

УДК 517.972.9

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ АЛГОРИТМ ИСР В КЛАССЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Ю. Маковецкий^а, С. М. Воронин^б, Д. В. Тихоньких^с, М. Н. Алексеев^д

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

^аartemmac@csu.ru, ^бvoron@csu.ru, ^сsparsemind@gmail.com, ^дalexeev@csu.ru

Наиболее используемым методом регистрации облаков точек в трёхмерном пространстве является «итерационный алгоритм ближайших точек» (iterative closest points, ICP). Цель работы алгоритма — вычисление оптимального относительно заданной метрики геометрического преобразования, совмещающего два данных облака. Важным этапом алгоритма ICP является решение задачи минимизации функционала, соответствующего данной метрике для данного класса геометрических преобразований. В работе представлен метод решения вариационной задачи алгоритма ICP для метрики «соответствие типа точка-точка» (point-to-point) в классе аффинных преобразований. С помощью компьютерного моделирования демонстрируется корректность работы алгоритма.

Ключевые слова: трёхмерная реконструкция, регистрация облаков точек, локализация, аффинные преобразования.

Введение

Алгоритм ICP (Iterative Closest Points) является основным среди методов «выравнивания» трёхмерных моделей, основанных на использовании исключительно геометрических характеристик. Под выравниванием понимается определение геометрического преобразования, наилучшим относительно нормы L_2 образом связывающего два данных набора (облака) точек в \mathbb{R}^3 . Алгоритм широко используется для регистрации данных, получаемых с помощью 3D-сканеров. Первоначально описанный в работах Чена и Медioni [1] и Бесла и Маккея [2] алгоритм ICP состоит из следующих итеративно применяемых шагов:

1. Выбор некоторого подмножества точек в обоих облаках.
2. Определение соответствия между точками выбранных подмножеств.
3. Сопоставление весовых коэффициентов полученным парам.
4. Отбрасывание некоторых пар на основе различных критериев.
5. Выбор метрики ошибки для пар точек.
6. Минимизация метрики ошибки (вариационная подзадача алгоритма ICP).

Существуют два основных подхода к выбору метрики ошибки для пар точек. В рамках первого подхода (point-to-point) [2] используется расстояние между элементами пары в \mathbb{R}^3 , в рамках второго подхода (point-to-plane) [1] учитывается расстояние между точкой первого облака и касательной плоскостью к соответствующей точке второго облака.

Ключевым элементом [3] алгоритма ICP является поиск ортогонального или аффинного преобразования, наилучшим образом в смысле квадратичной метрики

совмещающего два облака точек с заданным соответствием между точками (вариационная подзадача алгоритма ICP). Для ортогональных преобразований решение этой задачи в замкнутой форме получено Б. Хорном в работах [4] и [5]. В первой из них решение основано на использовании кватернионов, во второй — на использовании ортогональных матриц. Решения являются линейными по времени по отношению к числу пар точек.

Оригинальный алгоритм ICP широко применяется для регистрации жёстких объектов, но плохо работает в случае регистрации нежёстких объектов. В работе [6] предложено расширение алгоритма ICP при использовании масштабирования помимо поворота и параллельного переноса. Обобщение алгоритма на случай произвольного аффинного преобразования сделано в работах [7; 8].

Описанные выше подходы к решению вариационной подзадачи алгоритма ICP относятся к point-to-point методам. Для метода point-to-plane аналитическое решение неизвестно. Для решения задачи используется либо итерационный метод Левенберга — Марквардта, либо линеаризация проблемы [9].

В данной работе описываются точные решения вариационной подзадачи алгоритма ICP для случая аффинных преобразований с использованием метода point-to-point. В отличие от работы [7] представляемый подход позволяет получать точные решения для всех возможных вырожденных случаев. Частично метод был описан в работе [10]. Компьютерное моделирование содержит результаты вычислительных экспериментов, основанных на представляемом методе решения задачи минимизации.

1. Формулировка задачи минимизации

Обозначим через $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ первое облако точек, через $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — второе облако точек в \mathbb{R}^3 . Предположим, что известно такое соответствие между облаками X и Y , что каждой точке x_i первого облака сопоставлена точка y_i второго облака. Во многих работах, посвящённых алгоритму ICP, рассматривается ортогональное геометрическое преобразование, связывающее X и Y : $Rx_i + t$, где R — матрица поворота, t — вектор параллельного переноса, $i = 1, 2, \dots, n$. В рамках алгоритма S-ICP рассматривается геометрическое преобразование следующего вида: $RSx_i + t$, где S — матрица масштабирования.

Аффинное преобразование общего вида в \mathbb{R}^3 задаётся функцией от 12 переменных. Рассмотрим вариационную подзадачу алгоритма ICP для произвольного аффинного преобразования. Обозначим через (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) и (y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}) координаты точек x_i и y_i в данной системе координат. Обозначим через $J(A, t)$ следующий функционал:

$$J(A, t) = \sum_{i=1}^n \|Ax_i + t - y_i\|^2,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad x_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix}, \quad y_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ y_{3i} \end{pmatrix},$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Вариационная задача алгоритма ICP заключается в поиске $\arg \min J(A, t)$, где функционал $J(A, t)$ имеет вид

$$J(A, t) = \sum_{i=1}^n (a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} + a_{13}x_{3i} + t_1 - y_{1i})^2 + \\ + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} + t_2 - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} + t_3 - y_{3i})^2.$$

2. Решение задачи минимизации

Применим к точкам первого облака следующий параллельный перенос:

$$\left\{ x'_{1i} = x_{1i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j}, x'_{2i} = x_{2i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{2j}, x'_{3i} = x_{3i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{3j} \right\},$$

а к точкам второго облака — параллельный перенос

$$\left\{ y'_{1i} = y_{1i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j}, y'_{2i} = y_{2i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{2j}, y'_{3i} = y_{3i} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{3j} \right\}.$$

В новых координатах получаем

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{11}x'_{1i} + a_{12}x'_{2i} + a_{13}x'_{3i} - y'_{1i})^2 + (a_{21}x'_{1i} + a_{22}x'_{2i} + a_{23}x'_{3i} - y'_{2i})^2 + \\ + (a_{31}x'_{1i} + a_{32}x'_{2i} + a_{33}x'_{3i} - y'_{3i})^2.$$

Таким образом, в новых координатах $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ и $\{y'_1, y'_2, y'_3\}$ функционал J не зависит от компонент параллельного переноса. Далее штрихованные координаты записываются без штрихов.

Рассмотрим различные вырожденные случаи взаимного расположения точек первого облака X .

2.1. Пусть все точки лежат на прямой Ox , т. е. $x_{2i} = x_{3i} = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$. Функционал $J(A)$ принимает вид

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{11}x_{1i} - y_{1i})^2 + (a_{21}x_{1i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} - y_{3i})^2.$$

Вычислим компоненты градиента $\nabla J(A)$:

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{11}} = 2 \sum_{i=1}^n (a_{11}x_{1i} - y_{1i})x_{1i} = 0, \quad a_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{1i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \neq 0.$$

Аналогично

$$a_{21} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{2i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad a_{31} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{3i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}.$$

Остальные элементы матрицы a_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3$, принимают любые значения. Так как рассматриваемые координаты являются штрихованными, заменим их на исходные:

$$\begin{cases} x_{1k} = x'_{1k} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j}, & k = 1, 2, 3, \\ y_{1l} = y'_{1l} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{1j}, & l = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Вычислим компоненты вектора t , используя найденную матрицу A :

$$t_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{ki} - (a_{k1}x_{1i} + a_{k2}x_{2i} + a_{k3}x_{3i})) = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Замечание 1. Значения элементов матрицы $a_{k2}, a_{k3}, k = 1, 2, 3$, не влияют на результат суммирования, так как $x_{2i} = x_{3i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

2.2. Пусть все точки первого облака X лежат на прямой

$$\frac{x_1 - p_x}{v_1} = \frac{x_2 - p_y}{v_2} = \frac{x_3 - p_z}{v_3},$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)$ — направляющий единичный вектор прямой. Рассмотрим ортонормальную систему координат $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 & -v_1 & v_2 v_3 \\ v_3 & 0 & -v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - p_x \\ x_2 - p_y \\ x_3 - p_z \end{pmatrix}.$$

Направляющий вектор оси px'_1 этой системы является вектором v , центр системы — точка $p = (p_x, p_y, p_z)$. В системе координат $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ задача сводится к п. 2.1. Запишем последнее равенство в виде

$$x' = M^{-1}(x - p). \quad (1)$$

Используя вычисленную матрицу R и вектор t , получаем итоговое преобразование

$$RM^{-1}x - Rp + t. \quad (2)$$

2.3. Пусть все точки первого облака X лежат в плоскости Oxy . После параллельного переноса облака точек функционал $J(A)$ принимает вид

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} - y_{1i})^2 + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} - y_{3i})^2.$$

Имеем

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{11}} = 2 \sum_{i=1}^n (a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} - y_{1i})x_{1i} = 0,$$

$$a_{11} \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^n y_{1i}x_{1i} - a_{12} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}, \quad a_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{1i}x_{1i} - a_{12} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \neq 0.$$

Функционал $J(A)$ принимает вид

$$J(A) = \sum_{i=1}^n \left(a_{12} \left(x_{2i} - \frac{x_{1i} \sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} \right) - \left(y_{1i} - \frac{\sum_{j=1}^n y_{1j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i} \right) \right)^2 + \dots$$

Обозначим через γ_{1i} и γ_{2i} следующие выражения:

$$\gamma_{1i} = x_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i}, \quad \gamma_{2i} = y_{1i} - \frac{\sum_{j=1}^n y_{1j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i},$$

где $\sum_{j=1}^n x_{1j}^2 \neq 0$. Тогда $J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{12}\gamma_{1i} - \gamma_{2i})^2 + \dots$,

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{12}} = 2 \sum_{i=1}^n (a_{12}\gamma_{1i} - \gamma_{2i})\gamma_{1i} = 0, \quad a_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{2i}\gamma_{1i}}{\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2}.$$

2.3.1. Пусть

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2 = 0, \quad x_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i} = 0, \quad x_{2i} \sum_{j=1}^n x_{1j}^2 = x_{1i} \sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}.$$

Обозначим $A = \sum_{j=1}^n x_{1j}^2$, $B = \sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}$, тогда $x_{2i} = x_{1i}B/A$. Таким образом, для точек $P_i = (x_{1i}, x_{2i}, 0)$ соответствующие им радиус-векторы $\overline{OP_i} = (x_{1i}, x_{2i}, 0) = (x_{1i}, x_{1i}B/A, 0) = x_{1i}(1, B/A, 0)$ коллинеарны, $i = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, все точки P_i лежат на одной прямой с направляющим вектором $v = (1, B/A, 0)$, проходящей через центр O . Задача сводится к п. 2.1.

2.3.2. Пусть $\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2 \neq 0$. Рассмотрим первую строку матрицы A :

$$a_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{2i}\gamma_{1i}}{\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2}, \quad \gamma_{1i} = x_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i}, \quad \gamma_{2i} = y_{1i} - \frac{\sum_{j=1}^n y_{1j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i},$$

$$a_{11} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{1i}x_{1i} - a_{12} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad a_{13} = 0.$$

Для второй и третьей строк получим

$$a_{22} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{2i}\gamma_{1i}}{\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2}, \quad \gamma_{1i} = x_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i}, \quad \gamma_{2i} = y_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n y_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i},$$

$$a_{21} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{2i}x_{1i} - a_{22} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad a_{23} = 0,$$

$$a_{32} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{2i}\gamma_{1i}}{\sum_{i=1}^n \gamma_{1i}^2}, \quad \gamma_{1i} = x_{2i} - \frac{\sum_{j=1}^n x_{2j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i}, \quad \gamma_{2i} = y_{3i} - \frac{\sum_{j=1}^n y_{3j}x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}^2} x_{1i},$$

$$a_{31} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{3i}x_{1i} - a_{32} \sum_{i=1}^n x_{2i}x_{1i}}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}, \quad a_{33} = 0.$$

Вернёмся к исходной системе координат и вычислим компоненты вектора t , используя найденную матрицу A по формулам (1) и (2).

2.4. Пусть все точки первого облака X лежат в плоскости Oxz или Oyz . Переобозначением осей системы координат сведём задачу к п. 2.3. Используя вычисленные матрицу R и вектор t , получаем итоговое преобразование $RM^{-1}x + t$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

2.5. Пусть $\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \neq 0$ и $\sum_{i=1}^n x_{3i}^2 \neq 0$, тогда

$$\frac{\partial f(A)}{\partial a_{1k}} = \sum_{i=1}^n 2(a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} + a_{13}x_{3i} - y_{1i})x_{ki} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$a_{1k} \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 + \sum_{i=1}^n (a_{1m}x_{mi} + a_{1n}x_{ni} - y_{1i})x_{ki} = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad m, n \neq k,$$

$$a_{1k} \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^n (y_{1i} - a_{1m}x_{mi} - a_{1n}x_{ni})x_{ki}, \quad a_{1k} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - a_{1m}x_{mi} - a_{1n}x_{ni})x_{ki}}{\sum_{i=1}^n x_{ki}^2},$$

$$J(A) = \sum_{i=1}^n \left(a_{1m}x_{mi} + \frac{\sum_{j=1}^n (y_{1j} - a_{1m}x_{mj} - a_{1n}x_{nj})x_{kj}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} x_{ki} + a_{1n}x_{ni} - y_{1i} \right)^2 +$$

$$+ (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2.$$

Рассмотрим отдельно

$$\begin{aligned} & a_{1m}x_{mi} + \frac{\sum_{j=1}^n (y_{1j} - a_{1m}x_{mj} - a_{1n}x_{nj})x_{kj}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} x_{ki} + a_{1n}x_{ni} - y_{1i} = \\ & = \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \left(\sum_{j=1}^n y_{1j}x_{kj} - a_{1m} \sum_{j=1}^n x_{mj}x_{kj} - a_{1n} \sum_{j=1}^n x_{nj}x_{kj} \right) + a_{1m}x_{mi} + a_{1n}x_{ni} - y_{1i} = \\ & = a_{1m} \left(x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj}x_{kj} \right) + a_{1n} \left(x_{ni} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{nj}x_{kj} \right) - \\ & \quad - \left(y_{1i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{1j}x_{kj} \right). \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в $J(A)$:

$$J(A) = \sum_{i=1}^n \left(a_{1m} \left(x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj} \right) + a_{1n} \left(x_{ni} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{nj} x_{kj} \right) - \right. \\ \left. - \left(y_{1i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{1j} x_{kj} \right) \right)^2 + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2.$$

Обозначим

$$\gamma_{mi} = x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj}, \quad \gamma_{li} = x_{ni} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{nj} x_{kj}, \\ \gamma_{ki} = y_{1i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{1j} x_{kj}.$$

Тогда

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{1m}x_{mi} + a_{1n}\gamma_{li} - \gamma_{ki})^2 + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + \\ + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2.$$

2.5.1. Если все $\gamma_{mi} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то в качестве переменной дифференцирования вместо m берётся l . Предположим, что все коэффициенты γ_{li} , $i = 1, 2, \dots, n$, равны нулю. Тогда если все $\gamma_{mi} = 0$ и $\gamma_{ni} = 0$, то

$$x_{mi} \sum_{j=1}^n x_{kj}^2 = x_{ki} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj}, \quad x_{ni} \sum_{j=1}^n x_{kj}^2 = x_{ki} \sum_{j=1}^n x_{lj} x_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть $\sum_{j=1}^n x_{kj}^2 = A$, $\sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj} = B$, $\sum_{j=1}^n x_{lj} x_{kj} = C$, тогда получим при $A \neq 0$

$$x_{mi} = \frac{x_{ki}B}{A}, \quad x_{li} = \frac{x_{ki}C}{A}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, $P_i = (x_{mi}, x_{li}, x_{ki})$, $\overline{OP}_i = (x_{mi}, x_{li}, x_{ki}) = x_{ki}(B/A, C/A, 1)$. Следовательно, все векторы \overline{OP}_i коллинеарные, $i = 1, 2, \dots, n$, поэтому все точки P_i лежат на одной прямой с направляющим вектором $\vec{v} = (B/A, C/A, 1)$, проходящей через центр O . Далее применим рассуждения из п. 2.2.

2.5.2. Предположим, что не все коэффициенты γ_{li} , $i = 1, 2, \dots, n$, равны нулю, в таком случае

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{1m}\gamma_{mi} + a_{1n}\gamma_{li} - \gamma_{ki})^2 + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2, \\
\frac{\partial J(A)}{\partial a_{1m}} &= 2 \sum_{i=1}^n (a_{1m}\gamma_{mi} + a_{1n}\gamma_{li} - \gamma_{ki})\gamma_{mi} = 0, \\
\sum_{i=1}^n a_{1m}\gamma_{mi}^2 + a_{1n}\gamma_{li}\gamma_{mi} - \gamma_{ki}\gamma_{mi} &= a_{1m} \sum_{i=1}^n \gamma_{mi}^2 + a_{1l} \sum_{i=1}^n \gamma_{li}\gamma_{mi} - \sum_{i=1}^n \gamma_{ki}\gamma_{mi} = 0, \\
a_{1m} \sum_{i=1}^n \gamma_{mi}^2 &= \sum_{i=1}^n \gamma_{ki}\gamma_{mi} - a_{1l} \sum_{i=1}^n \gamma_{li}\gamma_{mi}, \quad a_{1m} = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj}a_{mj} - a_{1l} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \\
J(A) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj} - a_{1l} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n a_{mj}^2} \gamma_{mi} + a_{1l}\gamma_{li} - \gamma_{ki} \right)^2 + \\
& + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2, \\
& \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj} - a_{1l} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n a_{mj}^2} \gamma_{mi} + a_{1l}\gamma_{li} - \gamma_{ki} = \\
& = \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj} - a_{1n}\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} + a_{1n}\gamma_{li} - \gamma_{ki} = \\
& = a_{1n} \left(\gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} \right) + \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} - \gamma_{ki} = \\
& = a_{1n} \left(\gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} \right) - \left(\gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} \right), \\
J(A) &= \sum_{i=1}^n \left(a_{1l} \left(\gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} \right) - \left(\gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} \right) \right)^2 + \\
& + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2.
\end{aligned}$$

Обозначим через φ_i и ψ_i следующие выражения:

$$\varphi_i = \gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad \psi_i = \gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}.$$

Тогда получим

$$J(A) = \sum_{i=1}^n (a_{1l}\varphi_i - \psi_i)^2 + (a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + a_{23}x_{3i} - y_{2i})^2 + (a_{31}x_{1i} + a_{32}x_{2i} + a_{33}x_{3i} - y_{3i})^2,$$

$$\frac{\partial J(A)}{\partial a_{1l}} = 2 \sum_{i=1}^n (a_{1l}\varphi_i - \psi_i)\varphi_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (a_{1l}\varphi_i - \psi_i)\varphi_i = a_{1l} \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 - \sum_{i=1}^n \varphi_i\psi_i = 0, \quad a_{1l} = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k\psi_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2}.$$

При $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 = 0$ пусть

$$A = \sum_{j=1}^n x_{kj}^2 \neq 0, \quad B = \sum_{j=1}^n x_{mj}x_{kj}, \quad C = \sum_{j=1}^n x_{nj}x_{kj},$$

в таком случае

$$\gamma_{mi} = x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj}x_{kj} = x_{mj} - \frac{B}{A}x_{ki}, \quad \gamma_{ni} = x_{ni} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{nj}x_{kj} = x_{nj} - \frac{C}{A}x_{ki}.$$

Для $E = \sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2$, $D = \sum_{j=1}^n \gamma_{nj}\gamma_{mj}$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \gamma_{ni} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{nj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2} = \gamma_{ni} - \frac{D}{E}\gamma_{mi} = \\ &= \left(x_{ni} - \frac{C}{A}x_{ki} \right) - \frac{D}{E} \left(x_{mi} - \frac{B}{A}x_{ki} \right) = x_{ni} - \frac{D}{E}x_{mi} + \frac{B-C}{A}x_{ki} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ki} &= \frac{A}{C-B}x_{ni} - \frac{A}{C-B} \frac{D}{E}x_{mi}, \quad x_{ni} = \frac{D}{E}x_{mi} - \frac{B-C}{A}x_{ki}, \\ P_i &= (x_{mi}, x_{ni}, x_{ki}) = \left(x_{mi}, \frac{D}{E}x_{mi} - \frac{B-C}{A}x_{ki}, x_{ki} \right), \\ \overline{OP}_i &= \left(x_{mi}, \frac{D}{E}x_{mi} - \frac{B-C}{A}x_{ki}, x_{ki} \right) = \left(x_{mi}, \frac{D}{E}x_{mi}, 0 \right) + \left(0, \frac{C-B}{A}x_{ki}, x_{ki} \right) = \\ &= x_{mi} \left(1, \frac{D}{E}, 0 \right) + x_{ki} \left(0, \frac{C-B}{A}, 1 \right) = x_{mi}\bar{v}_1 + x_{ki}\bar{v}_2, \quad \bar{v}_1 \nparallel \bar{v}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, все \overline{OP}_i лежат в плоскости $(O, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Далее применим рассуждения из п. 2.3.

Если $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \neq 0$, то

$$a_{1m} = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj}\gamma_{mj} - a_{1l} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj}\gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad a_{1l} = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k\psi_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2}, \quad a_{1k} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - a_{1m}x_{mi} - a_{1l}x_{ni})x_{ki}}{\sum_{i=1}^n x_{ki}^2},$$

где

$$\gamma_{mi} = x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj}, \quad \gamma_{li} = x_{li} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{lj} x_{kj}, \quad \gamma_{ki} = y_{1i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{1j} x_{kj},$$

$$\varphi_i = \gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad \psi_i = \gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}.$$

Для второй строки:

$$a_{2m} = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \gamma_{mj} - a_{2n} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad a_{2l} = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k \psi_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2},$$

$$a_{2k} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{2i} - a_{2m} x_{mi} - a_{2l} x_{li}) x_{ki}}{\sum_{i=1}^n x_{ki}^2},$$

где

$$\gamma_{mi} = x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj}, \quad \gamma_{li} = x_{li} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{lj} x_{kj},$$

$$\gamma_{ki} = y_{2i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{2j} x_{kj},$$

$$\varphi_i = \gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad \psi_i = \gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}.$$

Для третьей строки:

$$a_{3m} = \frac{\sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \gamma_{mj} - a_{3l} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad a_{3l} = \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k \psi_k}{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2}, \quad a_{3k} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{3i} - a_{3m} x_{mi} - a_{3l} x_{li}) x_{ki}}{\sum_{i=1}^n x_{ki}^2},$$

где

$$\gamma_{mi} = x_{mi} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{mj} x_{kj}, \quad \gamma_{li} = x_{li} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n x_{lj} x_{kj},$$

$$\gamma_{ki} = y_{3i} - \frac{x_{ki}}{\sum_{j=1}^n x_{kj}^2} \sum_{j=1}^n y_{3j} x_{kj},$$

$$\varphi_i = \gamma_{li} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}, \quad \psi_i = \gamma_{ki} - \frac{\gamma_{mi} \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \gamma_{mj}}{\sum_{j=1}^n \gamma_{mj}^2}.$$

Вернёмся к исходной системе координат и вычислим компоненты вектора t , используя найденную матрицу A , по формулам (1) и (2).

3. Компьютерное моделирование

Пусть облако X состоит из 10 000 точек. Координаты x и y точек случайно выбраны (с помощью равномерного распределения). Координаты относительно оси Oz вычисляются по формуле $z = x^2 - y^2$. Облако Y получено из облака X с помощью геометрического преобразования $Y = R * X + t$, где R и t описаны ниже:

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.866025 \\ 0.433013 & 0.866025 & -0.25 \\ -0.75 & 0.5 & 0.433013 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 показано исходное взаимное расположение облаков X и Y . Здесь и далее облако X светлое, а облако Y — тёмное. Результатом работы алгоритма является

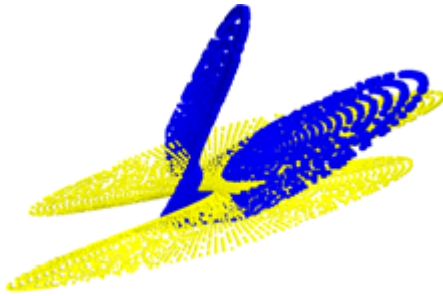


Рис. 1. Исходное расположение облаков

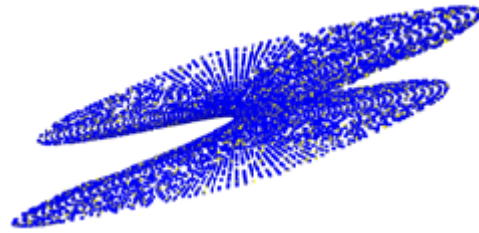


Рис. 2. Результат работы алгоритма

следующие матрица поворота и вектор параллельного переноса:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.74302e - 08 & 0.866025 \\ 0.433012 & 0.866025 & -0.25 \\ -0.75 & 0.5 & 0.433012 \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Рис. 2 показывает взаимное расположение облаков X и Y , полученных в результате применения алгоритма.

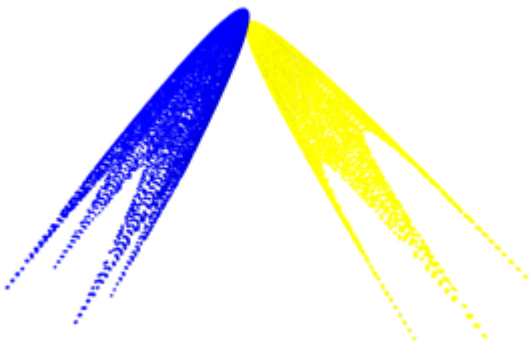


Рис. 3. Исходное расположение облаков

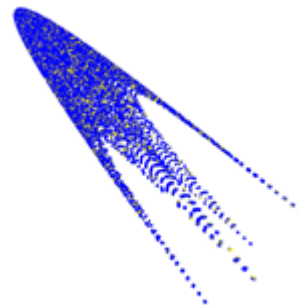


Рис. 4. Результат работы алгоритма

На рис. 3 изображено исходное взаимное расположение ещё одной пары облаков X и Y . С помощью алгоритма получают следующие матрица поворота и вектор

параллельного переноса:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.223e-08 & 0.866025 \\ 0.433013 & 0.866025 & -0.25 \\ -0.75 & 0.5 & 0.433012 \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4 показывает результат работы алгоритма в данном случае.

Список литературы

1. **Chen, Y.** Object modeling by registration of multiple range images / Y. Chen, G. Medioni // Image and Vision Computing. — 1992. — Vol. 10, no. 3. — P. 145–155.
2. **Besl, P.** A method for registration of 3-D shapes / P. Besl, N. McKay // IEEE Transactions of Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1992. — Vol. 14, no. 2. — P. 239–256.
3. **Turk, G.** Zippered polygon meshes from range images / G. Turk, M. Levoy // Computer Graphics Proceedings. Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH. — 1994. — P. 311–318.
4. **Horn, B.** Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions / B. Horn // Journal of the Optical Society of America. Series A. — 1987. — Vol. 4, no. 4. — P. 629–642.
5. **Horn, B.** Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices / B. Horn, H. Hilden, S. Negahdaripour // Journal of the Optical Society of America. Series A. — 1988. — Vol. 5, no. 7. — P. 1127–1135.
6. **Du, S.** An extension of the ICP algorithm considering scale factor / S. Du, N. Zheng, S. Ying, Q. You, Y. Wu // Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Image Processing. — 2007. — P. 193–196.
7. **Du, S.** Affine registration of point sets using ICP and ICA / S. Du, N. Zheng, G. Meng, Z. Yuan // IEEE Signal Processing Letters. — 2008. — Vol. 15. — P. 689–692.
8. **Du, S.** Affine iterative closest point algorithm for point set registration / S. Du, N. Zheng, S. Ying, J. Liu // Pattern Recognition Letters. — 2010. — Vol. 31. — P. 791–799.
9. **Rusinkiewicz, S.** Efficient variants of the ICP algorithm / S. Rusinkiewicz, M. Levoy // Proceedings of the International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling. — 2001. — P. 145–152.
10. **Tihonkih, D.** A modified iterative closest point algorithm for shape registration / D. Tihonkih, A. Makovetskii, V. Kuznetsov // Proceedings SPIE Applications of Digital Image Processing XXXIX. — 2016. — Vol. 9971. — 99712D.

Поступила в редакцию 28.09.2017

После переработки 16.10.2017

Сведения об авторах

Маковецкий Артём Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: artemmac@csu.ru.

Воронин Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: voron@csu.ru.

Тихоньких Дмитрий Вадимович, ассистент кафедры вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: sparsemind@gmail.com.

Алексеев Михаил Николаевич, кандидат педагогических наук, доцент кафедры вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: alexeev@csu.ru.

CLOSED FORM SOLUTION OF ICP ERROR MINIMIZATION PROBLEM FOR AFFINE TRANSFORMATIONS

A.Yu. Makovetskii^a, S.M. Voronin^b, D.V. Tihonkih^c, M.N. Alekseev^d

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

^aartemmac@csu.ru, ^bvoron@csu.ru, ^csparsemind@gmail.com, ^dalekseev@csu.ru

The iterative closest point (ICP) algorithm is one of the most popular approaches to shape registration. The aim of the algorithm is to calculate the optimal geometric transformation relative to the given metric, combining the two given clouds. An important step in the ICP algorithm is the solution of the problem of minimizing the functional corresponding to a given metric for a given class of geometric transformations. In this paper, a method is presented for solving the variational problem of the ICP algorithm for the point-to-point metric in the class of affine transformations. With the help of computer simulation, the correctness of the proposed method is demonstrated.

Keywords: *3D reconstruction, registration of point clouds, localization, affine transformation*

References

1. **Chen Y., Medioni G.** Object modeling by registration of multiple range images. *Image and Vision Computing*, 1992, vol. 10, no. 3, pp. 145–155.
2. **Besl P., McKay N.** A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions of Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, vol. 14, no. 2, pp. 239–256.
3. **Turk G., Levoy M.** Zippered polygon meshes from range images. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH*, 1994, pp. 311–318.
4. **Horn B.** Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of the Optical Society of America. Series A*, 1987, vol. 4, no. 4, pp. 629–642.
5. **Horn B., Hilden H., Negahdaripour S.** Closed-form solution of absolute orientation using orthonormal matrices. *Journal of the Optical Society of America. Series A*, 1988, vol. 5, no. 7, pp. 1127–1135.
6. **Du S., Zheng N., Ying S., You Q., Wu Y.** An extension of the ICP algorithm considering scale factor. *Proceedings of 14th IEEE International Conference on Image Processing*, 2007, pp. 193–196.
7. **Du S., Zheng N., Meng G., Yuan Z.** Affine registration of point sets using ICP and ICA. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, vol. 15, pp. 689–692.
8. **Du S., Zheng N., Ying S., Liu J.** Affine iterative closest point algorithm for point set registration. *Pattern Recognition Letters*, 2010, vol. 31, pp. 791–799.
9. **Rusinkiewicz S., Levoy M.** Efficient variants of the ICP algorithm. *Proceedings of the International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, 2001, pp. 145–152.
10. **Tihonkih D., Makovetskii A., Kuznetsov V.** A modified iterative closest point algorithm for shape registration. *Proceedings SPIE Applications of Digital Image Processing XXXIX*, 2016, vol. 9971, 99712D.

Accepted article received 28.09.2017

Corrections received 16.10.2017