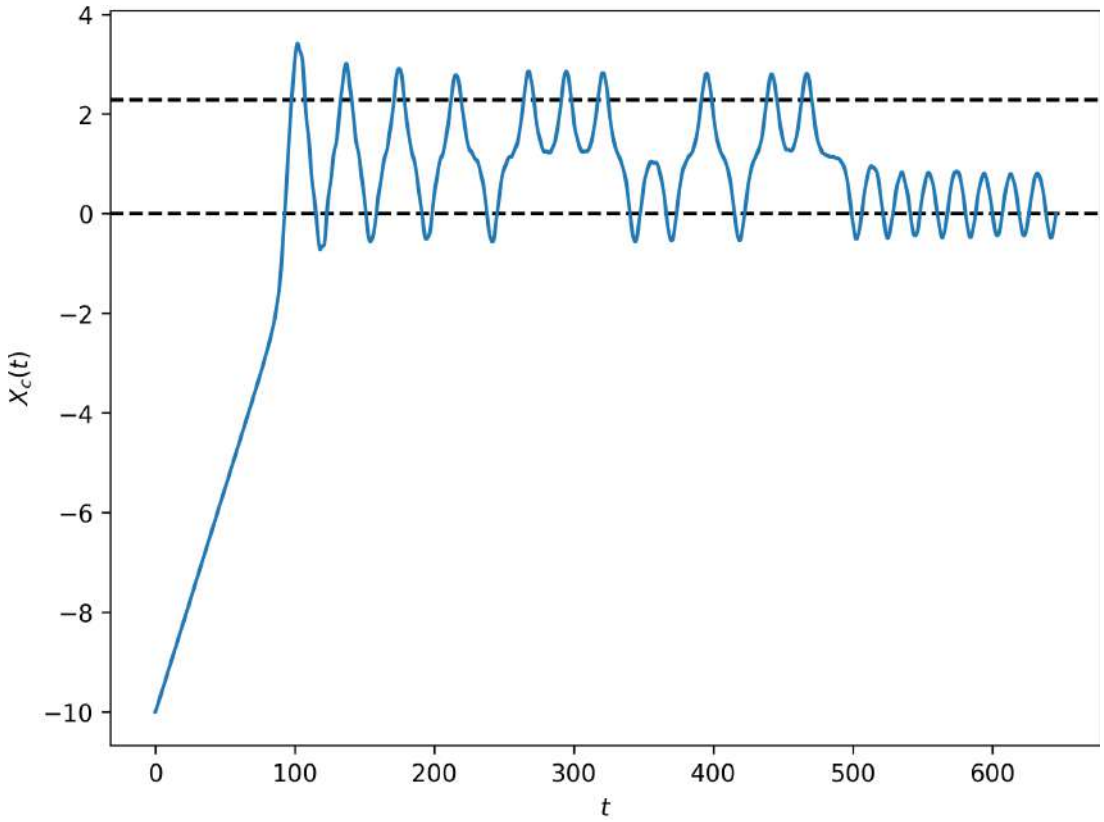


Рис. 2. Зависимость координаты центра кинка $X_c(t)$ при $v_0 = 0.9$, $d = 2.280$

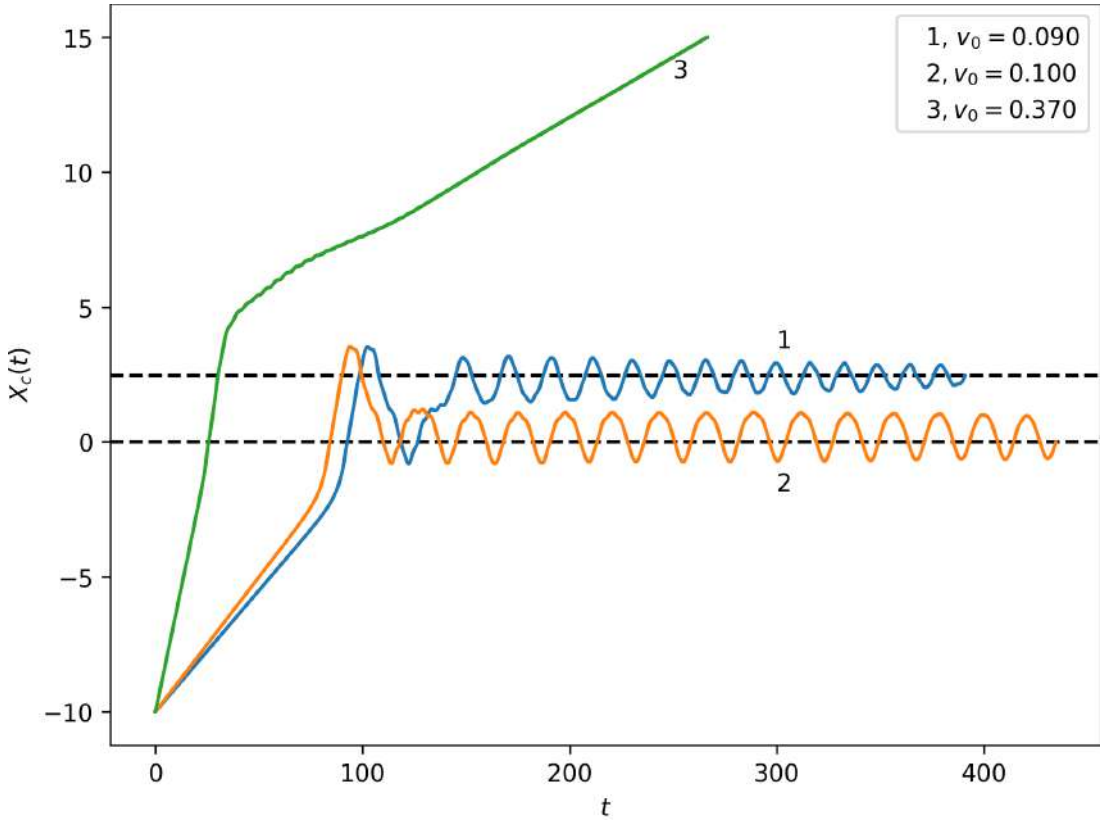


Рис. 3. Зависимость координаты центра кинка $X_c(t)$ для разных значений скоростей при $d = 2.480$

примесях часто называют пиннингом. Отражение от примесей имеет такой же вид, как и для малых d, и возникает в узком диапазоне начальных скоростей вблизи v_{cr}. При больших значениях расстояния между примесями d возможно отражение от первой примеси (рис. 4).

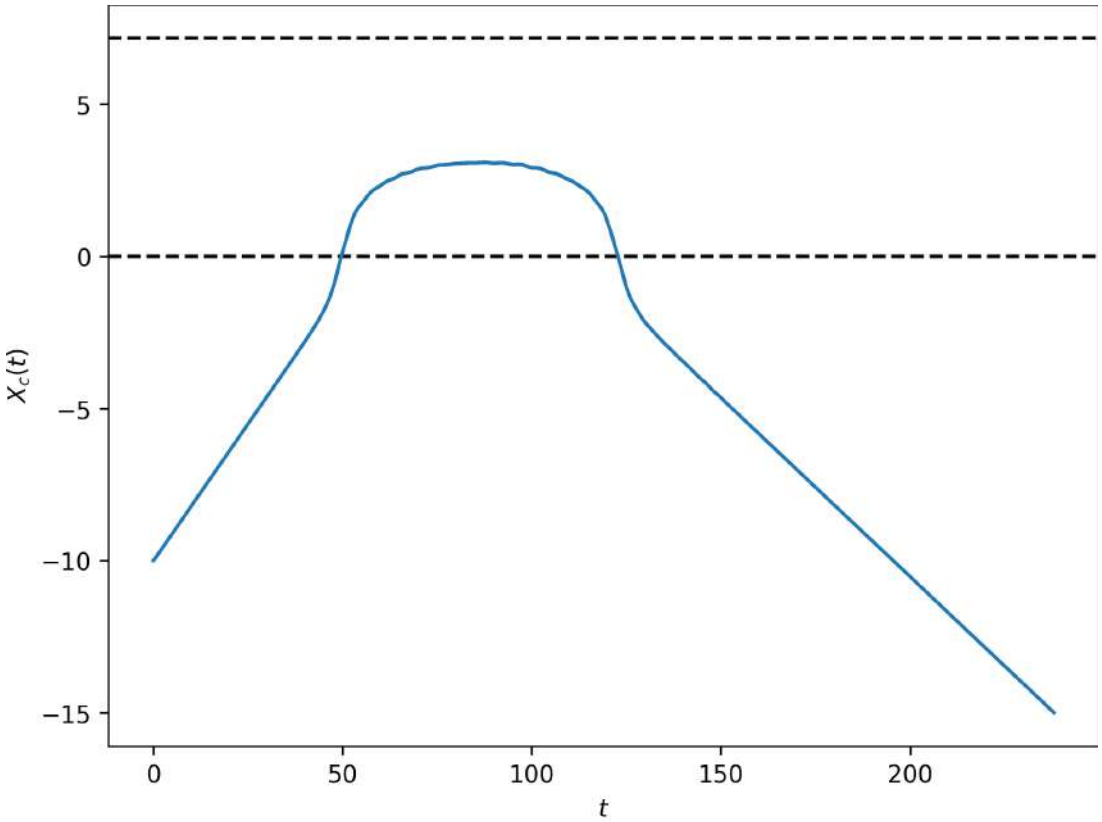


Рис. 4. Зависимость координаты центра кинка $X_c(t)$ при $v_0 = 0.18$, $d = 7.16$

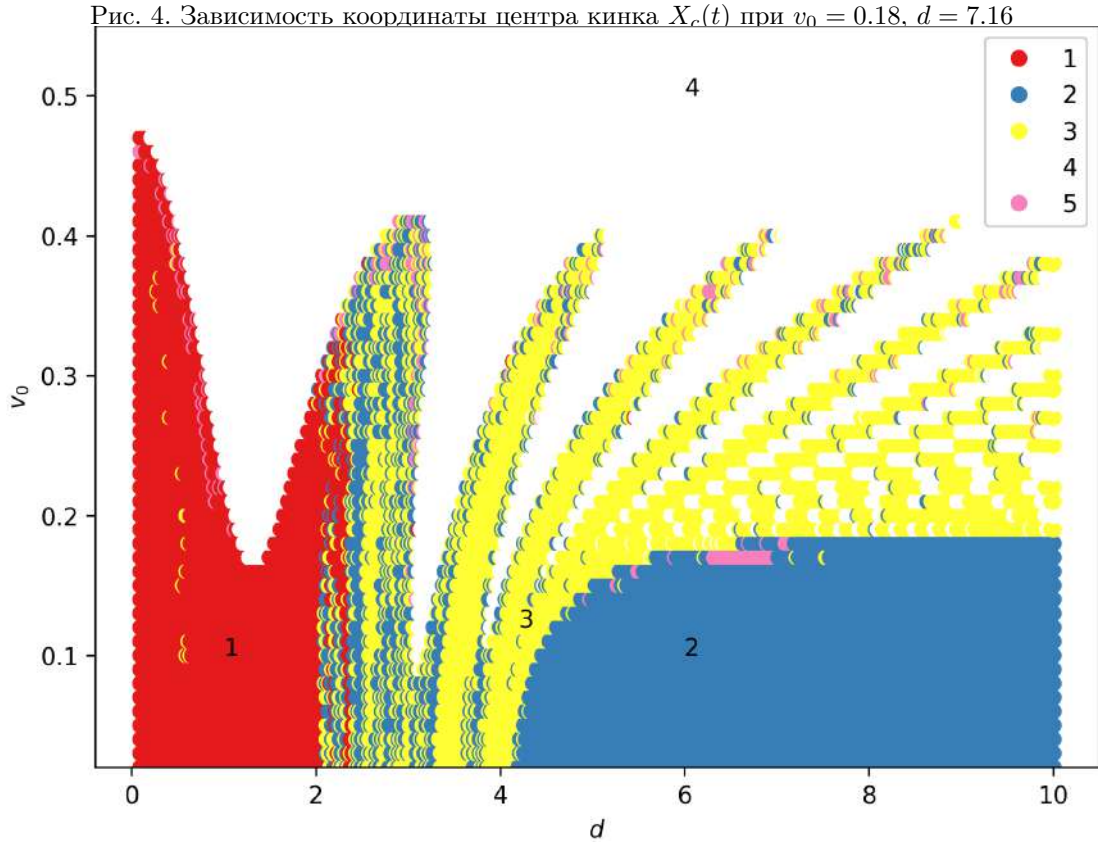


Рис. 5. Диаграмма возможных сценариев динамики кинка при $\varepsilon = 0.5$

Далее рассмотрим зависимость режимов динамики кинка уже от двух параметров: расстояния между примесями d и начальной скорости v_0. Для этого построим диаграмму с шагом по d, равным 0.02, и начальной скорости 0.01. На ней различные виды сценариев динамики кинка покажем разным цветом и обозначим разными цифрами. На рис. 5: под цифрой 1 находится область значений параметров v_0 и d, описывающая сценарий, при котором наблюдаются колебания кинка между первой

и второй примесью; 2 — остановка кинка на первой примеси; 3 — остановка кинка на второй примеси; 4 — прохождение обеих примесей; 5 — отражение от примесей.

Из рис. 5 видно, что при $d > 4$ при небольших скоростях $v_0 < 0.2$ кинк всегда останавливается на первой примеси. Отражение от примесей возникает на границах лепестков диаграммы (см. рис. 5). Эти границы можно достаточно точно посчитать, численно находя v_{cr} для каждого значения d. Так как видно, например, для $d > 4$ из рис. 5, что области полного прохождения примесей чередуются с областями пиннинга, то для этих значений d есть несколько значений критической скорости v_{cr}. Поэтому функция $v_{cr}(d)$ немонотонна и численный алгоритм может найти только часть ветвей $v_{cr}(d)$ (см. рис. 6), но там, где разрывы, их можно продолжить как лепестки на рис. 5.

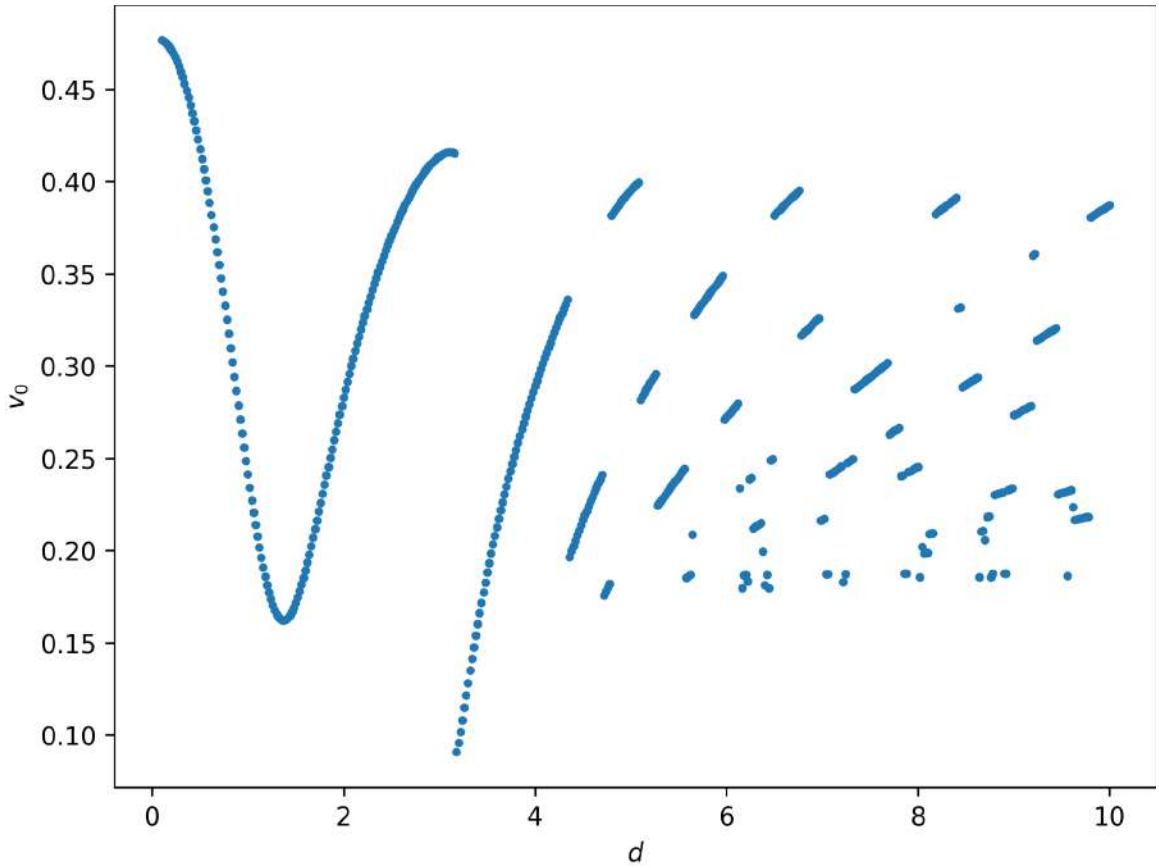


Рис. 6. Значения v_{cr}, вблизи которых возникает отражение кинка от примеси при $\varepsilon = 0.5$

Кинк после прохождения примесей или отражения от них движется практически по прямой линии, поэтому можно ввести в рассмотрение конечную скорость v_f кинка, аппроксимировав координату центра кинка $X_c(t)$ как $X_c(t) = v_f t + x_0$. Если кинк останавливается на первой или второй примеси, то v_f примем равной 0. Можно построить диаграмму конечных скоростей кинка (рис. 7) аналогично рис. 5. Более тёмные области соответствуют большим конечным скоростям. Синие крапинки — попадание параметров (d, v_0) в область резонансного отражения с $v_f < 0$. Столкновение кинка с примесями — неупругое, поэтому конечная скорость меньше начальной. На рис. 8 представлены срезы этой диаграммы, показывающие зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 для $d = 5$, $d = 8$. Отметим, что наличие скоростей, меньших критической, при которых кинк проходит обе примеси, связано со взаимодействием кинка с локализованными волнами, возбуждаемыми на примесях. Характер зависимости конечной скорости от начальной для двух примесей отличается от такой же зависимости для одной примеси [26],

где всегда только одно значение критической скорости, при которой кинк проходит через неоднородности.

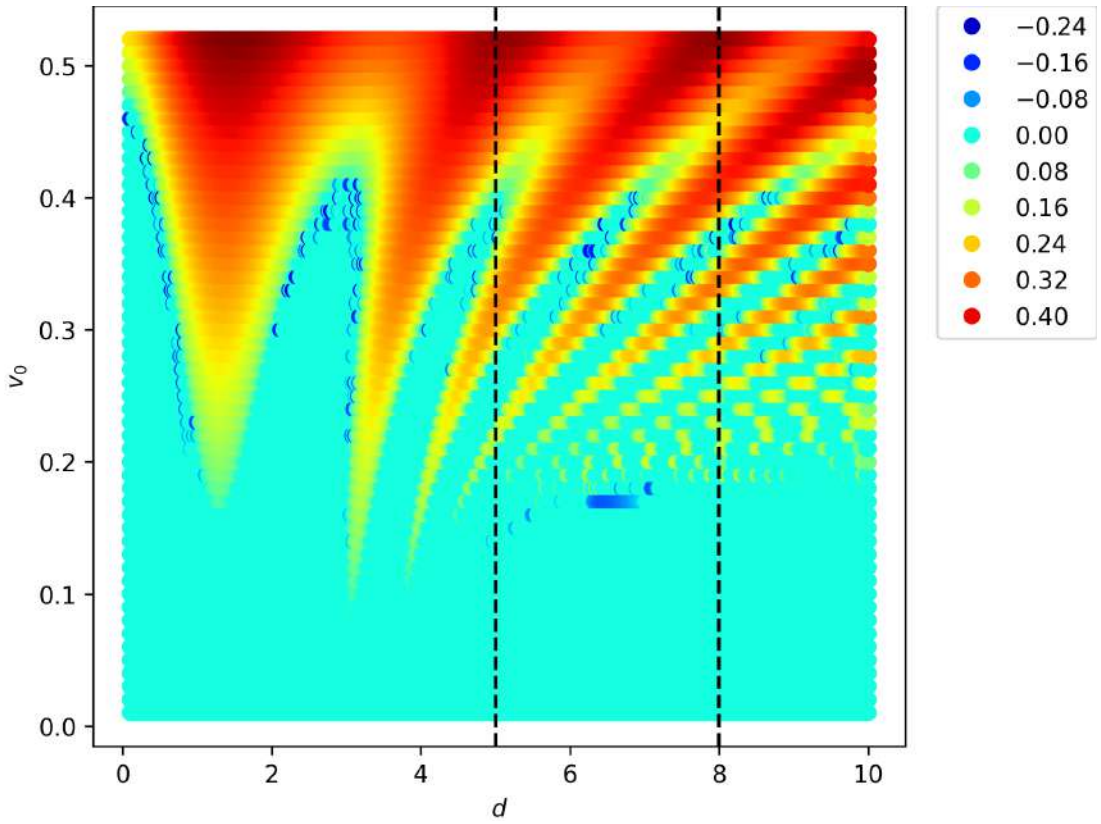


Рис. 7. Диаграмма конечных скоростей кинка $v_f(d, v_0)$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$

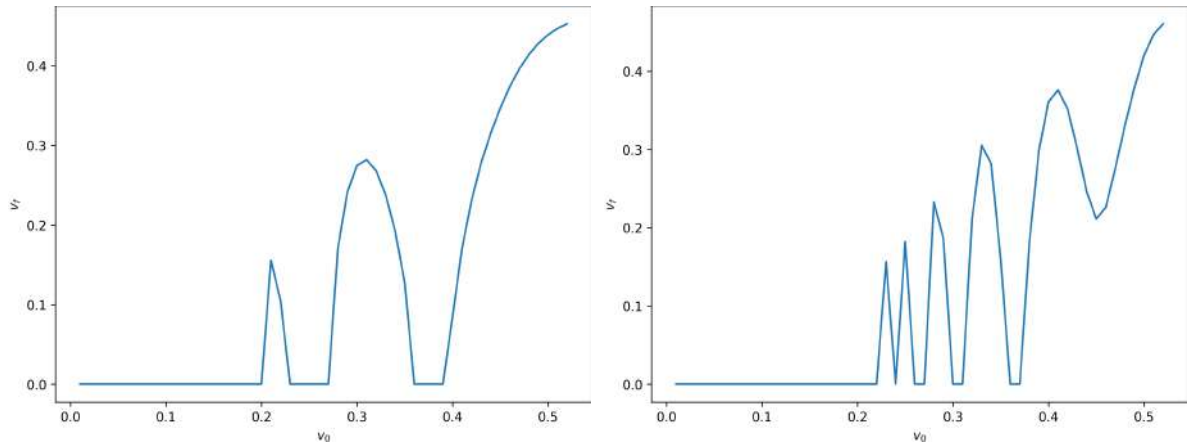
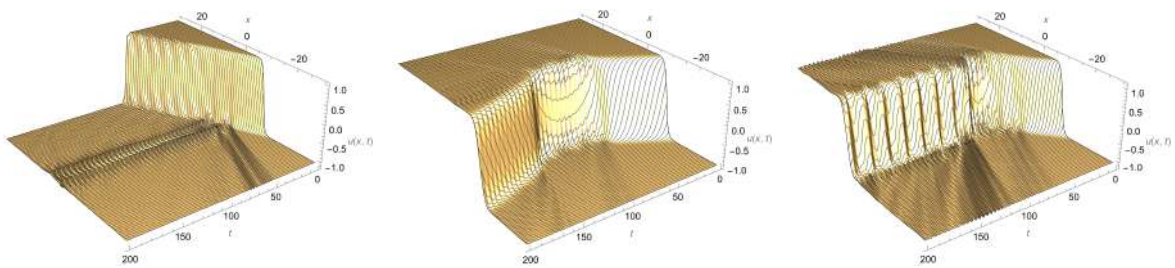


Рис. 8. Срез диаграммы рис. 7 для $d = 5$, $d = 8$



a) b) c)

Рис. 9. Взаимодействие кинка с примесью при a) $d = 5.0$, $v_0 = 0.65$, b) $d = 7.16$, $v_0 = 0.18$, c) $d = 5.0$, $v_0 = 0.37$

Отметим, что процессы взаимодействия кинка с примесями сопровождаются

излучением волн (см. рис. 9), как после прохождения (рис. 9a), отражения (рис. 4, рис. 9b) и пиннинга (рис. 9c). Так как одна из частот излучаемых волн равна $\sqrt{2}$, такие кинки можем называть воблинг-кинками.

Заключение

Определены и описаны все возможные сценарии динамики кинка в (1+1)-мерной модели φ^4 с двумя точечными примесями с учётом резонансных эффектов. Показано, что динамика кинка с двумя примесями содержит новые сценарии его динамики по сравнению со случаем одной примеси. Примеси, которые являются потенциальными ямами для кинка, в зависимости от начальной скорости, как и в случае УСГ, могут его захватывать, резонансно отражать или пропускать его при скоростях, меньших критической, либо проходить через примеси при скоростях, больших критической. Его взаимодействие с примесями носит в этом случае неупругий характер, связанный с затратами его энергии на возбуждение локализованных на примесях волн. Резонансное отражение и прохождение связаны с возможностью резонансного взаимодействия кинка с локализованными волнами, возбуждаемыми в области примесей. Найдены зависимости критических и резонансных скоростей кинка от параметров примесей. Построена диаграмма возможных сценариев динамики кинка в зависимости от начальной скорости и расстояния между примесями.

Список литературы

1. **Белова Т. И., Кудрявцев А. Е.** Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406.
2. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Eds. P. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver. Cham : Springer, 2019.
3. **Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V.** Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model // Physical Review B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306.
4. **Yamaletdinov R. D., Romanczukiewicz T., Pershin Y. V.** Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257.
5. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Eds. J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, F. Williams F. Cham : Springer, 2014.
6. **Takyi I., Weigel H.** Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited // Physical Review D. 2016. Vol. 94. P. 085008.
7. **Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E.** High energy density in the collision of n kinks in the φ^4 model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 49. P. 30–38.
8. **Fei Zh., Kivshar Yu. S., Vazquez L.** Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model // Physical Review A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220.
9. **Malomed B. A.** Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities // Journal of Physics A. 1992. Vol. 25, no. 4. P. 755–764.
10. **Romanczukiewicz T.** Creation of kink and antikink pairs forced by radiation // Journal of Physics A. 2006. Vol. 39, no. 13. P. 3479–3494.
11. **Alonso Izquierdo A., Queiroga-Nunes J., Nieto L. M.** Scattering between wobbling kinks // Physical Review D. 2021. Vol. 103, no. 4. P. 045003.
12. **Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A.** Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model // Physical Review D. 2014. Vol. 89, no. 12. P. 125009.

13. **Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I.** Kink-antikink collision in a Lorentz-violating φ^4 model // Physics Letters B. 2020. Vol. 807. P. 135542.
14. **Kalbermann G.** Soliton tunneling // Physical Review E. 1997. Vol. 55, no. 6. P. R6360.
15. **Saadatmand D., Javidan K.** Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // Brazilian Journal of Physics. 2013. Vol. 43, no. 1. P. 48–56.
16. **Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G., Fatykhov M. A., Javidan K.** Effect of the φ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, № 7. С. 550–555.
17. **Ghahraman A.** Dynamics of φ^4 kinks by using Adomian decomposition method // American Journal of Numerical Analysis. 2016. Vol. 4, no. 1. P. 8–10.
18. **Gonzalez J. A., Bellorin A., Garcia-Nustes M. A., Guerrero L. E., Jimenez S., Vazquez L.** Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // Physics Letters A. 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998.
19. **Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.** Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 312. P. 198—208.
20. **Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.** Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // Brazilian Journal of Physics. 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584.
21. **Екомасов Е. Г., Назаров В. Н., Самсонов К. Ю., Муртазин Р. Р.** Возможность управления динамикой и структурой магнитного солитона в трёхслойной ферромагнитной структуре // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47, № 10. С. 15–18.
22. **Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J.** Kinks and realistic impurity models in φ^4-theory // International Journal of Modern Physics B. 2022. Vol. 36, no. 5. P. 2250042.
23. **Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J.** Emergence of oscillons in kink-impurity interactions // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2021. Vol. 54. P. 315701.
24. **Romanczukiewicz T., Shnir Y.** Oscillons in the presence of external potential // Journal of High Energy Physics. 2018. Vol. 2018, no. 1. P. 101.
25. **Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.** Kink dynamics in the φ^4 model with extended impurity // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320.
26. **Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Yu., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.** Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the φ^4 model // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26.
27. **Dorey P., Romanczukiewicz T.** Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes // Physics Letters B. 2018. Vol. 779. P. 117–123.
28. **Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.** Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями // Изв. вузов. Приклад. нелинейн. динамика. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765.
29. **Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К.** Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // Изв. вузов. Приклад. нелинейн. динамика. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709.
30. **Самсонов К. Ю., Кабанов Д. К., Назаров В. Н., Екомасов Е. Г.** Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяжёнными примесями // Компьютер. исследования и моделирование. 2024. Т. 16, № 4. С. 855–868.

31. **Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г.** Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяжёнными примесями // Изв. вузов. Приклад. нелинейн. динамика. 2025. Т. 33, вып. 3. С. 412–425.
32. **Schiesser W. E.** The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. San Diego : Academic Press, 2012.

Поступила в редакцию 11.03.2025.
После переработки 11.09.2025.

Сведения об авторах

Фахретдинов Марат Ирекович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия; e-mail: fmi106tf@gmail.com.

Екомасов Евгений Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия; e-mail: ekomasoveg@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 788–800.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-788-800

DYNAMICS OF KINKS OF THE φ^4 EQUATION IN A MODEL WITH TWO POINTS IMPURITIES

M.I. Fakhretdinov[a], E.G. Ekomasov[b]

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
[a] fmi106tf@gmail.com, [b] ekomasoveg@gmail.com

The problem of nonlinear dynamics of kinks for the φ^4 equation in a model with two point impurities is considered using numerical methods. The φ^4 equation is used in many areas of physics, from cosmology and particle physics to biophysics and condensed matter theory. Topological defects, or kinks, in this theory describe stable, corpuscular excitations. In practice, these excitations necessarily interact with impurities or imperfections of the background potential as they propagate. For numerical calculations, we used the line method. A point impurity is described using the delta function . The case of an attractive impurity is analyzed. The kink was launched in the direction of the impurities with different initial velocities. In the paper, all possible scenarios of the kink dynamics are determined and described, taking into account resonance effects. It is established that among the found scenarios of kink dynamics there are scenarios of resonance dynamics of the kink obtained for the case of one point impurity, for example, quasi-tunneling and repulsion from the attractive potential. It is shown that the dynamics of the kink with two impurities also contains new scenarios of its dynamics compared to the case of one impurity. Critical and resonance velocities of the kink motion are found depending on the parameters of the impurity and the distance between them. A diagram of possible scenarios of the kink dynamics is constructed depending on its initial velocity and the distance between the impurities.

Keywords: *φ^4 equation, kink, soliton.*

References

1. **Belova T.I., Kudryavtsev A.E.** Solitons and their interactions in classical field theory. *Physics-Uspekhi*, 1997, vol. 40, no. 4, pp. 359–386.
2. *A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future*. Eds. P. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver. Cham, Springer, 2019.
3. **Yamaletdinov R.D., Slipko V.A., Pershin Y.V.** Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model. *Physical Review B*, 2017, vol. 96, no. 9, p. 094306.
4. **Yamaletdinov R.D., Romanczukiewicz T., Pershin Y.V.** Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects. *Carbon*, 2019, vol. 141, pp. 253–257.
5. *The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics*. Eds. J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, F. Williams. Cham, Springer, 2014.
6. **Takyi I., Weigel H.** Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Physical Review D*, 2016, vol. 94, p. 085008.
7. **Marjaneh A.M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S.V., Zomorrodian M.E.** High energy density in the collision of n kinks in the φ^4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, vol. 49, pp. 30–38.

The work was performed within the framework of the state assignment, agreement# 075-03-2024-123/1 of 15.02.2024, subject #324-21.

8. **Fei Zh., Kivshar Yu.S., Vazquez L.** Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Physical Review A*, 1992, vol. 46, no. 8, pp. 5214–5220.
9. **Malomed B.A.** Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities. *Journal of Physics A*, 1992, vol. 25, no. 4, pp. 755–764.
10. **Romanczukiewicz T.** Creation of kink and antikink pairs forced by radiation. *Journal of Physics A*, 2006, vol. 39, no. 13, pp. 3479–3494.
11. **Alonso Izquierdo A., Queiroga-Nunes J., Nieto L.M.** Scattering between wobbling kinks. *Physical Review D*, 2021, vol. 103, no. 4, p. 045003.
12. **Gani V.A., Kudryavtsev A.E., Lizunova M.A.** Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model. *Physical Review D*, 2014, vol. 89, no. 12, p. 125009.
13. **Yan H., Zhong Y., Liu Y.X., Maeda K.I.** Kink-antikink collision in a Lorentz-violating φ^4 model. *Physics Letters B*, 2020, vol. 807, p. 135542.
14. **Kalbermann G.** Soliton tunneling. *Physical Review E*, 1997, vol. 55, no. 6, p. R6360.
15. **Saadatmand D., Javidan K.** Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory. *Brazilian Journal of Physics*, 2013, vol. 43, no. 1, pp. 48–56.
16. **Saadatmand D. et al.** Effect of the φ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect. *JETP Letters*, 2015, vol. 101, no. 7, pp. 497–502.
17. **Ghahraman A.** Dynamics of φ^4 kinks by using Adomian decomposition method. *American Journal of Numerical Analysis*, 2016, vol. 4, no. 1, pp. 8–10.
18. **Gonzalez J.A., Bellorin A., Garcia-Nustes M.A., Guerrero L.E., Jimenez S., Vazquez L.** Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, no. 24, pp. 1995–1998.
19. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.** Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 312, pp. 198–208.
20. **Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., Dmitriev S.V., Nazarov V.N.** Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Brazilian Journal of Physics*, 2018, vol. 48, no. 6, pp. 576–584.
21. **Ekomasov E.G., Nazarov V.N., Samsonov K.Yu., Murtazin R.R.** The possibility of controlling the dynamics and structure of a magnetic soliton in a three-layer ferromagnetic structure. *Technical Physics Letters*, 2021, vol. 47, pp. 499–502.
22. **Lizunova M.A., Kager J., de Lange S., van Wezel J.** Kinks and realistic impurity models in φ^4-theory. *International Journal of Modern Physics B*, 2022, vol. 36, no. 5, p. 2250042.
23. **Lizunova M., Kager J., de Lange S., van Wezel J.** Emergence of oscillons in kink-impurity interactions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2021, vol. 54, p. 315701.
24. **Romanczukiewicz T., Shnir Y.** Oscillons in the presence of external potential. *Journal of High Energy Physics*, 2018, vol. 2018, no. 1, p. 101.
25. **Fakhretdinov M.I., Samsonov K.Y., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G.** Kink dynamics in the φ^4 model with extended impurity. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 19, iss. 3, pp. 303–320.
26. **Fakhretdinov M.I., Samsonov K.Yu., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G.** Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the φ^4 model. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 20, no. 1, pp. 15–26.
27. **Dorey P., Romanczukiewicz T.** Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes. *Physics Letters B*, 2018, vol. 779, pp. 117–123.
28. **Ekomasov E.G., Samsonov K.Y., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.** Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 6. pp. 749–765.

29. **Ekomasov E.G., Kudryavtsev R.V., Samsonov K.Y., Nazarov V.N., Kabanov D.K.** Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 693–709.
30. **Samsonov K.Yu., Kabanov D.K., Nazarov V.N., Ekomasov E.G.** Localized nonlinear waves of the sine-Gordon equation in a model with three extended impurities. *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 855–868.
31. **Fakhretdinov M.I., Ekomasov E.G.** Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2025, vol. 33, iss. 3, pp. 412–422.
32. **Schiesser W.E.** *The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations*. San Diego, Academic Press, 2012.

Article received 11.03.2025.
Corrections received 11.09.2025.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 801–812.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-801-812

MOLECULAR DYNAMICS SIMULATIONS OF TAYLOR IMPACT TESTS WITH CLASSICAL AND PROFILED COPPER CYLINDERS

A.E. Mayer[a], E.S. Rodionov[b], V.V. Pogorelko[c], P.N. Mayer[d]

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
[a]mayer@csu.ru, [b]rodionoves.pgd@gmail.com, [c]vik_ko83@mail.ru, [d]polina.nik@mail.ru

Taylor tests suggesting a high-velocity impact of specimens on a rigid anvil are widely used to study dynamic response of various metallic materials. In order to extend our previous experimental investigations and to reveal the features of Taylor tests at nanoscale, here we perform molecular dynamics simulations for single crystalline and polycrystalline copper considering both classical cylindrical samples and profiled ones with the reduced head part. The sample shapes are similar to that used in experiments, but the total length is 80 or 200 nm in contrast to 40-mm-length samples in the experiments. In spite of five orders of magnitude difference in length, the MD-calculated curves of the normalized length after impact versus the impact velocity are similar to that experimentally measured for millimeter samples, but, as expected, reveal much higher strength of nanoscale samples. Both single crystalline and polycrystalline samples are subjected to loss of the initial cylindrical symmetry in the course of impact. In the case of single crystal, this is due to activation of certain slip systems. In the case of polycrystals, this is connected with the anisotropy of individual grains and is clearly evident when the profiled part of the sample contains only a few grains in the thickness direction. This loss of the symmetry correlates with the distortion of the shape of the profiled samples in our experiments with annealed coarse-grained copper, in which the largest grains reach millimeter sizes. Thus, the symmetry distortion observed in the experiment has a fundamental reason of the deformation localization.

Keywords: *Taylor impact test, nanoscale sample, molecular dynamics, dynamic plastic deformation, copper, single crystal, polycrystal, loss of symmetry, plastic flow localization.*

Introduction

Taylor tests suggesting a high-velocity impact of specimens on a rigid anvil are widely used to study dynamic response of various metallic materials, including ordinary metals [1–3] and alloys [4–6], as well as additively manufactured alloys [7–9] and high-entropy alloys [10–12]. This is a standard experimental technique to extract dynamic yield strength at strain rates of the order of 10^4–$10^5\,s^{-1}$ [13] and to optimize material model parameters [14; 15] including the application of machine learning methods [16–18]. Typical sizes of the impacted samples in these studies are several millimeters in diameter and tens of millimeters in length characterizing the macroscopic plasticity and fracture response. Classical uniform cylinders are commonly used as the investigated samples in the Taylor impact tests, while profiling of the head part of the impacted samples allows

This research was funded by the Russian Science Foundation, Project No. 20-11-20153-P, https://rscf.ru/en/project/23-11-45024/.

one to concentrate the kinetic energy and to increase the strain rates and strain values [5; 13; 18].

Recently, microscale dynamic testing gain substantial attention [19], including the laser-induced particle impact test [20–22], which applies spherical particles with diameters of about tens of micrometers accelerated by nanosecond laser pulses through ablation and expansion of a nanometers-thick gold film and a micrometers-thick polyurethane film deposited on a glass substrate. The particle velocity varies from tens of meters per second up to several kilometers per second providing severe plastic deformation of a softer material at a strain rate up to $10^8\,\mathrm{s}^{-1}$ [23]. This technique can be used to study both the dynamic property of particle material if the target material is harder and the dynamic property of target material in the opposite case [20]. When considering the microscale samples and even more so the nanoscale samples, an important issue is the transferability of macroscopic properties. In this sense, study on the impact behavior of nanoscale samples in Taylor anvil tests with the help of molecular dynamics (MD) simulations is a relevant topic, although it has not been addressed in the existing literature to the best of our knowledge.

Taylor impact tests with single crystal tantalum samples [1] reveal strong anisotropy with respect to the impact direction and loss of the initial symmetry due to the strain localization. These features are the challenges for macroscopic plasticity theories and attracts substantial modeling efforts [24; 25] in the frames of crystal plasticity combined with the finite element calculations. Polycrystalline materials are assumed to have an averaged properties and not so prone to anisotropic behavior, but it can be the case for coarse grained annealed materials with the grain size comparable with the sample dimensions. For instance, our previous experiments with cold-rolled [2; 13; 18] and annealed copper samples reveal much stronger bending of the head part of profiled samples in the case of annealed copper with the average grain size of about 300 μm (only 5–10 grains per the diameter of the head part) compared with the cold-rolled copper with the average grain size of 18 μm (about hundred of grains across the head part). Our present MD simulations show that this behavior has a fundamental origin from the anisotropy of individual grains, which, in the case of small number of grains across the impactor head part leads to the strain localization and the loss of symmetry similar to the case of single crystals.

Considering all above motivation and supplementing our previous experimental program for copper [2; 13; 18], here we perform MD simulations of the Taylor impact tests for monocrystalline and polycrystalline copper samples, which are geometrically similar to the experimental ones, but having a length of 80 or 200 nm in contrast to 40-mm-long samples in the experiments. Both classical uniform cylinders and that with the profiled head part are considered. The impact velocity range is close to that in our experiments.

1. MD problem statement

Classical MD simulations are performed with the widely used Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator (LAMMPS) [26; 27], which now is the standard software in the most of MD simulations. Well-approved classical interatomic potential [28] of the embedded atom model (EAM) type [29] is used for Cu–Cu interactions. To analyze the calculated atomic configurations, the OVITO software [30] is applied, which implements, in particular, the dislocation extraction algorithm (DXA) [31] and the polyhedral template matching algorithm [32].

The examined MD systems are shown in Fig. 1 and include small monocrystalline

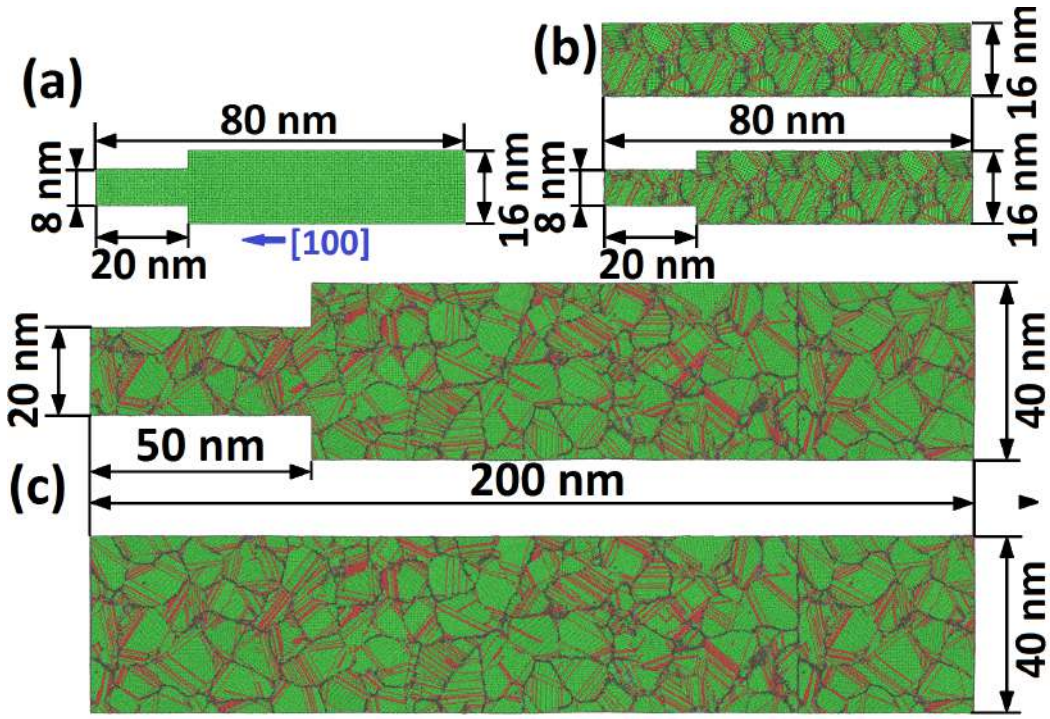


Fig. 1. Studied MD systems: (a) single crystal with 1.1 million atoms, (b) small polycrystal with 1.09 million atoms (profiled cylinder) or 1.34 million atoms (uniform cylinder) and (c) large polycrystal with 17.1 million atoms (profiled cylinder) or 21 million atoms (uniform cylinder). The color coding is described in Figs. 2–5; central sections are shown

and polycrystalline copper samples with the length of 80 nm and the number of atoms of about 1.1–1.3 millions (Fig. 1, *a,b*), as well as large polycrystalline copper samples with the length of 200 nm and the number of atoms in the range of 17–21 millions (Fig. 1, *c*). In the case of polycrystalline copper, we consider both classical uniform cylinders and profiled cylinders with the reduced head part. In the case of copper single crystals, only profiled samples are analyzed. The MD-considered samples are geometrically similar to that were experimentally examined [2; 13; 18], but reduced in $5 \cdot 10^5$ or $2 \cdot 10^5$ times for small and large MD systems, respectively.

The lattice direction [100] of single crystals is directed along the cylinder axis as shown in Fig. 1, *a*. To prepare the polycrystalline models, preliminary MD simulations of melting and crystallization were performed. In the case of large polycrystalline models, a copper single crystal with the dimensions of 200 nm × 45 nm × 45 nm was molten at high temperature and, thereafter, was cooled and crystallized with introducing of randomly oriented and randomly located crystallization centers maintained at low temperature. As a result, a polycrystalline bar was obtained containing 830 grains with an average grain diameter of about 8 nm, from which the classical and profiled cylinders were cut out. In the case of small polycrystalline samples, a smaller single crystal with dimensions of 20 nm × 20 nm × 20 nm was molten and crystallized on 9 crystallization centers providing a close grain size. The small crystallized cube was replicated four time to reach the total length of 80 nm and, thereafter, the required sample shape was cut out. This preparation procedure leads to periodically repeating grain structure of small polycrystalline samples, but does not influence the average mechanical response as shown below. As shown in Fig. 1, the monocrystalline samples have a perfect initial crystal structure of face-centered cubic (FCC) lattice, while the polycrystalline samples reveal a large number of grain boundaries and intra-grain stacking faults indicating the traces of plastic deformation at crystallization and thermal shrinkage.

After relaxation and thermalization at 300 K, an initial velocity directed along the

cylinder axis toward the rigid anvil is set to the sample by adding this ordered velocity to the thermal velocity of each atom. Periodic boundary conditions in all directions act during the relaxation stage; thereafter, they are replaced by free (shrink-wrapped) boundaries from all sides except the anvil side. The rigid anvil is modeled by fixed boundary condition, leading to the momentum reflection of the atoms in contact with this boundary (the imaginary anvil surface). The collision of sample with anvil is simulated in microcanonical (NVE) ensemble with the conservation of total energy. The investigated range of impact velocities with the maximal velocity of 180 m/s is somewhat wider than that investigated in the experiments [2; 13; 18].

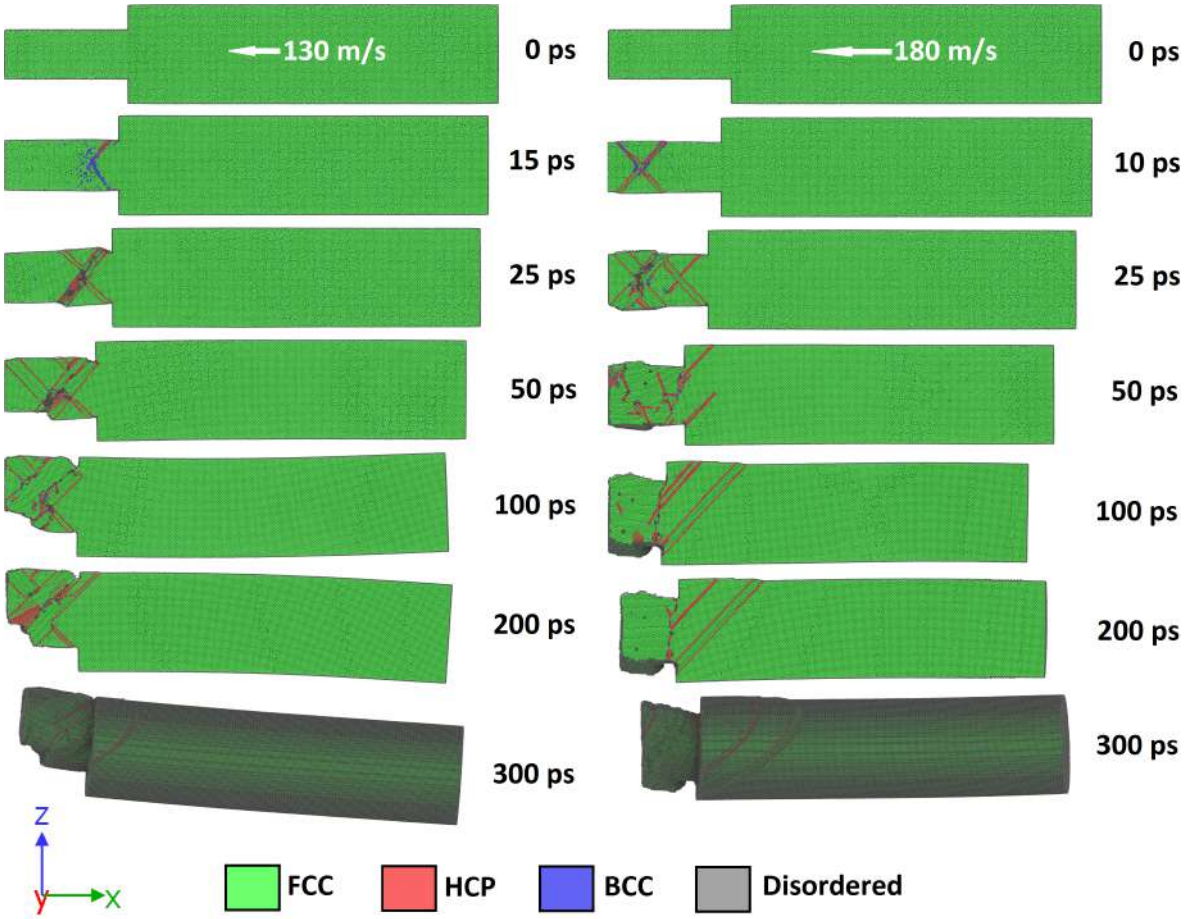


Fig. 2. Impact of profiled 80-nm-long monocrystalline samples at the impact velocity of 130 m/s (left column) and 180 m/s (right column). All plots besides the bottom ones present central section of the sample; atoms are colored in accordance with the local ordering as described by the legend

2. Dynamic deformation of nanoscale samples

Fig. 2 shows dynamic deformation of single crystal copper at two impact velocities. The plastic deformation starts with nucleation and propagation of Shockley partial dislocations leaving the staking faults indicated in Fig. 2 as the stripes of hexagonal closed packed (HCP) atoms. In contrast to the case of homogeneous nucleation of dislocations in the bulk of material [33], the dislocations are emitted from the lateral surface of the reduced cylindrical head part. Similar to that was reported previously [34; 35], a fraction of bulk-centered cubic (BCC)-ordered atoms appears before the dislocation emission indicating an unstable state of the crystal lattice under imposed elastic deformation. The emitted dislocations form slip bands in (111) closed packed planes crossing the head part and leading to the strain localization, which, in turn, leads to the loss of cylindrical symmetry of the samples and to an oblique rebound at

the late stage of collision. The plastic deformation is mainly concentrated in the reduced head part, but it touches the main part of the cylinder as well providing steps on the lateral surface, ending the slip bands.

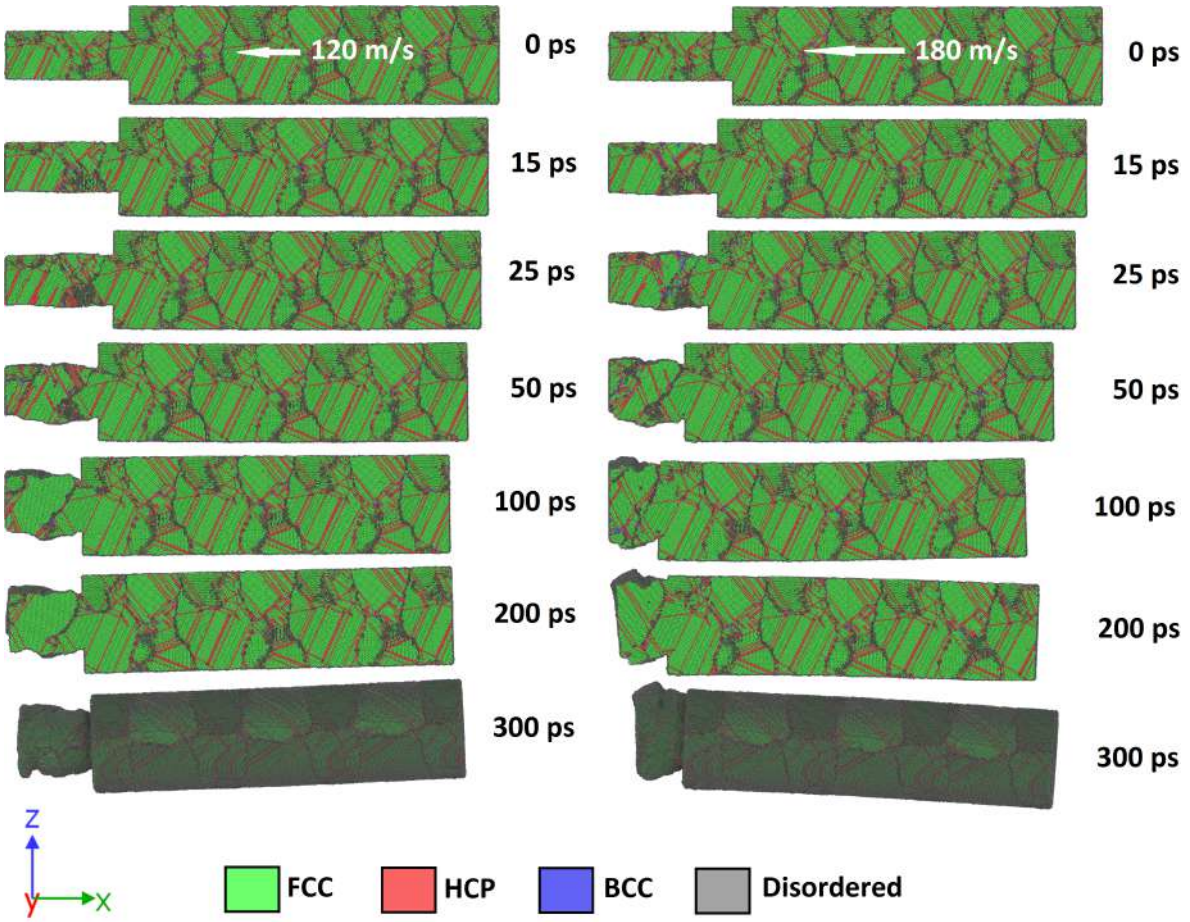


Fig. 3. Impact of 80-nm-long profiled polycrystalline samples at the impact velocity of 120 m/s (left column) and 180 m/s (right column). All plots besides the bottom ones present central section of the sample; atoms are colored in accordance with the local ordering as described by the legend

The polycrystalline samples shown in Fig. 3 have initial abundant defect substructure. As a result, there is no need to accumulate high elastic stresses required to trigger the dislocation nucleation/emission, and the plastic deformation starts earlier compared to the case of single crystals. Nevertheless, further evolution and the final shapes are very similar, compare Fig. 3 and Fig. 2. Polycrystalline samples are also prone to the strain localization and the oblique rebounding, just like single crystals. For the profiled small polycrystalline models, the diameter of the reduced head part is about the grain size. Therefore, the anisotropy of the elastic properties and the plastic slip of particular grains in the head part are significant and not properly averaged through a number of grains resulting in the loss of the initial cylindrical symmetry.

Fig. 4 shows the case of classical uniform cylinders traditionally applied in the Taylor impact tests. This is a small polycrystalline copper model. One can see that the final plastic deformation is much weak compared with the case of profiled samples in Fig. 3 at the same impact velocities. This difference motivated us to develop the profiled cylinders [18] in order to concentrate the kinetic energy in a small head part and to increase the reached deformation degree. In spite of a weaker deformation and a higher number of grains per cross-section, the uniform cylinders are also prone to the loss of axial symmetry and to an oblique rebounding, although in a lesser degree than in the case of profiled ones.

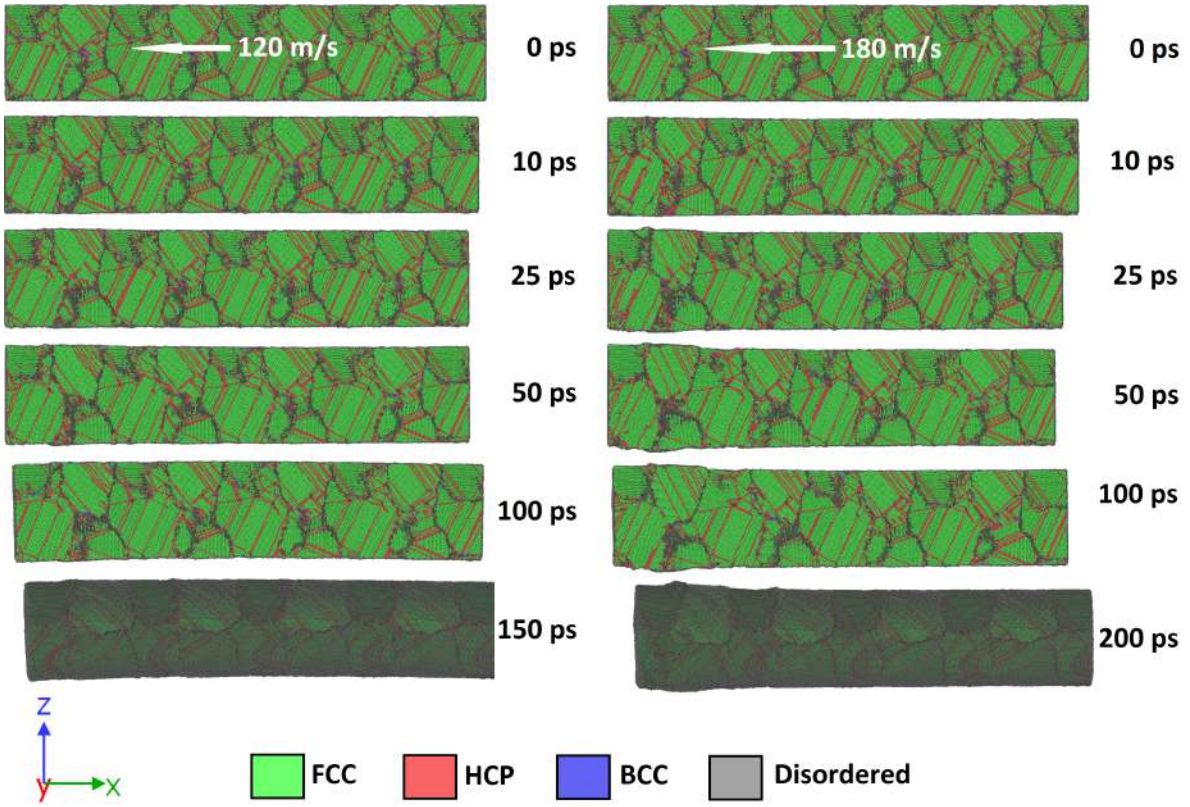


Fig. 4. Impact of the classical uniform cylinders 80 nm in length made of polycrystalline copper at the impact velocity of 120 m/s (left column) and 180 m/s (right column). All plots besides the bottom ones present central section of the sample; atoms are colored in accordance with the local ordering

As far as the number of grains is very limited at the impact edge of the small polycrystalline model, which can distort the deformation process, a larger polycrystalline model shown in Fig. 1, *c* was constructed and examined; the results are shown in Fig. 5. The increase in the number of grains really increases the uniformity, but does not completely eliminate the bending of the heat part and the oblique rebounding. Even for this large polycrystalline model, there are still only about 3–5 grains per the diameter of the impact edge, retaining the large influence of the plastic deformation anisotropy of particular grains.

We can conclude that there is a fundamental reason for the loss of the initial symmetry and for the oblique rebounding even for the geometrically perfect initial shape and for the normal impact. Therefore, the bending of the samples in the experiment is not always because of inaccurate experimental scheme, but can come from the features of the material microstructure. This conclusion is in line with the experimental results for macroscopic samples made of tantalum single crystals, for which strong anisotropy, strain localization and loss of symmetry were reported [1] and confirmed by the crystal plasticity calculations [24; 25]. This is also in line with our recent experimental results for cold-rolled [2; 13; 18] and annealed copper samples, which revealed much stronger bending of the head part of profiled samples in the case of annealed copper compared with the as-received cold-rolled ones. This can be explained by a large grain size of about 300 μm in the annealed copper, which results in 5–10 grains per the diameter of the head part, compared with the cold-rolled copper with the average grain size of 18 μm providing about hundred of grains across the head part and leading to an efficient averaging of material properties. On the other hand, the strain localization obviously takes place even for fine-grained materials, in particular at the initiation of fracture [5].

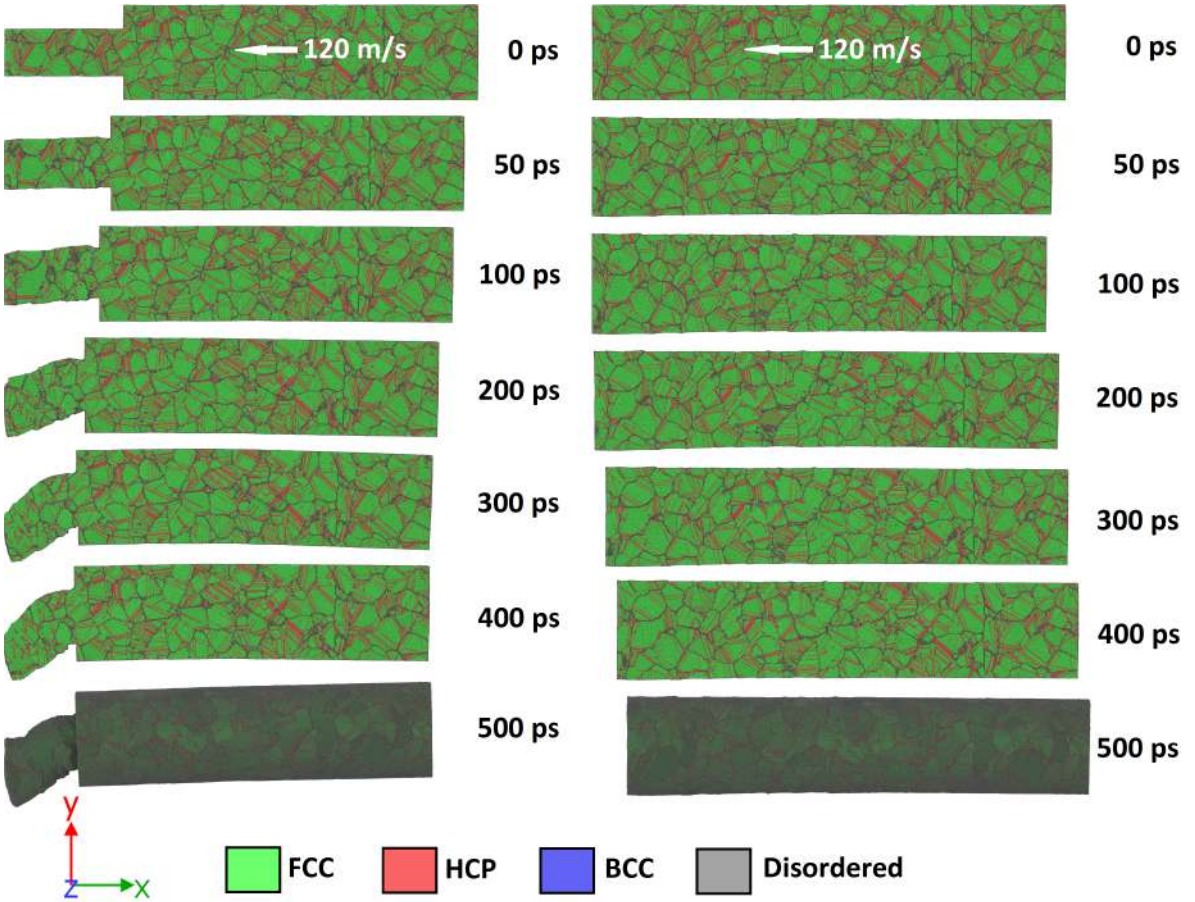


Fig. 5. MD results for large polycrystalline model: Impact of profiled (left column) and classical uniform (right column) cylinders 200 nm in length at the impact velocity of 120 m/s. All plots besides the bottom ones present central section of the sample; atoms are colored in accordance with the local ordering as described by the legend

3. Comparison with experiments for macroscopic samples

Fig. 6 summarizes the change in length of all MD-simulated samples versus the impact velocity. In order to compare the different-scale impactors, the ratio of the final length to the initial one (the normalized length) is used as the measure of the final plastic deformation. Fig. 6, *b* shows that all three studied types of MD systems, single crystals, small polycrystals and large polycrystals, reveal the same deformation behavior, and the corresponding data points lay around the same dependence fitted to the small polycrystals taking into account a certain statistical straggling. It is remarkable that both the perfect single crystals and the defect-reach polycrystals experience very similar final deformation, in spite of the fact that the dislocation emission triggers the plastic deformation in the former case, while the activation of the existing defects is the prevalent mechanism in the later case. This feature indicates that the system loses the memory of the plasticity incipience. Fig. 6, *a* for classical uniform cylinders shows very close final deformation of both small and large polycrystals.

MD results in Fig. 6 are compared with our recent experimental data [2; 13; 18] for the cold-rolled copper samples with the length of 40 mm. In spite of five orders of magnitude difference in length, the MD-calculated curves are similar to that experimentally measured for the millimeter samples, but, as expected, reveal much higher strength of the nanoscale samples. The higher strength of nanoscale systems can be explained by two factors. The first one is much higher strain rates at deformation. Figs. 2 and 3

show that the main stage of the deformation of the head part lasts for about 100 ps reaching the deformation degree of about 1, which gives an estimate of $10^{10}\,s^{-1}$ for the average strain rate, while it is only about 10^4–$10^5\,s^{-1}$ in the case of experiment [2; 13; 18]. Such increase in the strain rate substantially enhances the yield strength. Another factor is the small grain/sample size, which restricts the free path of dislocations before the disappearance or pinning at grain boundaries or lateral surfaces, which is the leading mechanism of the strengthening of nanoscale systems.

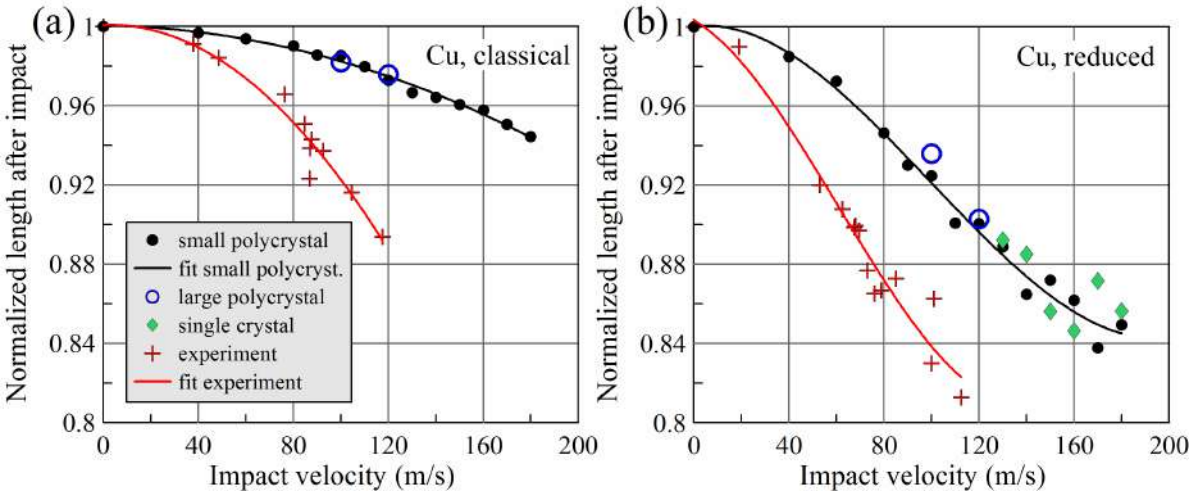


Fig. 6. Comparison of MD results for nanoscale samples with the experimental data [2; 18] for macroscopic samples: Normalized length of the deformed samples in the case of (a) classical cylinders and (b) profiled cylinders with the reduced head part

Remarkably, the scatter of experimental data points around the fitted curves in Fig. 6 is comparable with that is observed for the MD-calculated data points. It means that the experimentally measured scatter can be partially explained by some fundamental reasons, including variation of the material microstructure and properties.

Conclusions

For extension of our previous experimental investigations and revealing the features of Taylor impact tests at nanoscale, here we perform MD simulations for single crystalline and polycrystalline copper considering both classical cylindrical samples and profiled ones with the reduced head part. The sample shapes are similar to that used in experiments, but the total length is 80 or 200 nm in contrast to 40-mm-length samples in the experiments. In spite of five orders of magnitude difference in length, the MD-calculated curves of the normalized length after impact versus the impact velocity are similar to that experimentally measured for macroscopic samples, but reveal much higher strength of nanoscale samples. The enhanced strength is due to both much higher strain rate and smaller free paths of dislocations in the nanoscale impactors. Both single crystalline and polycrystalline samples are subjected to loss of the initial cylindrical symmetry in the course of impact. In the case of single crystal, this is due to activation of certain slip systems. In the case of polycrystals, this is connected with the anisotropy of individual grains and is clearly evident when the profiled part of the sample contains only a few grains in the thickness direction. This loss of the symmetry correlates with the distortion of the shape of the profiled samples in our experiments with annealed coarse-grained copper, in which the largest grains reach millimeter sizes. Thus, the symmetry distortion observed in the experiment has a fundamental reason of the plastic flow localization. Besides, our idealized consideration in the MD reveals a scatter of

deformation results along some general trend, suggesting fundamental reasons of similar scatter observed in the experiments. An obvious fundamental reason is variation of the material microstructure and properties.

References

1. **Lim H., Carroll J.D., Battaile C.C., Chen S.R., Moore A.P., Lane J.M.D.** Anisotropy and strain localization in dynamic impact experiments of tantalum single crystals. *Scientific Reports*, 2018, vol. 8, p. 5540.
2. **Rodionov E.S., Lupanov V.G., Grachyova N.A., Mayer P.N., Mayer A.E.** Taylor impact tests with copper cylinders: experiments, microstructural analysis and 3D SPH modeling with dislocation plasticity and MD-informed artificial neural network as equation of state. *Metals*, 2022, vol. 12, no. 2, p. 264.
3. **Zelepugin S.A., Pakhnutova N.V., Shkoda O.A., Boyangin E.N.** Experimental study of the microhardness and microstructure of a copper specimen using the Taylor impact test. *Metals*, 2022, vol. 12, no. 12, p. 2186.
4. **Min F., Gao K., Huang H., Wen S., Wu X., Nie Z., Zhou D., Gao X.** Application of the modified GTN model in predicting Taylor impact fracture of 7XXX aluminum alloy. *Computers and Structures*, 2024, vol. 301, p. 107457.
5. **Rodionov E.S., Pogorelko V.V., Lupanov V.G., Fazlitdinova A.G., Mayer P.N., Mayer A.E.** Dynamic deformation and fracture of brass: Experiments and dislocation-based model. *International Journal of Plasticity*, 2024, vol. 183, p. 104165.
6. **Wang Y., Xin L., Liu H., Su B., Jin T., Zhang S., Chen J., Li Z.** Modeling of strain hardening behaviors of 6061 aluminum alloy considering strain rate and temperature effects. *Journal of Materials Research and Technology*, 2024, vol. 30, pp. 4973–4985.
7. **Iannitti G., Bonora N., Testa G., Ruggiero A.** High-rate characterization of additively manufactured Ti-6Al-4V using Taylor cylinder impact test: Experiments. *Material Design and Processing Communications*, 2021, vol. 3, no. 5, p. e192.
8. **Kolomy S., Jopek M., Sedlak J., Benc M., Zouhar J.** Study of dynamic behaviour via Taylor anvil test and structure observation of M300 maraging steel fabricated by the selective laser melting method. *Journal of Manufacturing Processes*, 2024, vol. 125, pp. 283–294.
9. **Ricci S., Iannitti G., Testa G., Sgambetterra M., Zucca G., Ruggiero A., Gentile D., Bonora N.** High-rate characterization of L-PBF AlSi10Mg under impact conditions. *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, 2024, vol. 11, pp. 106–118.
10. **Wang Z., Zhang T., Tang E., Xiong R., Jiao Z., Qiao J.** Formation and deformation mechanisms in gradient nanostructured NiCoCrFe high entropy alloys upon supersonic impacts. *Applied Physics Letters*, 2021, vol. 119, iss. 20, p. 201901.
11. **Sun Z., Shi C., Xiao X., Luo X., Xia Z., Yin Q.** Investigation of mechanical behavior, constitutive modeling, and fracture criteria for as-cast $Al_{0.3}$CoCrFeNi high entropy alloy. *Intermetallics*, 2023, vol. 162, p. 108029.
12. **Xu J., Liu Q., Xu Y.F., Guo S.H., Li C., Zhang N.B., Cai Y., Liu X.Y., Lu L., Luo S.N.** Taylor impact of high-entropy alloy $Al_{0.1}$CoCrFeNi: Dynamic severe plastic deformation and bulk gradient structure. *Journal of Alloys and Compounds*, 2023, vol. 936, p. 168261.
13. **Rodionov E.S., Mayer A.E.** Estimation of dynamic yield stress by Taylor test with reduced cylindrical head part of samples. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, iss. 3, pp. 399–409.
14. **Piao M.J., Huh H., Lee I., Park L.** Characterization of hardening behaviors of 4130 Steel, OFHC Copper, Ti6Al4V alloy considering ultra-high strain rates and high temperatures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, vol. 131–132, pp. 1117–1129.

15. **Zelepugin S.A., Cherepanov R.O., Pakhnutova N.V.** Optimization of Johnson–Cook constitutive model parameters using the Nesterov gradient-descent method. *Materials*, 2023, vol. 16, no. 15, p. 5452.
16. **Sjue S., Ahrens J., Biswas A., Francom D., Lawrence E., Luscher D., Walters D.** Fast strength model characterization using Bayesian statistics. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2272, p. 070043.
17. **Rivera D., Bernstein J., Schmidt K., Muyskens A., Nelms M., Barton N., Kupresanin A., Florando J.** Bayesian calibration of strength model parameters from Taylor impact data. *Computational Materials Science*, 2022, vol. 210, p. 110999.
18. **Rodionov E.S., Pogorelko V.V., Lupanov V.G., Mayer P.N., Mayer A.E.** Modified Taylor impact tests with profiled copper cylinders: Experiment and optimization of dislocation plasticity model. *Materials*, 2023, vol. 16, no. 16, p. 5602.
19. **Veysset D., Lee J.-H., Hassani M., Kooi S.E., Thomas E.L., Nelson K.A.** High-velocity micro-projectile impact testing. *Applied Physics Reviews*, 2021, vol. 8, p. 011319.
20. **Hassani M., Veysset D., Sun Y., Nelson K.A., Schuh C.A.** Microparticle impact-bonding modes for mismatched metals: From co-deformation to splatting and penetration. *Acta Materialia*, 2020, vol. 199, pp. 480–494.
21. **He L., Veysset D., Nault I.M., Champagne V.K., Hassani M.** Impact and bonding behavior of core-shell powder particles. *Surface and Coatings Technology*, 2022, vol. 441, p. 128591.
22. **Lucas T.J., Saunders A.M., Schuh C.A.** Microstructure effects on high velocity microparticle impacts of copper. *Acta Materialia*, 2024, vol. 280, p. 120329.
23. **Hassani M., Veysset D., Sun Y., Nelson K.A., Schuh C.A.** Material hardness at strain rates beyond $10^6\,\mathrm{s}^{-1}$ via high velocity microparticle impact indentation. *Scripta Materialia*, 2020, vol. 177, pp. 198–202.
24. **Nguyen T., Fensin S.J., Luscher D.J.** Dynamic crystal plasticity modeling of single crystal tantalum and validation using Taylor cylinder impact tests. *International Journal of Plasticity*, 2021, vol. 139, p. 102940.
25. **Feng Z., Zecevic M., Knezevic M., Lebensohn R.A.** Predicting extreme anisotropy and shape variations in impact testing of tantalum single crystals. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 241, p. 111466.
26. **Plimpton S.** Fast parallel algorithms for short–range molecular dynamics. *Journal of Computational Physics*, 1995, vol. 117, no. 1, p. 1–19.
27. **Thompson A.P., Aktulga H.M., Berger R., Bolintineanu D.S., Brown W.M., Crozier P.S., Veld P.J., Kohlmeyer A., Moore S.G., Nguyen T.D., Shan R., Stevens M.J., Tranchida J., Trott C., Plimpton S.J.** LAMMPS — a flexible simulation tool for particle-based materials modeling at the atomic, meso, and continuum scales. *Computer Physics Communications*, 2022, vol. 271, p. 108171.
28. **Mishin Y., Mehl M.J., Papaconstantopoulos D.A., Voter A.F., Kress J.D.** Structural stability and lattice defects in copper: Ab initio, tight-binding, and embedded-atom calculations. *Physical Review B*, 2001, vol. 63, iss. 22, p. 224106.
29. **Daw M.S., Baskes M.I.** Embedded-atom method: Derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals. *Physical Review B*, 1984, vol. 29, p. 6443.
30. **Stukowski A.** Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO — the Open Visualization Tool. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2010, vol. 18, no. 1, p. 015012.
31. **Stukowski A., Bulatov V.V., Arsenlis A.** Automated identification and indexing of dislocations in crystal interfaces. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2012, vol. 20, no. 8, p. 085007.
32. **Larsen P.M., Schmidt S., Schiøtz J.** Robust structural identification via polyhedral template matching. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 24, no. 5, p. 055007.

33. **Mayer A.E., Krasnikov V.S., Pogorelko V.V.** Homogeneous nucleation of dislocations in copper: Theory and approximate description based on molecular dynamics and artificial neural networks. *Computational Materials Science*, 2022, vol. 206, p. 111266.

34. **Mayer A.E., Lekanov M.V., Grachyova N.A., Fomin E.V.** Machine-learning-based model of elastic-plastic deformation of copper for application to shock wave problem. *Metals*, 2022, vol. 12, iss. 3, p. 402.

35. **Grachyova N.A., Fomin E.V., Mayer A.E.** Theoretical model of structural phase transitions in Al-Cu solid solutions under dynamic loading using machine learning. *Dynamics*, 2024, vol. 4, iss. 3, pp. 526–553.

Article received 07.10.2024.
Corrections received 29.11.2024.

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 801–812.

УДК 539.3 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-801-812

МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ТЕЙЛОРА С КЛАССИЧЕСКИМИ И ПРОФИЛИРОВАННЫМИ МЕДНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

А. Е. Майер[a], Е. С. Родионов[b], В. В. Погорелко[c], П. Н. Майер[d]

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
[a]mayer@csu.ru, [b]rodionoves.pgd@gmail.com, [c]vik_ko83@mail.ru, [d]polina.nik@mail.ru

Тесты Тейлора, предполагающие высокоскоростной удар образцов о жёсткую наковальню, широко используются для изучения динамического отклика различных металлических материалов. Чтобы расширить наши предыдущие экспериментальные исследования и выявить особенности тестов Тейлора в наномасштабе, здесь мы проводим молекулярно-динамическое моделирование для монокристаллической и поликристаллической меди, рассматривая как классические цилиндрические образцы, так и профилированные образцы с уменьшенной головной частью. Геометрическая форма образцов аналогична той, которая использовалась в экспериментах, но общая длина составляет 80 или 200 нм в отличие от образцов длиной 40 мм в экспериментах. Несмотря на разницу в пять порядков по длине, рассчитанные методом МД кривые относительной длины после удара в зависимости от скорости удара аналогичны экспериментально измеренным для миллиметровых образцов, но, как и ожидалось, показывают гораздо более высокую прочность наноразмерных образцов. Как монокристаллические, так и поликристаллические образцы подвержены потере исходной цилиндрической симметрии в процессе удара. В случае монокристалла это происходит из-за активации определённых систем скольжения. В случае поликристаллов это связано с анизотропией отдельных зёрен и отчётливо проявляется, когда профилированная часть образца содержит всего несколько зёрен по толщине. Эта потеря симметрии коррелирует с искажением формы профилированных образцов в наших экспериментах с отожжённой крупнозернистой медью, в которой наиболее крупные зёрна достигают миллиметровых размеров. Таким образом, наблюдаемое в эксперименте искажение симметрии имеет фундаментальную причину локализации пластического течения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 20-11-20153-Р, https://rscf.ru/en/project/23-11-45024/.

Ключевые слова: *испытание на удар по Тейлору, наноразмерный образец, молекулярная динамика, динамическая пластическая деформация, медь, монокристалл, поликристалл, потеря симметрии, локализация пластической деформации.*

Поступила в редакцию 07.10.2024.
После переработки 29.11.2024.

Сведения об авторах

Майер Александр Евгеньевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; mayer@csu.ru.
Родионов Егор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, заведующий учебной лабораторией общей и прикладной физики кафедры общей и теоретической физики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; rodionoves.pgd@gmail.com.
Погорелко Виктор Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; vik_ko83@mail.ru.
Майер Полина Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; polina.nik@mail.ru.