

УДК 517.955.8

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА ДВУХ МАЛЫХ УЧАСТКАХ

А. А. Ершов<sup>1,2,a</sup>, М. И. Русанова<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН,  
Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

<sup>a</sup>ale10919@yandex.ru, <sup>b</sup>rusanova\_mary94@mail.ru

Рассматривается гармоническая функция в трёхмерной ограниченной области. Почти на всей границе задана нормальная производная кроме двух малых участков, на которых задается значение самой функции. Для такой гармонической функции методом согласования асимптотических разложений построена и обоснована двухмасштабная асимптотика по малому параметру, характеризующему размер этих малых участков. Приведено физическое приложение полученного разложения.

**Ключевые слова:** краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, смешанная задача, малый параметр, метод согласования, электрическое сопротивление.

## Введение

Смешанная задача для уравнения Лапласа в случае, когда значения искомого решения заданы на одном малом участке границы, а на остальной части границы задано значение нормальной производной, рассматривалась в работах [1; 2]. В них была изучена и более сложная задача исследования собственных функций и собственных значений такой задачи для оператора Лапласа. При наличии нескольких участков смены граничных условий асимптотическое поведение решения усложняется по сравнению со случаем одного участка. В статье [3] была построена асимптотика решения в двумерной области в случае двух участков смены граничных условий. Настоящая работа посвящена исследованию трёхмерного случая.

Отметим, что частный случай нулевых граничных условий почти на всей границе был рассмотрен в работе [4]. В данной работе изучены более общие краевые условия, при которых асимптотическое разложение решения усложняется. В данной работе оно начинается с отрицательной степени малого параметра, в то время как в [4] оно начиналось с нулевой степени.

## 1. Постановка задачи

В ограниченной односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с гладкой границей  $\partial\Omega$  задано уравнение Лапласа  $\Delta u(x, \varepsilon) = 0$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ,  $\varepsilon$  —

малый положительный параметр. Почти на всей границе задано второе краевое условие на функцию  $u(x, \varepsilon)$ , а на участках  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$  задано первое краевое условие. Будем считать, что линейный размер участков  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$  порядка  $\varepsilon$ . Задача состоит в нахождении асимптотики решения  $u(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Мы рассмотрим случай, когда участки  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$  лежат на некоторых конечных плоских участках  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 1).

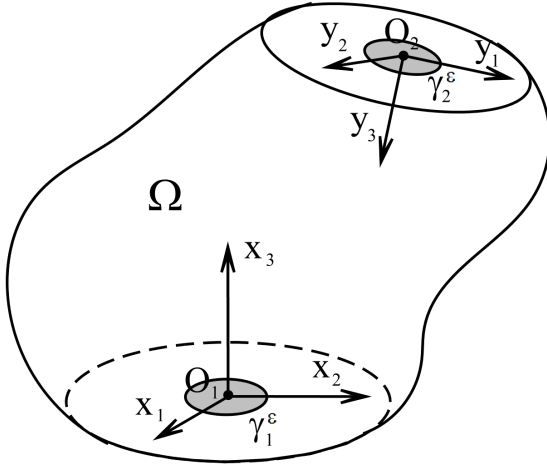


Рис. 1

соответственно,  $\partial\gamma_1, \partial\gamma_2 \in C^\infty$ . Тогда  $\gamma_1^\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \gamma_1\}$ ,  $\gamma_2^\varepsilon = \{y : \varepsilon^{-1}y \in \gamma_2\}$ .

Таким образом, задача имеет вид

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x) \text{ на границе } \partial\Omega \setminus \{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}, \tag{2}$$

$$u(x_1, x_2, 0, \varepsilon) = \varphi_1\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \text{ при } x \in \gamma_1^\varepsilon, \tag{3}$$

$$u(x(y_1, y_2, 0), \varepsilon) = \varphi_2\left(\frac{y_1}{\varepsilon}, \frac{y_2}{\varepsilon}\right) \text{ при } y \in \gamma_2^\varepsilon, \tag{4}$$

где  $n$  — внешняя нормаль к  $\Omega$ ,  $\psi \in C^\infty(\partial\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in C(\gamma_1)$ ,  $\varphi_2 \in C(\gamma_2)$ .

Заметим, что решение  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  такой задачи существует и единственно [5, с. 86, утв. 22.1; 6].

## 2. Построение асимптотики

Будем искать асимптотику решения  $u(x, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  методом согласования внешнего и внутреннего асимптотических разложений [7]. Как выяснится в дальнейшем, правильный вид внешнего разложения следующий:

$$U = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon). \tag{5}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1) и граничные условия (2), (3) и (4), приходим к выводу, что  $u_0(x)$  — решение предельной задачи, которую определим следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = \psi(x) \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{O_1 \cup O_2\}. \end{cases} \tag{6}$$

Для остальных коэффициентов  $u_k(x)$  естественными являются следующие постановки задач:

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 \text{ при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{O_1 \cup O_2\}, \end{cases} \quad k = -1, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Однако задача для  $u_0(x)$ , вообще говоря, не имеет гладкого решения в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ , а решения задач для остальных коэффициентов  $u_k(x)$  не единственны. Поэтому для исследования правильного поведения всех функций  $u_k$  необходимо вблизи точек  $x = 0$  и  $y = 0$  построить внутренние разложения и провести согласование всех рядов. Внутреннее разложение вблизи участка  $\gamma_1^\varepsilon$  будет рассматриваться в переменных  $\xi_1 = x_1/\varepsilon$ ,  $\xi_2 = x_2/\varepsilon$  и  $\xi_3 = x_3/\varepsilon$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  а вблизи участка  $\gamma_2^\varepsilon$  — в переменных  $\eta_1 = y_1/\varepsilon$ ,  $\eta_2 = y_2/\varepsilon$  и  $\eta_3 = y_3/\varepsilon$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ .

Внутреннее разложение около точки  $x = 0$  будем искать в виде

$$V(\xi, \varepsilon) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi), \quad (8)$$

а около точки  $y = 0$  — в виде

$$W(\eta, \varepsilon) = \sum_{j=-1}^{\infty} \varepsilon^j w_j(\eta). \quad (9)$$

Функции  $v_j$ ,  $w_j$  будем считать определёнными в верхних полупространствах, заданных неравенствами  $\xi_3 \geq 0$  и  $\eta_3 \geq 0$  соответственно. В новых переменных участки  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$  перейдут в  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

В соответствии с методом согласования краевые задачи для коэффициентов внутреннего разложения можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta v_{-1} = 0 \text{ при } \xi_3 > 0, \\ v_{-1}(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \gamma_1, \\ \frac{\partial v_{-1}}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Delta v_0 = 0 \text{ при } \xi_3 > 0, \\ v_0(\xi) = \varphi_1(\xi) \text{ при } \xi \in \gamma_1, \\ \frac{\partial v_0}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_1, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 \text{ при } \xi_3 > 0, \\ v_k(\xi) = 0 \text{ при } \xi \in \gamma_1, \\ \frac{\partial v_k}{\partial \xi_3} = \frac{\partial}{\partial \xi_3} \sum_{j=1}^k X_{j,k-j}(\xi) \text{ при } \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_1, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta w_{-1} = 0 \text{ при } \eta_3 > 0, \\ w_{-1}(\eta) = 0 \text{ при } \eta \in \gamma_2, \\ \frac{\partial w_{-1}}{\partial \eta_3} = 0 \text{ при } \eta_3 = 0, \eta \notin \gamma_2, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Delta w_0 = 0 \text{ при } \eta_3 > 0, \\ w_0(\eta) = \varphi_2(\eta) \text{ при } \eta \in \gamma_2, \\ \frac{\partial w_0}{\partial \eta_3} = 0 \text{ при } \eta_3 = 0, \eta \notin \gamma_2, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0 \text{ при } \eta_3 > 0, \\ w_k(\eta) = 0 \text{ при } \eta \in \gamma_2, \\ \frac{\partial w_k}{\partial \eta_3} = \frac{\partial}{\partial \eta_3} \sum_{j=1}^k Y_{j,k-j}(\eta) \text{ при } \eta_3 = 0, \eta \notin \gamma_2. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь и всюду далее посредством  $X_k, Y_k, P_k, F_k$  будем обозначать однородные гармонические полиномы степени  $k$ . Полиномы  $X_{j,k-j}(\xi)$  и  $Y_{j,k-j}(\eta)$  степени  $j$  в задачах (12) и (15) мы определим позднее. Для того чтобы решения задач (11)–(15) были единственны в классе функций из  $C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , необходимо задать ещё поведение на бесконечности функций  $v_k(\xi)$  и  $w_k(\eta)$ . Его мы определим с помощью так называемых условий согласования [7, с. 19].

Введём обозначения  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ ,  $\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}$ . Верхнее полупространство  $\{\xi : \xi_3 > 0\}$  (для любых систем координат) обозначим через  $\mathbb{R}_+^3$ .

Из [3, лемма 3] следует существование решений  $E_1, E_2 \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^3 \setminus \partial\gamma) \cap C(\bar{\mathbb{R}}_+^3)$  краевых задач

$$\begin{cases} \Delta E_1 = 0 \text{ при } \xi \in \mathbb{R}_+^3, \\ E_1(\xi) = 1 \text{ при } \xi \in \bar{\gamma}_1, \\ \frac{\partial E_1}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_1, \\ E_1(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta E_2 = 0 \text{ при } \eta \in \mathbb{R}_+^3, \\ E_2(\eta) = 1 \text{ при } \eta \in \bar{\gamma}_2, \\ \frac{\partial E_2}{\partial \eta_3} = 0 \text{ при } \eta_3 = 0, \eta \notin \gamma_2, \\ E_2(\eta) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Данные функции имеют асимптотические разложения вида

$$E_1(\xi) = \frac{C_{\gamma_1}}{\rho_1} + \dots \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty, \quad E_2(\eta) = \frac{C_{\gamma_2}}{\rho_2} + \dots \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты  $C_{\gamma_1} > 0$  и  $C_{\gamma_2} > 0$  называются ёмкостями дисков  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (см., например, [8, гл. 2, § 1; 9, гл. 2, § 3]). Известно (см., например, [10, гл. 1, § 4]), что, если  $\gamma_1$  — единичный круг, то

$$E_1(\xi) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2}{\rho_1^2 - 1 + ((\rho_1^2 - 1)^2 + 4\xi_3^2)^{1/2}} \right]^{1/2}, \quad C_{\gamma_1} = \frac{2}{\pi},$$

а если  $\gamma_1$  — эллипс с осями  $a$  и  $b$  вдоль координатных осей  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответственно, то

$$E_1(\xi) = \frac{a}{2K(c/a)} \int_{h(\xi)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t+a^2)(t+b^2)t}}, \quad C_{\gamma_1} = \frac{a}{K(c/a)},$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 t}}$  — полный эллиптический интеграл I рода,  $h(\xi)$  — наибольший действительный корень кубического уравнения

$$\frac{\xi_1^2}{a^2 + h} + \frac{\xi_2^2}{b^2 + h} + \frac{\xi_3^2}{h} = 1.$$

Перейдём к непосредственному построению асимптотических разложений (5), (8) и (9). За цепочкой определения функций  $u_k(x)$ ,  $v_k(\xi)$  и  $w_k(\eta)$  удобно следить по табл. 1 согласования рядов  $U$  и  $V$  и табл. 2 согласования рядов  $U$  и  $W$ .

Таблица 1

$U \setminus V$	$\varepsilon^{-1}v_{-1}(\xi)$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	...
$\varepsilon^{-1}u_{-1}(x)$	$\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_{-1}$	0	0	0	...
	$\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_{-1}$	0	0	0	
$u_0(x)$	$\varepsilon^{-1}C_0\rho_1^{-1}$	$\mathcal{A}_0$	$\varepsilon X_{1,0}(\xi)$	$\varepsilon^2 X_{2,0}(\xi)$	...
	$C_0 r_1^{-1}$	$\mathcal{A}_0$	$X_{1,0}(x)$	$X_{2,0}(x)$	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^{-1}P_{1,1}(\xi)\rho_1^{-3}$	$C_1\rho_1^{-1}$	$\varepsilon\mathcal{A}_1$	$\varepsilon^2 X_{1,1}(\xi)$	...
	$\varepsilon P_{1,1}(x)r_1^{-3}$	$\varepsilon C_1 r_1^{-1}$	$\varepsilon\mathcal{A}_1$	$\varepsilon X_{1,1}(x)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^{-1}P_{2,2}(\xi)\rho_1^{-5}$	$P_{1,2}(\xi)\rho_1^{-3}$	$\varepsilon C_2\rho_1^{-1}$	$\varepsilon^2\mathcal{A}_2$	...
	$\varepsilon^2 P_{2,2}(x)r_1^{-5}$	$\varepsilon^2 P_{1,2}(x)r_1^{-3}$	$\varepsilon^2 C_2 r_1^{-1}$	$\varepsilon^2\mathcal{A}_2$	
...	...	...	...	...	...

Таблица 2

$U \setminus W$	$\varepsilon^{-1}w_{-1}(\eta)$	$w_0(\eta)$	$\varepsilon w_1(\eta)$	$\varepsilon^2 w_2(\eta)$	...
$\varepsilon^{-1}u_{-1}(x(y))$	$\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_{-1}$	0	0	0	...
	$\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_{-1}$	0	0	0	
$u_0(x(y))$	$\varepsilon^{-1}D_0\rho_2^{-1}$	$\mathcal{B}_0$	$\varepsilon Y_{1,0}(\eta)$	$\varepsilon^2 Y_{2,0}(\eta)$	...
	$D_0 r_2^{-1}$	$\mathcal{B}_0$	$Y_{1,0}(y)$	$Y_{2,0}(y)$	
$\varepsilon u_1(x(y))$	$\varepsilon^{-1}F_{1,1}(\eta)\rho_2^{-3}$	$D_0\rho_2^{-1}$	$\varepsilon\mathcal{B}_1$	$\varepsilon^2 Y_{1,2}(\eta)$	...
	$\varepsilon F_{1,1}(y)r_2^{-3}$	$\varepsilon D_1 r_2^{-1}$	$\varepsilon\mathcal{B}_1$	$\varepsilon Y_{1,1}(y)$	
$\varepsilon^2 u_2(x(y))$	$\varepsilon^{-1}F_{2,2}(\eta)\rho_2^{-5}$	$F_{1,2}(\eta)\rho_2^{-3}$	$\varepsilon D_1\rho_2^{-1}$	$\varepsilon^2\mathcal{B}_2$	...
	$\varepsilon^2 F_{2,2}(y)r_2^{-5}$	$\varepsilon^2 F_{1,2}(y)r_2^{-3}$	$\varepsilon^2 D_2 r_2^{-1}$	$\varepsilon^2\mathcal{B}_2$	
...	...	...	...	...	...

Табл. 1 устроена стандартным образом [7]. В каждой строке, начинающейся с  $\varepsilon^k u_k(x)$ , стоят члены асимптотического разложения этой функции при  $x \rightarrow 0$ . В верхней строке таблицы выписаны члены ряда внутреннего разложения (8). В каждом столбце в верхней части каждой ячейки помещены члены асимптотического разложения соответствующей функции при  $\xi \rightarrow \infty$ . Согласование асимптотических разложений состоит в том, что внутри каждой ячейки таблицы, которая ограничена двойными линиями, функция, стоящая в верхней части ячейки, равна функции, стоящей в нижней части ячейки. Табл. 2 для согласования рядов  $U$  и  $W$  устроена аналогичным образом.

По некоторой аналогии с [3] в качестве решения задачи (7) при  $k = -1$  возьмём  $u_{-1}(x) \equiv \mathcal{A}_{-1}$ , где  $\mathcal{A}_{-1}$  — пока неизвестная постоянная. Тогда в соответствии с методом согласования получаем следующие условия:

$$v_{-1}(\xi) \rightarrow \mathcal{A}_{-1}, \quad \rho_1 \rightarrow \infty; \quad w_{-1}(\eta) \rightarrow \mathcal{A}_{-1}, \quad \rho_2 \rightarrow \infty.$$

Этим условиям и условиям задач (10) и (13) удовлетворяют следующие функции:

$$v_{-1}(\xi) = \mathcal{A}_{-1}(1 - E_1(\xi)), \quad w_{-1}(\eta) = \mathcal{A}_{-1}(1 - E_2(\eta)).$$

Данные функции имеют следующие асимптотические разложения:

$$v_{-1}(\xi) = \mathcal{A}_{-1} - \mathcal{A}_{-1} \frac{C_{\gamma_1}}{\rho_1} + \frac{P_{1,1}(\xi)}{\rho_1^3} + \dots, \quad w_{-1}(\eta) = \mathcal{A}_{-1} - \mathcal{A}_{-1} \frac{C_{\gamma_2}}{\rho_2} + \frac{F_{1,1}(\eta)}{\rho_2^3} + \dots$$

Отметим, что здесь полиномы  $P_{1,1}(\xi)$  и  $F_{1,1}(\eta)$  не являются окончательно определёнными, пока мы не установим значение постоянной  $\mathcal{A}_{-1}$ . Переписывая эти асимптотики в переменных  $x = \varepsilon\xi$  и  $y = \varepsilon\eta$ , получаем вид главных членов особенностей коэффициентов внешнего асимптотического разложения, в частности:

$$u_0(x) = -\mathcal{A}_{-1} \frac{C_{\gamma_1}}{r_1} - \mathcal{A}_{-1} \frac{C_{\gamma_2}}{r_2} + \dots, \quad u_1(x) = \frac{P_{1,1}(x)}{r_1^3} + \frac{F_{1,1}(y(x))}{r_2^3} + \dots$$

Будем искать функцию  $u_0(x)$  в виде

$$u_0(x) = -\mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_1}r_1^{-1} - \mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_2}r_2^{-1} + \tilde{u}_0(x) + H_0,$$

где функция  $\tilde{u}_0(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_0 = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial n} = \psi(x) + \mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_1} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial n} + \mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_2} \frac{\partial r_2^{-1}}{\partial n} \text{ на } \partial\Omega \setminus \{O_1 \cup O_2\}, \\ \tilde{u}_0(O_1) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

постоянная  $H_0$  пока не определена.

Условием разрешимости задачи (16) в классе функций из  $C^\infty(\bar{\Omega})$  является равенство

$$\int_{\partial\Omega} \left( \psi(x) + \mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_1} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial n} + \mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_2} \frac{\partial r_2^{-1}}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (17)$$

Известно (см., например, [11, гл. 6, § 7]), что

$$\int_{\partial\Omega \setminus O_1} \frac{\partial r_1^{-1}}{\partial n} dS = -2\pi.$$

Отсюда и из равенства (17) следует, что

$$\mathcal{A}_{-1} = \frac{1}{2\pi(C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2})} \int_{\partial\Omega} \psi(x) dS. \quad (18)$$

Тем самым мы окончательно определили функции  $v_{-1}(\xi)$ ,  $w_{-1}(\eta)$  и соответствующие столбцы в табл. 1 и 2. В частности, определены постоянные

$$C_0 = -\mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_1} = -\frac{C_{\gamma_1}}{2\pi(C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2})} \int_{\partial\Omega} \psi(x) dS,$$

$$D_0 = -\mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_2} = -\frac{C_{\gamma_2}}{2\pi(C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2})} \int_{\partial\Omega} \psi(x) dS,$$

стоящие на пересечении второй строки и первого столбца табл. 1 и 2.

Для определения асимптотики функций  $v_0(\xi)$  и  $w_0(\eta)$  на бесконечности выпишем асимптотические разложения функции  $u_0(x) = C_0r_1^{-1} + D_0r_2^{-1} + \tilde{u}_0(x) + H_0$ , а затем перепишем их во внутренних координатах:

$$u_0(x) = \frac{C_0}{r_1} + \frac{D_0}{|O_1O_2|} + H_0 + X_{1,0}(x) + X_{2,0}(x) + \dots \text{ при } r_1 \rightarrow 0,$$

$$u_0(x(y)) = \frac{D_0}{r_2} + \frac{C_0}{|O_1O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0 + Y_{1,0}(y) + Y_{2,0}(y) + \dots \text{ при } r_2 \rightarrow 0,$$

$$u_0(\varepsilon\xi) = \frac{C_0}{\varepsilon\rho_1} + \frac{D_0}{|O_1O_2|} + H_0 + \varepsilon X_{1,0}(\xi) + \varepsilon^2 X_{2,0}(\xi) + \dots,$$

$$u_0(x(\varepsilon\eta)) = \frac{D_0}{\varepsilon\rho_2} + \frac{C_0}{|O_1O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0 + \varepsilon Y_{1,0}(\eta) + \varepsilon^2 Y_{2,0}(\eta) + \dots$$

Отсюда следует, что

$$v_0(\xi) \rightarrow \frac{D_0}{|O_1 O_2|} + H_0 \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty,$$

$$w_0(\eta) \rightarrow \frac{C_0}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0 \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty.$$

Этим условиям и условиям задач (11), (14) удовлетворяют следующие функции:

$$v_0(\xi) = \mathcal{A}_0(1 - E_1(\xi)) + \tilde{v}_0(\xi),$$

$$w_0(\eta) = \mathcal{B}_0(1 - E_2(\eta)) + \tilde{w}_0(\eta),$$

где постоянные

$$\mathcal{A}_0 = \frac{D_0}{|O_1 O_2|} + H_0, \quad \mathcal{B}_0 = \frac{C_0}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0, \quad (19)$$

функции  $\tilde{v}_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3} \setminus \gamma_1) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  и  $\tilde{w}_0 \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^3} \setminus \gamma_2) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^3})$  являются решениями задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{v}_0 = 0 \text{ при } \xi_3 > 0, \\ \tilde{v}_0 = \varphi_1(\xi) \text{ при } \xi \in \gamma_1, \\ \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \xi_3} = 0 \text{ при } \xi_3 = 0, \xi \notin \gamma_1, \\ \tilde{v}_0(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{w}_0 = 0 \text{ при } \eta_3 > 0, \\ \tilde{w}_0 = \varphi_2(\eta) \text{ при } \eta \in \gamma_2, \\ \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \eta_3} = 0 \text{ при } \eta_3 = 0, \eta \notin \gamma_2, \\ \tilde{w}_0(\eta) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

В соответствии с [3, лемма 3] функции  $\tilde{v}_0(\xi)$  и  $\tilde{w}_0(\eta)$  имеют следующие асимптотические разложения:

$$\tilde{v}_0(\xi) = \frac{\tilde{C}_0}{\rho_1} + \dots \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty, \quad \tilde{w}_0(\eta) = \frac{\tilde{D}_0}{\rho_2} + \dots \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty,$$

где  $\tilde{C}_0$  и  $\tilde{D}_0$  — некоторые постоянные, значения которых мы будем использовать в дальнейшем.

Из разложений

$$v_0(\xi) = \mathcal{A}_0 + (\tilde{C}_0 - \mathcal{A}_0 C_{\gamma_1}) \rho_1^{-1} + \dots, \quad w_0(\eta) = \mathcal{B}_0 + (\tilde{D}_0 - \mathcal{B}_0 C_{\gamma_2}) \rho_2^{-1} + \dots,$$

заполняющих вторые столбцы табл. 1 и 2, получаем соотношения

$$C_1 = \tilde{C}_0 - \mathcal{A}_0 C_{\gamma_1} = \tilde{C}_0 - \left( \frac{D_0}{|O_1 O_2|} + H_0 \right) C_{\gamma_1},$$

$$D_1 = \tilde{D}_0 - \mathcal{B}_0 C_{\gamma_2} = \tilde{D}_0 - \left( \frac{C_0}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0 \right) C_{\gamma_2}.$$

С другой стороны, условием разрешимости задачи (7) при  $k = 1$  является равенство  $C_1 + D_1 = 0$ . Отсюда, получаем уравнение

$$\tilde{C}_0 - \left( \frac{D_0}{|O_1 O_2|} + H_0 \right) C_{\gamma_1} + \tilde{D}_0 - \left( \frac{C_0}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_0(O_2) + H_0 \right) C_{\gamma_2} = 0,$$

из которого находим

$$H_0 = \frac{1}{C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2}} \left( \tilde{C}_0 + \tilde{D}_0 - \frac{D_0 C_{\gamma_1} + C_0 C_{\gamma_2}}{|O_1 O_2|} - \tilde{u}_0(O_2) C_{\gamma_2} \right).$$

Тем самым мы окончательно определяем функцию  $u_0(x)$  и вторые строки таблиц. Кроме того, подставляя это выражение в (19), мы находим постоянные  $\mathcal{A}_0$  и  $\mathcal{B}_0$  и тем самым окончательно определяем функции  $v_0(\xi)$  и  $w_0(\eta)$ , разложениями которых заполняются вторые столбцы табл. 1 и 2.

Перейдём к заполнению третьей строки и столбца для табл. 1 и 2. Учитывая вид третьей строки табл. 1 и 2, будем искать функцию  $u_1(x)$  в следующем виде:

$$u_1(x) = \frac{P_{1,1}(x)}{r_1^3} + \frac{C_1}{r_1} + \frac{F_{1,1}(y(x))}{r_2^3} + \frac{D_1}{r_2} + \tilde{u}_1(x) + H_1,$$

где  $\tilde{u}_1(x)$  является решением из  $C^\infty(\bar{\Omega})$  краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_1 = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{P_{1,1}(x)}{r_1^3} + \frac{C_1}{r_1} + \frac{F_{1,1}(y(x))}{r_2^3} + \frac{D_1}{r_2} \right) \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{O_1 \cup O_2\}, \\ \tilde{u}_1(O_1) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Отметим, что в силу [3, лемма 1] все полиномы  $P_{j,k}(x_1, x_2, x_3)$  и  $F_{j,k}(y_1, y_2, y_3)$  являются чётными относительно третьей переменной. Отсюда следует, что краевые условия задачи (20) гладкие в том смысле, что имеют лишь устранимые особенности в точках  $O_1$  и  $O_2$ .

Функция  $u_1(x)$  имеет следующие асимптотические разложения:

$$u_1(x) = \frac{P_{1,1}(x)}{r_1^3} + \frac{C_1}{r_1} + \frac{F_{1,1}(O_1)}{|O_1O_2|^3} + \frac{D_1}{|O_1O_2|} + H_1 + X_{1,1}(x) + \dots \text{ при } r_1 \rightarrow 0,$$

$$u_1(x) = \frac{F_{1,1}(y(x))}{r_2^3} + \frac{D_1}{r_2} + \frac{P_{1,1}(O_2)}{|O_1O_2|^3} + \frac{C_1}{|O_1O_2|} + \tilde{u}_1(O_2) + H_1 + Y_{1,1}(y) + \dots \text{ при } r_2 \rightarrow 0.$$

Сопоставляя их с третьими строками табл. 1 и 2, получаем соотношения

$$\mathcal{A}_1 = \frac{F_{1,1}(O_1)}{|O_1O_2|^3} + \frac{D_1}{|O_1O_2|} + H_1, \quad \mathcal{B}_1 = \frac{P_{1,1}(O_2)}{|O_1O_2|^3} + \frac{C_1}{|O_1O_2|} + \tilde{u}_1(O_2) + H_1. \quad (21)$$

Согласно таблицам согласования функции  $v_1(\xi)$ ,  $w_1(\eta)$  имеют на бесконечности асимптотики следующего вида:

$$v_1(\xi) = X_{1,0}(\xi) + \mathcal{A}_1 + \frac{C_2}{\rho_1} + \dots \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$$w_1(\eta) = Y_{1,0}(\eta) + \mathcal{B}_1 + \frac{D_2}{\rho_2} + \dots \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Этим условиям и условиям (12) удовлетворяют функции

$$v_1(\xi) = X_{1,1}(\xi) + \mathcal{A}_1(1 - E_1(\xi)), \quad w_1(\eta) = Y_{1,1}(\eta) + \mathcal{B}_1(1 - E_2(\eta)).$$

Используя эти выражения, можно получить асимптотики

$$v_1(\xi) = X_{1,1}(\xi) + \mathcal{A}_1 - \frac{\mathcal{A}_1 C_{\gamma_1}}{\rho_1} + \dots \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty,$$

$$w_1(\eta) = Y_{1,1}(\eta) + \mathcal{B}_1 - \frac{\mathcal{B}_1 C_{\gamma_2}}{\rho_2} + \dots \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty.$$



Сопоставив их с разложениями (22) и (23), получим соотношения

$$C_2 = -\mathcal{A}_1 C_{\gamma_1} = -\left(\frac{F_{1,1}(O_1)}{|O_1 O_2|^3} + \frac{D_1}{|O_1 O_2|} + H_1\right) C_{\gamma_1}, \quad (24)$$

$$D_2 = -\mathcal{B}_1 C_{\gamma_2} = -\left(\frac{P_{1,1}(O_2)}{|O_1 O_2|^3} + \frac{C_1}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_1(O_2) + H_1\right) C_{\gamma_2}. \quad (25)$$

С другой стороны, условием разрешимости задачи (7) при  $k = 2$  является равенство  $C_2 + D_2 = 0$ , с помощью которого и выражений (24) и (25) можно найти постоянную

$$H_1 = -\frac{1}{C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2}} \left( C_{\gamma_1} \left( \frac{F_{1,1}(O_1)}{|O_1 O_2|^3} + \frac{D_1}{|O_1 O_2|} \right) + C_{\gamma_2} \left( \frac{P_{1,1}(O_2)}{|O_1 O_2|^3} + \frac{C_1}{|O_1 O_2|} + \tilde{u}_1(O_2) \right) \right). \quad (26)$$

Тем самым мы окончательно определили функцию  $u_1(x)$ , а её разложениями мы можем заполнить третьи строки табл. 1 и 2. Кроме того, подставляя (26) в (21), мы находим постоянные  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  и, в свою очередь, однозначно определяем функции  $v_1(\xi)$  и  $w_1(\eta)$ , разложениями которых заполняются третьи столбцы табл. 1 и 2.

Повторяя приведённую выше процедуру, получаем справедливость следующего утверждения.

**Лемма 1.** *Существует формальный ряд  $U$  вида (5), ряд  $V$  вида (8) и ряд  $W$  вида (9), коэффициенты которых  $u_k \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{O_1 \cup O_2\})$ ,  $v_k \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^3 \setminus \gamma_1) \cap C(\bar{\mathbb{R}}_+^3)$ ,  $w_k \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^3 \setminus \gamma_2) \cap C(\bar{\mathbb{R}}_+^3)$  являются решениями краевых задач (6), (7), (10), (11), (12), (13), (14), (15), и имеют место асимптотические разложения*

$$u_{-1}(x) \equiv \mathcal{A}_{-1},$$

$$u_0(x) = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} X_{j,0}(x) \text{ при } x \rightarrow O_1,$$

$$u_0(x(y)) = \mathcal{B}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Y_{j,0}(y) \text{ при } x \rightarrow O_2,$$

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^k P_{j,k}(x) r_1^{-2j-1} + \mathcal{A}_k + \sum_{j=1}^{\infty} X_{j,k}(x) \text{ при } x \rightarrow O_1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$u_k(x(y)) = \sum_{j=0}^k F_{j,k}(y) r_2^{-2j-1} + \mathcal{B}_k + \sum_{j=1}^{\infty} Y_{j,k}(y) \text{ при } x \rightarrow O_2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$v_{-1}(\xi) = \mathcal{A}_{-1} + C_0 r_1^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{j,j}(\xi) \rho_1^{-2j-1} \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty,$$

$$v_0(\xi) = \mathcal{A}_0 + C_1 r_1^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,j+1}(\xi) \rho_1^{-2j-1} \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty,$$

$$v_k(\xi) = \sum_{j=1}^k X_{j,k-j}(x) + \mathcal{A}_k + C_k r_1^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,j+k-1}(\xi) \rho_1^{-2j-1} \text{ при } \rho_1 \rightarrow \infty,$$

$$w_{-1}(\eta) = \mathcal{B}_{-1} + D_0 r_2^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} F_{j,j}(\eta) \rho_2^{-2j-1} \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty,$$

$$w_0(\eta) = \mathcal{B}_0 + D_1 r_2^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{j,j+1}(\eta) \rho_2^{-2j-1} \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty,$$

$$w_k(\eta) = \sum_{j=1}^k Y_{j,k-j}(y) + \mathcal{B}_k + D_k r_2^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} F_{j,j+k-1}(\eta) \rho_2^{-2j-1} \text{ при } \rho_2 \rightarrow \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом выполнены условия согласования разложений

$$A_{N_2, \xi} A_{N_1, x} U = A_{N_1, x} A_{N_2, \xi} V, \quad A_{N_2, \eta} A_{N_1, x} U = A_{N_1, x} A_{N_2, \eta} W,$$

где  $N_1, N_2$  — натуральные числа;  $A_{N, z}$  обозначает оператор взятия частичной суммы до степени  $\varepsilon^N$  включительно асимптотического ряда, переписанного в переменных  $z = (z_1, z_2, z_3)$  (см. [7, с. 19]).

### 3. Обоснование асимптотики

**Теорема 1.** Для всех натуральных  $N$  справедлива оценка

$$|A_{N, x} U + A_{N, \xi} V - A_{N, x} A_{N, \xi} V + A_{N, \eta} W - A_{N, y} A_{N, \eta} W - u(x, \varepsilon)| < M \varepsilon^{N+1} \quad (27)$$

всюду в  $\bar{\Omega}$ , где  $u(x, \varepsilon)$  — точное решение задачи (1)–(4), а  $U, V$  и  $W$  — построенные выше ряды (5), (8) и (9).

*Доказательство.* Обозначим  $T_N(x, \varepsilon) = A_{N, x} U + A_{N, \xi} V - A_{N, x} A_{N, \xi} V + A_{N, \eta} W - A_{N, y} A_{N, \eta} W - u(x, \varepsilon)$  и оценим значения  $T_N(x, \varepsilon)$  на участках  $\gamma_1, \gamma_2$  и её нормальную производную на всей остальной границе.

По построению функция  $A_{N, \xi} V$  тождественно равна  $\varphi_1(\xi)$  на участке  $\gamma_1$ . Поскольку  $r_1 = O(\varepsilon)$  на участке  $\gamma_1^\varepsilon$ , то на нём из асимптотических разложений следует оценка

$$A_{N, x} U - A_{N, \xi} A_{N, x} U = O\left(\sum_{k=0}^N \varepsilon^k r_1^{N-k+1}\right) = O(\varepsilon^{N+1}). \quad (28)$$

Также на нём верна оценка

$$A_{N, \eta} W - A_{N, y} A_{N, \eta} W = O\left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_2^{-N+i-1}\right) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad (29)$$

поскольку на участке  $\gamma_1^\varepsilon$  радиус  $r_2 \geq M$ , вследствие чего  $\rho_2 \geq M/\varepsilon$ , где  $M$  — некоторая положительная постоянная. Следовательно,  $T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$  на  $\gamma_1^\varepsilon$ . Аналогично можно доказать, что  $T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$  на  $\gamma_2^\varepsilon$ .

Теперь рассмотрим участок границы  $\partial\Omega \setminus \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$ . По построению  $\frac{\partial}{\partial n}(A_{N, x} U - u(x, \varepsilon)) = \frac{\partial}{\partial n} A_{N, x} U - \psi(x) = 0$ . Кроме того, на этом участке границы  $r_1 \geq M_1 > 0$ ,  $r_2 \geq M_2 > 0$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ , поэтому на нём

$$\frac{\partial}{\partial n}(A_{N, \xi} V - A_{N, x} A_{N, \xi} V) = O\left(\frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_1^{-N+i-1}\right) = O(\varepsilon^{N+2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(A_{N, \eta} W - A_{N, y} A_{N, \eta} W) = O\left(\frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_2^{-N+i-1}\right) = O(\varepsilon^{N+2}),$$

и, следовательно,  $\frac{\partial}{\partial n} T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+2})$ .

Наконец, рассмотрим участок границы  $\Gamma_1 \setminus \gamma_1^\varepsilon$ . По построению выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial n} (A_{N,x} U - u(x, \varepsilon)) = \frac{\partial}{\partial n} A_{N,x} U - \psi(x) = 0.$$

Также

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} (A_{N,\xi} V - A_{N,x} A_{N,\xi} V) &= \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i v_i(\xi, \varepsilon) - \\ - \frac{\partial}{\partial n} \left( \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left( \sum_{j=1}^k \varepsilon^{-j} P_{j,k}(\xi) \rho_1^{-1-2j} + C_k \rho_1^{-1} + \sum_{j=0}^{N-k} \varepsilon^j X_{j,k}(\xi) \right) \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial n} \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left( \sum_{j=N-k+1}^{\infty} P_{j,k}(\xi) \rho_1^{-1-2j} \right) &= 0 \end{aligned}$$

из-за чётности полиномов  $P_{j,k}(\xi)$  по  $\xi_3$ . Поскольку на участке  $\Gamma_1 \setminus \gamma_1$  величина  $r_2 \geq M_3$  и, следовательно,  $\rho_2 \geq M_3/\varepsilon$ , то

$$\frac{\partial}{\partial n} (A_{N,\eta} W - A_{N,y} A_{N,\eta} W) = O \left( \frac{\partial}{\partial n} \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_2^{-N+i-1} \right) = O(\varepsilon^{N+2}).$$

Следовательно,  $\frac{\partial}{\partial n} T_N(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+2})$  на  $\Gamma_1 \setminus \gamma_1^\varepsilon$ .

Таким образом,  $T_N$  удовлетворяет нулевым граничным условиям с точностью  $O(\varepsilon^{N+1})$  на участках  $\gamma_1^\varepsilon, \gamma_2^\varepsilon$  и с точностью  $O(\varepsilon^{N+2})$  на всей остальной границе. Заметим также, что по построению  $T_N$  — гармоническая функция. Перейдём теперь непосредственно к оценке её по модулю.

Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \tilde{\psi}(x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial n} T_N(x, \varepsilon) \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}. \end{cases}$$

Можно непрерывно доопределить функцию  $\tilde{\psi}(x, \varepsilon)$  на участках  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$  таким образом, чтобы, во-первых,  $\tilde{\psi}(x, \varepsilon)$  являлось  $O(\varepsilon^N)$ , во-вторых,  $\int_{\partial\Omega} \psi(x, \varepsilon) dS = 0$ .

В таком случае мы можем воспользоваться устойчивостью факторизованной задачи Неймана [12], т. е. при таких условиях  $\max_{x \in \partial\Omega} v(x, \varepsilon) - \min_{x \in \partial\Omega} v(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ , где  $v \in C^\infty(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$  — решение задачи Неймана с граничной функцией  $\tilde{\psi}(x, \varepsilon)$ . Вычитая некоторую постоянную, можно добиться, чтобы  $v|_{x \in \gamma_i^\varepsilon} = f_i(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ ,  $i = 1, 2$ .

Вторая вспомогательная задача, которую мы рассмотрим, имеет вид

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}, \\ w|_{x \in \gamma_1^\varepsilon} = -f_1(x, \varepsilon), \\ w|_{x \in \gamma_2^\varepsilon} = -f_2(x, \varepsilon). \end{cases}$$

Если гармоническая функция достигает максимального значения в граничной точке, то её производная по нормали в этой точке не равна нулю. Следовательно,

максимум модуля функции  $w \in C^\infty(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$  достигается на участках  $\gamma_1^\varepsilon$  и  $\gamma_2^\varepsilon$ . Поэтому

$$|w(x, \varepsilon)| \leq \max \left\{ \max_{x \in \gamma_1^\varepsilon} |f_1(x, \varepsilon)|, \max_{x \in \gamma_2^\varepsilon} |f_2(x, \varepsilon)| \right\} = O(\varepsilon^N).$$

Функция  $T_N(x, \varepsilon)$  есть сумма решений этих задач. Таким образом, мы доказали, что  $|T_N(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^N)$ , откуда непосредственно следует оценка (27).  $\square$

**Следствие 1.** Ряд  $U = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$  является равномерным асимптотическим разложением решения  $u(x, \varepsilon)$  задачи (1)–(4) при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $r_1 \geq M\varepsilon^\gamma$ ,  $r_2 \geq M\varepsilon^\gamma$ , ряд  $V = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi)$  является равномерным асимптотическим разложением того же решения при  $r_1 \leq M\varepsilon^\gamma$ , а ряд  $W = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\eta)$  является равномерным асимптотическим разложением решения при  $r_2 \leq M\varepsilon^\gamma$ , где  $\gamma$  — любое число, такое что  $0 < \gamma < 1$ ,  $M$  — некоторая положительная постоянная.

*Доказательство.* Из соотношения (28) вытекает, что

$$A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\gamma(N+1)}) \text{ при } r_1 \leq M\varepsilon^\gamma,$$

а из (29) следует, что

$$A_{N,\eta}W - A_{N,y}A_{N,\eta}W = O(\varepsilon^{(1-\gamma)(N+1)}) \text{ при } r_2 \geq M\varepsilon^\gamma.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_{N,x}U - A_{N,\eta}A_{N,x}U &= O(\varepsilon^{\gamma(N+1)}) \text{ при } r_2 \leq M\varepsilon^\gamma, \\ A_{N,\xi}V - A_{N,x}A_{N,\xi}V &= O(\varepsilon^{(1-\gamma)(N+1)}) \text{ при } r_1 \geq M\varepsilon^\gamma. \end{aligned}$$

Эти оценки вместе с оценкой (27) приводят к утверждениям, сформулированным в следствии.  $\square$

## 4. Пример

Рассмотрим проводник цилиндрической формы

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq a^2, 0 \leq x_3 \leq h\}$$

и удельной электрической проводимостью  $\sigma$  [Ом·м]. По торцам данного цилиндра подключены два круглых контакта  $\gamma_1^\varepsilon = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon, x_3 = 0\}$  и  $\gamma_2^\varepsilon = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon, x_3 = h\}$  (рис. 2).

Пусть на первом контакте установлен электрический потенциал  $\varphi_1 = 1$  [В], на втором контакте потенциал  $\varphi_2 = -1$  [В] и, кроме того, с остальной поверхности проводника происходит потеря потенциала в отрицательно заряженную среду с плотностью тока  $0.01$  [А/м<sup>2</sup>].

Требуется приближённо вычислить силу тока, проходящего через первый и второй контакт, а также установить зависимость этих значений от размеров цилиндра и контактов.

Итак, обозначим через  $u(x, \varepsilon)$  электрический потенциал внутри проводника. Его можно смоделировать решением следующей краевой задачи [10]:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \\ u(x, \varepsilon) = 1 \text{ при } x \in \gamma_1^\varepsilon, \\ u(x, \varepsilon) = -1 \text{ при } x \in \gamma_2^\varepsilon, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{0.01}{\sigma} \text{ при } x \in \partial\Omega \setminus \{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}. \end{cases}$$

Согласно лемме 1 и теореме 1, вне окрестности контактов

$$u(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}u_{-1}(x) + u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$u_{-1}(x) \equiv \mathcal{A}_{-1},$$

$$u_0(x) = \frac{C_0}{r_1} + \frac{D_0}{r_2} + \tilde{u}_0(x) + H_0,$$

$$u_1(x) = \frac{F_{1,1}(x)}{r_1^3} + \frac{C_1}{r_1} + \frac{F_{1,1}(y(x))}{r_2^3} + \frac{D_1}{r_2} + \tilde{u}_1(x) + H_1.$$

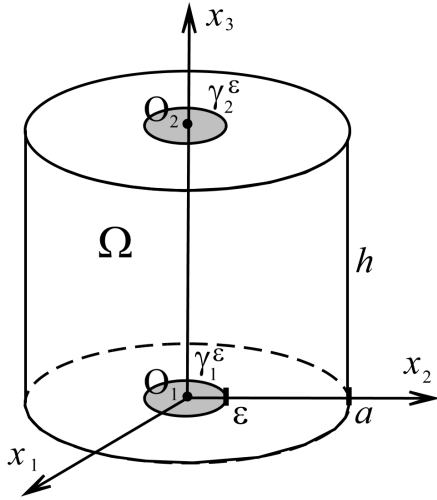


Рис. 2.

Применяя формулы Грина [11, § 6.1], вычислим силу тока, протекающего через первый контакт:

$$I_1 = \sigma \left| \int_{\gamma_1} \frac{\partial u}{\partial x_3} dS \right| = 2\pi\sigma \cdot |C_0 + \varepsilon C_1| + O(\varepsilon^2). \quad (30)$$

Аналогично сила тока, проходящего через второй контакт, есть

$$I_2 = 2\pi\sigma \cdot |D_0 + \varepsilon D_1| + O(\varepsilon^2). \quad (31)$$

Заметим, что поскольку  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — круги единичного радиуса, то  $C_{\gamma_1} = C_{\gamma_2} = \frac{2}{\pi}$ . По формуле (18) вычислим

$$\mathcal{A}_{-1} = \frac{1}{2\pi(C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2})} \int_{\partial\Omega} \psi(x) dS = -\frac{0.01\pi a(a+h)}{4\sigma}.$$

Отметим, что значение  $\tilde{u}_0(O_2) = 0$  в нашем случае в силу симметричности условия соответствующей краевой задачи (16).

Следуя алгоритму построения, описанному в § 2, последовательно получаем

$$C_0 = -\mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_1} = \frac{0.01a(a+h)}{2\sigma}, \quad D_0 = -\mathcal{A}_{-1}C_{\gamma_2} = \frac{0.01a(a+h)}{2\sigma},$$

$$\tilde{C}_0 = \frac{2}{\pi}, \quad \tilde{D}_0 = -\frac{2}{\pi},$$

$$H_0 = \frac{1}{C_{\gamma_1} + C_{\gamma_2}} \left( \tilde{C}_0 + \tilde{D}_0 - \frac{D_0 C_{\gamma_1} + C_0 C_{\gamma_2}}{|O_1 O_2|} - \tilde{u}_0(O_2) C_{\gamma_2} \right) = -\frac{0.01a(a+h)}{2\sigma h},$$

$$\mathcal{A}_0 = \frac{D_0}{|O_1 O_2|} + H_0 = 0, \quad C_1 = \tilde{C}_0 - \mathcal{A}_0 C_{\gamma_1} = \frac{2}{\pi}, \quad D_1 = -C_1 = -\frac{2}{\pi}.$$

Подставляя эти значения в (30) и (31), получаем, что

$$I_1 = \frac{0.01a(a+h)}{2\sigma} + \varepsilon \frac{2}{\pi} + O(\varepsilon^2), \quad I_2 = \left| \frac{0.01a(a+h)}{2\sigma} - \varepsilon \frac{2}{\pi} \right| + O(\varepsilon^2).$$

## 5. Заключение

Отметим, что численно мы могли бы вычислить  $I_1$  и  $I_2$  в нашем примере при любых фиксированных  $a$ ,  $h$ ,  $\sigma$  и не слишком малых  $\varepsilon$ ; однако численными методами нам было бы сложно установить характер зависимости  $I_1$  и  $I_2$  от параметров, и, кроме того, мы бы не смогли быть уверенными, что найденные численным подбором формулы верны при всех значениях параметров.

Полученное асимптотическое разложение позволяет выводить приближённые аналитические формулы для интересующих нас физических характеристик проводников, подключённых к малым контактам, и учитывать потери потенциала через изоляцию. Однако отметим, что более точный учёт таких потерь можно получить, построив асимптотику решения задачи с третьим краевым условием, что может быть направлением дальнейших исследований.

## Список литературы

1. **Гадыльшин, Р. Р.** Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закреплённой на малом участке границе / Р. Р. Гадыльшин // Сиб. мат. журн. — 1993. — Т. 34, № 3. — С. 43–61.
2. **Гадыльшин, Р. Р.** О возмущении спектра Лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы / Р. Р. Гадыльшин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 7. — С. 77–88.
3. **Ершов, А. А.** Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе / Р. Р. Гадыльшин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1064–1080.
4. **Гадыльшин, Р. Р.** Об асимптотической формуле для электрического сопротивления в проводнике с малыми контактами / Р. Р. Гадыльшин, А. А. Ершов, С. В. Реньевский // Уфим. мат. журн. — 2015. — Т. 7, № 3. — С. 16–28.
5. **Миранда, К.** Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : Изд-во иностр. лит., 1957. — 256 с.
6. **Zaremba, S.** Sur un problème mixte relatif a l'équation de Laplace / S. Zaremba // Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Série A. — 1910. — P. 313–344.
7. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
8. **Полиа, Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полиа, Г. Серё. — М. : Физматлит, 1962. — 335 с.
9. **Ландкоф, Н. С.** Основы современной теории потенциала / Н. С. Ландкоф. — М. : Наука, 1966. — 518 с.
10. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Физматлит, 2005. — 656 с.
11. **Ильин, А. М.** Уравнения математической физики / А. М. Ильин. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.
12. **Олейник, О. А.** Об устойчивости задачи Неймана / О. А. Олейник // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, № 1 (67). — С. 223–225.

*Поступила в редакцию 15.08.2017*

*После переработки 15.10.2017*

**Сведения об авторах**

**Ершов Александр Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела динамических систем, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; доцент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ale10919@yandex.ru.

**Русанова Мария Игоревна**, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: rusanova\_mary94@mail.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 3. P. 266–281.*

## ASYMPTOTICS OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM SOLUTION FOR THE LAPLACE EQUATION WITH TYPE CHANGING OF THE BOUNDARY CONDITION ON TWO SMALL SITES

A.A. Ershov<sup>1,2,a</sup>, M.I. Rusanova<sup>1,b</sup>

<sup>1</sup>*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

<sup>2</sup>*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*

<sup>a</sup>*ale10919@yandex.ru*, <sup>b</sup>*rusanova\_mary94@mail.ru*

We consider a harmonic function in a three-dimensional bounded domain. The normal derivative is given on almost the entire boundary, excepting two small sections, on which the value of the function itself is specified. For such a harmonic function, by the method of matching asymptotic expansions, a two-scale asymptotics with respect to a small parameter characterizing the size of the mentioned boundary sections is constructed and justified. The physical application of the obtained decomposition is given.

**Keywords:** *boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, mixed problem, small parameter, matching method, electrical resistance.*

## References

1. **Gadyl'shin R.R.** Splitting a multiple eigenvalue in the boundary value problem for a membrane clamped on a small part of the boundary. *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, iss. 3, pp. 433–450.
2. **Gadyl'shin R.R.** On the perturbation of the Laplacian spectrum when the boundary condition type changes on a small part of the boundary. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1996, vol. 36, no. 7, pp. 889–898.
3. **Ershov A.A.** Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 6, pp. 994–1010.
4. **Gadyl'shin R.R., Ershov A.A., Repyevsky S.V.** On asymptotic formula for electric resistance of conductor with small contacts. *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 15–27.
5. **Miranda K.** *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1955. 222 p. (In Italian).
6. **Zaremba S.** Sur un problème mixte relatif a l'équation de Laplace. *Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Série A*, 1910, pp. 313–344.
7. **Il'in A.M.** *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*. Providence, Rhode Island, AMS, 1992. 281 p.
8. **Pólya G., Szegő G.** *Isoperimetric Inequalities in Mathematical physics*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1951. 279 p.
9. **Landkof N.S.** *Foundations of Modern Potential Theory*. Berlin, Springer, 1972. 424 p.
10. **Landau L.D., Lifschitz E.M.** *Theoretical Physics. Vol. VIII. Electrodynamics of Continuous Media*. Oxford, London, New York, Paris, Pergamon press, 1960. 417 p.
11. **Il'in A.M.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 192 p. (In Russ.)
12. **Oleinik O.A.** Ob ustojchivosti zadachi Nejmana [On the stability of the Neumann problem]. *Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical sciences]*, 1956, vol. 11, no. 1 (67), pp. 223–225. (In Russ.)

*Accepted article received 15.08.2017*

*Corrections received 15.10.2017*