Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 1. С. 46–52.

УДК 510.644

НАТУРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ЛОГИКИ ЮРЬЕВА

Я. И. Петрухин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
yaroslav.petrukhin@mail.ru

Рассматривается трёхзначная логика Юрьева, построенная для моделирования работы биологического нейрона и искусственных нейронных сетей. Формулируется натуральное исчисление, адекватное семантике рассматриваемой логики.

Ключевые слова: *натуральное исчисление, трёхзначная логика, логика Юрьева, логика нейронных сетей, логика биологического нейрона.*

Введение

В статье Д. Н. Юрьева [1] формулируется трёхзначная логика $\mathbf{Y_3}$, моделирующая работу нейроподобных элементов. $\mathbf{Y_3}$ представляет интерес для изучения благодаря своему прикладному назначению и своим логико-алгебраическим свойствам: как следует из работы А. С. Карпенко [2], $\mathbf{Y_3}$ не является решёточной логикой, не содержит регулярных (в смысле С. К. Клини [3; 4]) логических связок, не содержит функций min и max[1], содержит только одну из семи монотонных функций в $\mathbf{P_3}$[2]. Кроме того, в [2] отмечается, что на множестве классических истинностных значений $\{1{,}0\}$ бинарные связки $\mathbf{Y_3}$ не совпадают с классическими (иными словами, не выполняется условие нормальности Решера [8]), а при одном выделенном значении $\mathbf{Y_3}$ не имеет тавтологий. В силу последнего свойства системы $\mathbf{Y_3}$ для неё нельзя построить исчисление гильбертовского типа с непустым множеством аксиом. Однако все утверждения о следовании, корректные в $\mathbf{Y_3}$, могут быть формализованы в виде натурального исчисления, построение которого является целью этой работы.

Статья структурирована следующим образом: в разделе 1 описывается семантика логики $\mathbf{Y_3}$, в разделе 2 формулируется натуральное исчисление для $\mathbf{Y_3}$, в разделе 3 доказывается теорема об адекватности исчисления в семантике.

1. Семантика логики $\mathbf{Y_3}$

В логике $\mathbf{Y_3}$ имеются три истинностных значения 1, 1/2, 0, понимаемые как возбуждающий постсинаптический потенциал, потенциал покоя и тормозной постсинаптический потенциал. Заметим, что значения 1, 1/2 и 0 могут трактоваться и более привычным для трёхзначной логики образом: истина, неопределённость и ложь. $\mathbf{Y_3}$ строится в пропозициональном языке $\mathcal{L}$, алфавиту которого принадлежат пропозициональные переменные $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, правая и левая круглые скобки, логические связки: отрицание ($\neg$), конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$) и сильная дизъюнкция ($\oplus$). Множество всех $\mathcal{L}$-формул $\mathcal{F}$ определяется стандартно. В дальнейшем вместо «$\mathcal{L}$-формула» мы будем писать «формула». Таблица истинности f

[1]Впервые это утверждение сформулировано в [5], но доказательство появилось только в [2].

[2]См. работу С. В. Яблонского [6], посвящённую монотонным операциям в функционально полной системе Э. Поста [7] $\mathbf{P_n}$.

для логической связки l обозначается через f_l. Отображение v из $\mathcal{P}$ в $\{1, 1/2, 0\}$ (называемое оценкой) распространяется на $\mathcal{F}$ в соответствии со следующими таблицами:

	$f_\neg$
1	0
1/2	1/2
0	1

$f_\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1/2	1/2	0

$f_\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1/2
1/2	1	1/2	0
0	1/2	0	0

$f_\oplus$	1	1/2	0
1	1/2	1	1/2
1/2	1	1/2	0
0	1/2	0	1/2

Определение 1. *Из множества формул* Γ *следует формула* A *тогда и только тогда, когда при любой оценке* v*, если значение всякой формулы* G *из* Γ *равно* 1*, то значение* A *тоже равно* 1*.*

Символически это определение можно записать следующим образом: $\Gamma \models_{\mathbf{Y_3}} A$ (где $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$) тогда и только тогда, когда при любой оценке v, если $v(G) = 1$ для всех $G \in \Gamma$, то $v(A) = 1$. В общем случае множество Γ может не быть конечным. Если множество Γ пусто, то формула A называется логическим законом, или тавтологией. Однако, как следует из определений логических связок, если Γ пусто, то из Γ не следует ни одна формула. Таким образом, множество всех тавтологий логики $\mathbf{Y_3}$ пусто.

2. Натуральное исчисление для $\mathbf{Y_3}$

Мы предлагаем натуральное исчисление для $\mathbf{Y_3}$ со следующими правилами вывода ($A, B, C \in \mathcal{F}$):

$$(EFQ)\ \frac{A \quad \neg A}{B} \qquad (\neg\neg I)\ \frac{A}{\neg\neg A} \qquad (\neg\neg E)\ \frac{\neg\neg A}{A} \qquad (\wedge I)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad (\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A}$$

$$(\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B} \qquad (\neg \wedge I)\ \frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A \wedge B)} \qquad (\neg \wedge E_1)\ \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A} \qquad (\neg \wedge E_2)\ \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg B}$$

$$(\vee I_1)\ \frac{A \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A \vee B]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\vee I_2)\ \frac{B \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A \vee B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\vee E_1)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\vee E_2)\ \frac{A \vee B \quad \neg A}{C} \qquad (\vee E_3)\ \frac{A \vee B \quad \neg B}{C}$$

$$(\neg \vee I_1)\ \frac{\neg A \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg(A \vee B)]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\neg \vee I_2)\ \frac{\neg B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg(A \vee B)]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\neg \vee E_1)\ \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \vee \neg B} \qquad (\neg \vee E_2)\ \frac{\neg(A \vee B) \quad A}{C} \qquad (\neg \vee E_3)\ \frac{\neg(A \vee B) \quad B}{C}$$

$$(\oplus I_1)\ \frac{A \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A \oplus B]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\oplus I_2)\ \frac{B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[A \oplus B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\oplus E_1)\ \frac{A \oplus B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\oplus E_2)\ \frac{A \oplus B \quad \neg A}{C} \qquad (\oplus E_3)\ \frac{A \oplus B \quad \neg B}{C}$$

$$(\oplus E_4)\ \frac{A \oplus B \quad A \quad B}{C} \qquad (\neg \oplus I_1)\ \frac{\neg A \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg(A \oplus B)]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\neg \oplus I_2)\ \frac{\neg B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg(A \oplus B)]\\ C\end{matrix}}{C} \qquad (\neg \oplus E_1)\ \frac{\neg(A \oplus B)}{\neg A \oplus \neg B}$$

$$(\neg \oplus E_2)\ \frac{\neg(A \oplus B) \quad A}{C} \qquad (\neg \oplus E_3)\ \frac{\neg(A \oplus B) \quad B}{C} \qquad (\neg \oplus E_4)\ \frac{\neg(A \oplus B) \quad \neg A \quad \neg B}{C}$$

Определение 2. *Выводом $A \in \mathcal{F}$ из $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ называется непустая конечная линейно упорядоченная последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$, такая, что* (1) *A_n есть A, и* (2) *для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $A_i \in \Gamma$ (A_i является посылкой), или A_i является допущением, или A_i получена из предшествующих формул по одному из правил вывода, и* (3) *после применения правил $(\vee E_1)$, $(\oplus E_1)$, $(\vee I_1)$, $(\vee I_2)$, $(\oplus I_1)$, $(\oplus I_2)$, $(\neg \vee I_1)$, $(\neg \vee I_2)$, $(\neg \oplus I_1)$ и $(\neg \oplus I_2)$ все формулы, начиная с допущений и вплоть до результатов применения этих правил, являются исключёнными из вывода. Из $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ выводима $A \in \mathcal{F}$ $(\Gamma \vdash_{\mathbf{Y_3}} A)$ тогда и только тогда, когда существует вывод A из Γ.*

Пример вывода приведён на рисунке (с. 49).

3. Теорема об адекватности исчисления семантике

Теорема 1. *Для всяких $A \in \mathcal{F}$ и $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ следующие утверждения эквивалентны*:
(1) $\Gamma \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$; (2) $\Gamma \models_{\mathbf{Y_3}} A$.

Доказательство. С помощью таблиц истинности нетрудно убедиться в том, что во всех правилах вывода из посылок следуют заключения. Используя этот факт, индукцией по длине вывода легко показать, что из утверждения (1) следует утверждение (2). Для доказательства того, что из утверждения (2) следует утверждение (1), нам потребуется метод Хенкина [9], точнее говоря, его адаптация для трёхзначных пропозициональных логик, описанная в [10].

Определение 3. *Называем $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ $\mathbf{Y_3}$-теорией, если выполняются следующие условия*:
(Γ1) $\Gamma \neq \mathcal{F}$;
(Γ2) $\Gamma \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$, *если и только если* $A \in \Gamma$;
(Γ3) *если* $A \vee B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$;
(Γ4) *если* $A \oplus B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$;
(Γ5) *если* $A \in \Gamma$, *то* $\neg A \in \Gamma$, *или* $\neg B \in \Gamma$, *или* $A \vee B \in \Gamma$;
(Γ6) *если* $B \in \Gamma$, *то* $\neg A \in \Gamma$, *или* $\neg B \in \Gamma$, *или* $A \vee B \in \Gamma$;
(Γ7) *если* $A \in \Gamma$, *то* $\neg A \in \Gamma$, *или* $B \in \Gamma$, *или* $\neg B \in \Gamma$, *или* $A \oplus B \in \Gamma$;

1	$p_1 \vee p_2$	посылка
2	$\quad p_1$	допущение
3	$\quad\quad \neg p_2$	допущение
4	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	$(\vee E_3)$: 1, 3
5	$\quad\quad \neg p_1$	допущение
6	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	(EFQ): 2, 5
7	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	допущение
8	$\quad p_2 \vee p_1$	$(\vee I_2)$: 2, 3-4, 5-6, 7
9	$\quad p_2$	допущение
10	$\quad\quad \neg p_2$	допущение
11	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	(EFQ): 9, 10
12	$\quad\quad \neg p_1$	допущение
13	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	$(\vee E_2)$: 1, 12
14	$\quad\quad p_2 \vee p_1$	допущение
15	$\quad p_2 \vee p_1$	$(\vee I_1)$: 9, 10-11, 12-13, 14
16	$p_2 \vee p_1$	$(\vee E_1)$: 1, 2-8, 9-15

Вывод формулы $p_2 \vee p_1$ из формулы $p_1 \vee p_2$

(Г8) *если* $B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$, *или* $\neg A \in \Gamma$, *или* $\neg B \in \Gamma$, *или* $A \oplus B \in \Gamma$;
(Г9) *если* $\neg A \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$, *или* $B \in \Gamma$, *или* $\neg(A \vee B) \in \Gamma$;
(Г10) *если* $\neg B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$, *или* $B \in \Gamma$, *или* $\neg(A \vee B) \in \Gamma$;
(Г11) *если* $\neg A \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$, *или* $B \in \Gamma$, *или* $\neg B \in \Gamma$, *или* $\neg(A \oplus B) \in \Gamma$;
(Г12) *если* $\neg B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$, *или* $\neg A \in \Gamma$, *или* $B \in \Gamma$, *или* $\neg(A \oplus B) \in \Gamma$.

Определение 4. *Называем множество* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ *непротиворечивым, если для всякой* $A \in \mathcal{F}$ *верно, что* $A \notin \Gamma$ *или* $\neg A \notin \Gamma$. *Называем* $\mathbf{Y_3}$*-теорию* Γ *непротиворечивой, если она является непротиворечивым множеством формул.*

Лемма 1. *Всякая* $\mathbf{Y_3}$*-теория* Γ *является непротиворечивой.*

Доказательство. Допустим, что существует $\mathbf{Y_3}$-теория Δ, не являющаяся непротиворечивой. Тогда по определению 4 существует формула A, такая, что $A \in \Delta$ и $\neg A \in \Delta$. Но тогда, применяя правило (EFQ), получаем, что $B \in \Delta$ (для всякой формулы B). Следовательно, $\Delta = \mathcal{F}$, что противоречит определению 3. □

Лемма 1 позволяет нам рассматривать в приведённом ниже определении 5 только непротиворечивые множества.

Определение 5. *Называем* $e(A, \Gamma)$ *канонической оценкой (для всякого непротиворечивого* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ *и всякой* $A \in \mathcal{F}$*), если выполняются следующие условия*:

$$e(A,\Gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad A \in \Gamma \text{ и } \neg A \notin \Gamma; \\ 1/2, & \text{если} \quad A \notin \Gamma \text{ и } \neg A \notin \Gamma; \\ 0, & \text{если} \quad A \notin \Gamma \text{ и } \neg A \in \Gamma. \end{cases}$$

Лемма 2. *Для любых $\mathbf{Y_3}$-теории Γ и $A \in \mathcal{F}$:*

1. $f_\neg(e(A,\Gamma)) = e(\neg A,\Gamma)$.
2. $f_\wedge(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \wedge B,\Gamma)$.
3. $f_\vee(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \vee B,\Gamma)$.
4. $f_\oplus(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma)) = e(A \oplus B,\Gamma)$.

Доказательство. 1. Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. По правилу $(\neg\neg I)$ $\neg\neg A \in \Gamma$. Тогда $f_\neg(e(A,\Gamma)) = 1 = f_\neg(0) = e(\neg A,\Gamma)$.

Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1/2$. Тогда $A \notin \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$. Если $\neg\neg A \in \Gamma$, то по правилу $(\neg\neg E)$ $A \in \Gamma$. Противоречие. Следовательно, $\neg\neg A \notin \Gamma$ и $f_\neg(e(A,\Gamma)) = 1/2 = f_\neg(1/2) = e(\neg A,\Gamma)$.

Случай $e(A,\Gamma) = 0$ рассматривается аналогично.

2. Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1$, $e(B,\Gamma) = 1/2$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Из $A \wedge B \in \Gamma$ по правилу $(\wedge E_2)$ следует $B \in \Gamma$. Поэтому $A \wedge B \notin \Gamma$. Из $\neg(A \wedge B) \in \Gamma$ по правилу $(\neg \wedge E_1)$ следует $\neg A \in \Gamma$. Поэтому $\neg(A \wedge B) \notin \Gamma$. Таким образом, $e(A \wedge B,\Gamma) = 1/2 = f_\wedge(1, 1/2) = f_\wedge(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

3. Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1$, $e(B,\Gamma) = 1/2$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Используя (Г5), из $A \in \Gamma$ получаем $\neg A \in \Gamma$, или $\neg B \in \Gamma$, или $A \vee B \in \Gamma$. Поскольку $\neg A \notin \Gamma$ и $\neg B \notin \Gamma$, получаем $A \vee B \in \Gamma$. Используя (EFQ), получаем $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Таким образом, $e(A \vee B,\Gamma) = 1 = f_\vee(1, 1/2) = f_\vee(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1$, $e(B,\Gamma) = 0$. Тогда $A \in \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \in \Gamma$. Предположим, что $A \vee B \in \Gamma$. Отсюда из того, что $\neg B \in \Gamma$, по правилу $(\vee E_3)$ получаем $C \in \Gamma$, иными словами, $\Gamma = \mathcal{F}$, что противоречит (Г1). Таким образом, выполняется $A \vee B \notin \Gamma$. Допустим, что $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Отсюда из того, что $A \in \Gamma$, по правилу $(\neg \vee E_2)$ получаем $C \in \Gamma$, иными словами, $\Gamma = \mathcal{F}$, что противоречит (Г1). Следовательно, $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Таким образом, $e(A \vee B,\Gamma) = 1/2 = f_\vee(1, 0) = f_\vee(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

Допустим, что $e(A,\Gamma) = 1/2$, $e(B,\Gamma) = 1/2$. Тогда $A \notin \Gamma$, $\neg A \notin \Gamma$, $B \notin \Gamma$, $\neg B \notin \Gamma$. Пусть $A \vee B \in \Gamma$. Используя (Г3), получаем, что $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$. Противоречие. Таким образом, $A \vee B \notin \Gamma$. Пусть $\neg(A \vee B) \in \Gamma$. Тогда по правилу $(\neg \vee E_1)$ и (Г3) получаем, что $\neg A \in \Gamma$ или $\neg B \in \Gamma$. Противоречие. Следовательно, $\neg(A \vee B) \notin \Gamma$. Таким образом, $e(A \vee B,\Gamma) = 1/2 = f_\vee(1/2, 1/2) = f_\vee(e(A,\Gamma), e(B,\Gamma))$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

4. Аналогично предыдущим случаям. □

Лемма 3. *Для всякой $\mathbf{Y_3}$-теории Γ определим оценку v_Γ так, что $v_\Gamma(p) = e(p,\Gamma)$ для всех $p \in \mathcal{P}$. Тогда $v_\Gamma(A) = e(A,\Gamma)$ для всех $A \in \mathcal{F}$.*

Доказательство проводится по индукции по построению A с использованием леммы 2.

Лемма 4. (*Лемма Линденбаума*). *Для всяких $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$ если $\Gamma \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$, то существует такая $\mathbf{Y_3}$-теория Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Delta \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$.*

Доказательство. Допустим, что $\Gamma \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Пусть $B_1, B_2, \dots$ есть перечисление всех элементов $\mathcal{F}$, пусть $\Gamma_0 = \Gamma$ и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \bigcup \{B_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \bigcup \{B_{n+1}\} \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$, и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$, иначе. Пусть $\Delta := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$. По определению Δ, получаем, что (i) $\Gamma \subseteq \Delta$. Прямой индукцией по i можно доказать, что (ii) $\Delta \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Остаётся проверить, является ли

Δ $\mathbf{Y_3}$-теорией, иными словами, выполняются ли условия (Г1)–(Г12). (Г1) следует из того, что $\Delta \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Используя рассуждение от противного и определение Δ, несложно показать, что (Г2) имеет место. Докажем, что условие (Г3) выполняется. Допустим, что $A \vee B \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$ и $B \notin \Gamma$. Тогда $A = B_n$, $B = B_m$, $\Gamma_n \cup \{B_n\} \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$ и $\Gamma_m \cup \{B_m\} \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Поскольку $\Gamma_n \subseteq \Delta$ и $\Gamma_m \subseteq \Delta$, $\Delta \cup \{B_n\} \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$ и $\Delta \cup \{B_m\} \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Отсюда и из того, что $\Delta \vdash_{\mathbf{Y_3}} B_n \vee B_m$, применяя правило $(\vee E_1)$, получаем $\Delta \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$, что противоречит (ii). Но тогда если $A \vee B \in \Gamma$, то $A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$. Выполнимость условий (Г4)–(Г12) обосновывается аналогично с использованием правил вывода $(\oplus E_1)$, $(\vee I_1)$, $(\vee I_2)$, $(\oplus I_1)$, $(\oplus I_2)$, $(\neg \vee I_1)$, $(\neg \vee I_2)$, $(\neg \oplus I_1)$ и $(\neg \oplus I_2)$. $\square$

Допустим, что $\Gamma \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$. Тогда по лемме 4 существует такая $\mathbf{Y_3}$-теория Δ, что $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Delta \nvdash_{\mathbf{Y_3}} A$. По лемме 3 существует такая оценка $v_\Delta(A)$, что $v_\Delta(G) = 1$ (для всех $G \in \Gamma$) и $v_\Delta(A) \neq 1$. Следовательно, $\Gamma \not\models_{\mathbf{Y_3}} A$. Отсюда по контрапозиции получаем, что если $\Gamma \models_{\mathbf{Y_3}} A$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{Y_3}} A$. $\square$

Заключение

Рассмотрена трёхзначная пропозициональная логика Юрьева $\mathbf{Y_3}$, моделирующая работу нейроподобных элементов. Построено натуральное исчисление, формализующее $\mathbf{Y_3}$.

Список литературы

1. **Юрьев, Д. Н.** Новая трёхзначная логика / Д. Н. Юрьев // Тр. науч.-исслед. семинара логич. центра Ин-та философии РАН. — 2001. — № 15. — С. 120–125.
2. **Карпенко, А. С.** Нерегулярность и «существенная» немонотонность логики Юрьева $\mathbf{Y_3}$ / А. С. Карпенко // Тр. науч.-исслед. семинара логич. центра Ин-та философии РАН. — 2002. — № 16. — С. 54–58.
3. **Kleene, S. C.** On a notation for ordinal numbers / S. C. Kleene // J. of Symbolic Logic. — 1938. — Vol. 3, no. 4. — P. 150–155.
4. **Клини, С. К.** Введение в метаматематику / С. К. Клини. — М. : Изд-во иностр. лит., 1957. — 526 с.
5. **Карпенко, А. С.** Не истинностно-функциональная логика Клини с антибулевой операцией / А. С. Карпенко // Тр. науч.-исслед. семинара логич. центра Ин-та философии РАН. — 2001. — № 15. — С. 41–45.
6. **Яблонский, С. В.** Функциональные построения в k-значной логике / С. В. Яблонский // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1958. — № 51. — С. 5–142.
7. **Post, E.** Introduction to a general theory of elementary propositions / E. Post // American J. of Mathematics. — 1921. — Vol. 43, no. 3. — P. 163–185.
8. **Rescher, N.** Many-valued logic / N. Rescher. — N. Y. : McGraw Hill, 1959. — xv+359 p.
9. **Henkin, L.** The completeness of the first-order functional calculus / L. Henkin // J. of Symbolic Logic. — 1949. — Vol. 14, no. 3. — P. 159–166.
10. **Tamminga, A.** Correspondence analysis for strong three-valued logic / A. Tamminga // Логич. исслед. — 2014. — № 20. — С. 255–268.

Поступила в редакцию 16.01.2017
После переработки 24.02.2017

Сведения об авторах

Петрухин Ярослав Игоревич, студент кафедры логики философского факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: yaroslav.petrukhin@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 1. P. 46–52.

NATURAL DEDUCTION FOR YURIEV'S LOGIC

Y.I. Petrukhin,

Lomonosov State University, Moscow, Russia
yaroslav.petrukhin@mail.ru

In the paper we consider the three-valued Yuriev's logic constructed for the simulating of the work of a biological neuron and an artificial neural networks. We formulate a natural deduction system which is adequate with respect to the semantics of the considered logic.

Keywords: *natural deduction, three-valued logic, Yuriev's logic, logic of neuron network, logic of biological neuron.*

References

1. **Yuriev D.N.** Novaya tryokhznachnaya logika [New three-valued logic]. *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of the research logical seminar of Institute of philosophy of Russian Academy of Sciences], 2001, no. 15, pp. 120–125. (In Russ.).
2. **Karpenko A.S.** Neregulyarnost' i "sushchestvennaya" nemonotonnost' logiki Yur'eva $\mathbf{Y_3}$ [Nonregularity and "essential" nonmonotonicity of Yuriev's logic $\mathbf{Y_3}$]. *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of the research logical seminar of Institute of philosophy of Russian Academy of Sciences], 2002, no. 16, pp. 54–58. (In Russ.).
3. **Kleene S.C.** On a notation for ordinal numbers. *Journal of Symbolic Logic*, 1938, vol. 3, no. 4, pp. 150–155.
4. **Kleene S.C.** *Introduction to metamathematics.* New York, Toronto, D. Van Nostrand Company, Inc. 1952. x + 550 p.
5. **Karpenko A.S.** Ne istinnostno-funktsional'naya logika Klini s antibulevoy operatsiey [Non truth-functional Kleene's logic with antiboolean operation]. *Trudy nauchno-issledovatel'skogo seminara logicheskogo tsentra Instituta filosofii RAN* [Proceedings of the research logical seminar of Institute of philosophy of Russian Academy of Sciences], 2001, no. 15, pp. 41–45. (In Russ.)
6. **Yablonskiy S.V.** Funktsional'nye postroeniya v k-znachnoy logike [Functional constructions in k-valued logic]. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1958, no. 51, pp. 5–142. (In Russ.).
7. **Post E.** Introduction to a general theory of elementary propositions. *American Journal of Mathematics*, 1921, vol. 43, no. 3, pp. 163–185.
8. **Rescher N.** *Many-valued logic.* New York, McGraw Hill, 1959. xv+359 p.
9. **Henkin L.** The completeness of the first-order functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 1949, vol. 14, no. 3, pp. 159–166.
10. **Tamminga A.** Correspondence analysis for strong three-valued logic. *Logical Investigations*, 2014, no. 20, pp. 255–268.

Accepted article received 16.01.2017
Corrections received 24.02.2017