

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ НА КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА — ЛЯВА

А. И. Кожанов^{1,a}, Н. Н. Шадрин^{2,3,b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

³МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

^akozhanov@math.nsc.ru, ^bshadrinann8@yandex.ru

Целью работы является исследование разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений $u_{tt} - \Delta u_{tt} + \lambda \Delta u = \mu u + f(x, t)$ при задании условий Дирихле, а также некоторых условий сопряжения на линии $t = 0$. Для изучаемых задач устанавливаются свойства существования, единственности и неединственности регулярного решения (т. е. решения, имеющего все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение).

Ключевые слова: уравнение Буссинеска — Лява, краевая задача, условия сопряжения, регулярное решение, существование решения, единственность решения, влияние параметров.

Введение

В работе изучается разрешимость краевых задач с условиями сопряжения для дифференциальных уравнений типа уравнения Буссинеска — Лява

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \Delta u) + \lambda \Delta u = \mu u + f(x, t), \quad (1)$$

где μ, λ — постоянные.

Уравнение (1) встречается при исследовании поведения продольных волн в тонком упругом стержне [1]. Также оно используется при описании движения волн в слоистых средах, в плазме [2–6]. В работах [7, 8] рассмотрены нелокальные задачи с интегральными по пространственным переменным условиями для таких уравнений и доказано существование обобщённых решений.

В работе [9] рассматривается начально-краевая задача для уравнения Буссинеска — Лява, моделирующего продольные колебания балки. Данная задача сводится к абстрактной начальной задаче для уравнения соболевского типа второго порядка. Получены теоремы об однозначной разрешимости исходной и абстрактной задач. В работе [10] на основе метода фазового пространства и метода конечных разностей построен алгоритм нахождения численного решения задачи Коши — Дирихле для уравнения Буссинеска — Лява, моделирующей продольные колебания в тонком упругом стержне с учётом поперечной инерции.

Между тем для уравнения Буссинеска — Лява задачи с условиями сопряжения ранее не рассматривались. Для тех или иных классов дифференциальных уравнений задачи с условиями сопряжения изучаются довольно давно. Первоначально серьёзные результаты о разрешимости задач сопряжения для дифференциальных уравнений с частными производными были получены в работах О. А. Ладыженской [11–13], О. А. Олейник [14, 15], В. А. Ильина [16–22], М. Schechter [23]. Ими были изучены классические задачи дифракции для дифференциальных уравнений эллиптического, параболического, гиперболического типов, уравнений смешанного типа. Авторами данной работы ранее исследовались задачи сопряжения для квазипараболических уравнений [24].

Целью данной статьи является исследование влияния параметров на корректность некоторой задачи сопряжения для дифференциального уравнения типа Буссинеска — Лява. Вопрос о влиянии параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений ранее рассматривался для эллиптических уравнений одним из авторов в работе [25]. Настоящую работу можно считать продолжением этой работы.

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства \mathbb{R}^n с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ , T_1, T_2 — заданные положительные числа, Q_1 и Q_2 — цилиндры $\Omega \times (-T_1, 0)$ и $\Omega \times (0, T_2)$ соответственно.

Далее, пусть $f(x, t)$ есть заданная функция, определённая при $(x, t) \in \overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, определённые при $x \in \overline{\Omega}$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ — заданные действительные параметры, Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{tt} - \Delta v_{tt} + \lambda \Delta v - \mu v.$$

Задача сопряжения: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{2}$$

и такую, что для неё выполняются граничные условия

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (-T_1, 0)} = 0, \tag{3}$$

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T_2)} = 0, \tag{4}$$

$$u(x, -T_1) = u(x, T_2) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

а также условия сопряжения

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0) + \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u_t(x, +0) = \beta u_t(x, -0) + \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Обозначим через V множество функций

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(-T_1, 0; W_2^2(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(-T_1, 0; W_2^2(\Omega)),$$

$$v(x, t) \in L_2(0, T_2; W_2^2(\Omega)), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(0, T_2; W_2^2(\Omega))\}.$$

Определим в этом пространстве норму

$$\|v\|_V = (\|v\|_{L_2(-T_1,0;W_2^2(\Omega))}^2 + \|v_{tt}\|_{L_2(-T_1,0;W_2^2(\Omega))}^2 + \|v\|_{L_2(0,T_2;W_2^2(\Omega))}^2 + \|v_{tt}\|_{L_2(0,T_2;W_2^2(\Omega))}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что множество V с этой нормой будет банаховым пространством.

Всюду ниже под решением задачи сопряжения (2)–(7) будем понимать функцию $v(x, t)$ из пространства V , являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения (2) и такую, что для неё выполняются граничные условия (3)–(5), а также условия сопряжения (6) и (7).

2. Единственность и неединственность решения задачи сопряжения

Как и в [25], основное внимание в настоящей работе будет уделено вопросу о неединственности решений изучаемой задачи сопряжения — фактически вопросу о собственных числах и собственных функциях. Заметим, что собственные числа здесь можно трактовать как пару (λ, μ) . И ещё одно замечание — как и в работе [25], на единственность и неединственность решения задачи сопряжения (2)–(7) влияют будут не только числа λ и μ , но и числа T_1 , T_2 , α и β .

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ система собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа с соответствующими собственными числами z_k :

$$\Delta w_k(x) = z_k w_k(x), \quad w_k(x)|_{\Gamma} = 0.$$

Известно, что собственные числа z_k все отрицательные, конечнократные и имеют единственную предельную точку в $-\infty$. Будем считать, что числа z_k , $k = 1, 2, \dots$, упорядочены по невозрастанию с учётом их кратности.

Введём обозначения:

$$\gamma_k = \frac{\lambda z_k - \mu}{1 - z_k}, \quad \delta_k = \sqrt{\gamma_k},$$

$$M_k = e^{\delta_k(T_1+T_2)} - e^{-\delta_k(T_1+T_2)}, \quad N_k = e^{\delta_k(T_2-T_1)} - e^{-\delta_k(T_2-T_1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Всюду далее будем считать, что выполняется неравенство $T_2 \geq T_1$ (комментарии к случаю $T_2 < T_1$ будут приведены в конце работы). Кроме того, всюду в работе будем считать, что выполняется условие $\alpha\beta \neq 0$. Это условие означает, что исключается случай, когда задача сопряжения (2)–(7) распадается на две независимые задачи в цилиндрах Q_1 и Q_2 .

Теорема 1. Пусть $f(x, t)$ есть тождественно нулевая в $\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}$ функция, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — тождественно нулевые в $\overline{\Omega}$ функции. Далее, пусть для чисел α , β , λ и μ выполняется одно из условий:

- (а) существует натуральное число k_1 такое, что $\lambda z_{k_1} - \mu > 0$, при этом $\alpha\beta \cos(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) \sin(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}}) = -\sin(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) \cos(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}})$;
- (б) существует натуральное число k_2 такое, что $\lambda z_{k_2} - \mu = 0$, $\alpha\beta T_2 + T_1 = 0$;
- (в) существует натуральное число k_3 такое, что $\lambda z_{k_3} - \mu < 0$,

$$\alpha\beta = -1 + \frac{2N_{k_3}}{M_{k_3} + N_{k_3}}.$$

Тогда задача сопряжения (2)–(7) имеет ненулевые решения.

Доказательство. Решение $u(x, t)$ задачи (2)–(7) будем искать в виде

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in Q_1, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in Q_2, \end{cases}$$

при этом функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ можно представить в виде рядов Фурье

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x), \quad u_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)w_k(x).$$

Выполнение для функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ уравнения (2) с нулевой правой частью в цилиндрах Q_1 и Q_2 , а также выполнение для них граничных условий (5) и однородных условий сопряжения (6) и (7) означает, что для $k = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} c_k''(t) + \frac{\lambda z_k - \mu}{1 - z_k} c_k(t) &= 0, \quad t \in (-T_1, 0), \\ d_k''(t) + \frac{\lambda z_k - \mu}{1 - z_k} d_k(t) &= 0, \quad t \in (0, T_2), \\ c_k(-T_1) &= 0, \quad d_k(T_2) = 0, \\ c_k(-0) &= \alpha d_k(+0), \quad d_k(+0) = \beta c_k'(-0). \end{aligned}$$

Пусть выполняется условие (а). Тогда при $k = k_1$ выполняется

$$\begin{aligned} c_{k_1}(t) &= A_{k_1} \cos(t\sqrt{\gamma_{k_1}}) + B_{k_1} \sin(t\sqrt{\gamma_{k_1}}), \\ d_{k_1}(t) &= C_{k_1} \cos(t\sqrt{\gamma_{k_1}}) + D_{k_1} \sin(t\sqrt{\gamma_{k_1}}), \end{aligned}$$

и при этом числа A_{k_1} , B_{k_1} , C_{k_1} и D_{k_1} определяются как решение алгебраической системы

$$\begin{aligned} A_{k_1} \cos(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) - B_{k_1} \sin(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) &= 0, \\ C_{k_1} \cos(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}}) + D_{k_1} \sin(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}}) &= 0, \\ A_{k_1} &= \alpha C_{k_1}, \\ D_{k_1} &= \beta B_{k_1}. \end{aligned}$$

При выполнении условия (а) эта система будет иметь ненулевое решение A_{k_1} , B_{k_1} , C_{k_1} , D_{k_1} . А это и означает, что функции $c_{k_1}(t)$ и $d_{k_1}(t)$ будут ненулевыми, функции же $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ будут содержать ненулевые компоненты $c_{k_1}(t)w_{k_1}(x)$ и $d_{k_1}(t)w_{k_1}(x)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что при выполнении условий (б) или (в) функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ также будут содержать ненулевые компоненты $c_{k_2}(t)w_{k_2}(x)$, $d_{k_2}(t)w_{k_2}(x)$ и $c_{k_3}(t)w_{k_3}(x)$, $d_{k_3}(t)w_{k_3}(x)$ соответственно. Теорема доказана. \square

В следующей теореме приведены достаточные условия, характеризующие единственность решений задачи сопряжения (2)–(7). Положим

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(\lambda, \mu) : \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}, \\ E_1 &= \{(\lambda, \mu) : \lambda > 0, \mu < 0, \lambda z_1 - \mu \leq 0\}, \\ E_2 &= \{(\lambda, \mu) : \lambda > 0, \mu < 0, \lambda z_1 - \mu > 0\}. \end{aligned}$$

Пусть (λ, μ) есть точка из множества E_2 . Через $k_0(\lambda, \mu)$ обозначим натуральное число, для которого выполняется $\lambda z_k - \mu > 0$ при $k = 1, 2, \dots, k_0(\lambda, \mu)$, $\lambda z_k - \mu \leq 0$ при $k > k_0(\lambda, \mu)$.

Теорема 2. Пусть выполняется одно из условий

$$(г) \alpha\beta > 0, (\lambda, \mu) \in E_0 \cup E_1;$$

$$(д) \alpha\beta > 0, (\lambda, \mu) \in E_2, \alpha\beta \cos(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) \sin(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}}) \neq -\sin(T_1\sqrt{\gamma_{k_1}}) \cos(T_2\sqrt{\gamma_{k_1}}),$$

$$k = 1, 2, \dots, k_0(\lambda, \mu).$$

Тогда задача сопряжения (2)–(7) не может иметь в пространстве V более одного решения.

Доказательство. Прежде всего заметим, что вследствие неравенств $\alpha\beta > 0$, $T_2 \geq T_1$ равенства $\alpha\beta T_2 + T_1 = 0$, $\alpha\beta = -1 + \frac{2N_k}{M_k + N_k}$ для каких-либо натуральных чисел k выполняться не могут. Следовательно, при принадлежности точки (λ, μ) множеству $E_0 \cup E_1$ функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ будут тождественно нулевыми функциями в цилиндрах Q_1 и Q_2 соответственно.

Если теперь точка (λ, μ) принадлежит множеству E_2 , то все компоненты функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ с номерами от 1 до $k_0(\lambda, \mu)$ будут нулевыми вследствие того, что равенство условия (а) для них выполняться не будет, все остальные же компоненты будут нулевыми вследствие неравенств $\alpha\beta > 0$, $T_2 \geq T_1$.

Из проведённых рассуждений и следует, что при выполнении условий (г) и (д) задача (2)–(7) не может иметь более одного решения. Теорема доказана. \square

Дальнейшие комментарии по поводу единственности и неединственности решения задачи сопряжения (2)–(7) будут приведены в последней части работы.

3. О существовании решений задачи сопряжения

В настоящем разделе будут приведены некоторые результаты о существовании и несуществовании решений задачи сопряжения (2)–(7). Рассмотрим вначале случай тождественно нулевой функции $f(x, t)$.

Теорема 3. Пусть $f(x, t)$ есть тождественно нулевая в $\overline{Q_1} \cup \overline{Q_2}$ функция, λ есть положительное число, и пусть выполняется одно из условий (г) или (д). Тогда для любых функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространства $W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ задача сопряжения (2)–(7) разрешима в пространстве V и при том единственным образом.

Доказательство. Представим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ рядами Фурье по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k w_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k w_k(x),$$

$$\varphi_k = \int_{\Omega} \varphi(x) w_k(x) dx, \quad \psi_k = \int_{\Omega} \psi(x) w_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Решение задачи сопряжения (2)–(7) будем искать в виде

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in Q_1, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in Q_2. \end{cases}$$

Поскольку функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ имеют вид

$$u_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x), \quad u_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k(x),$$

то для функций $c_k(t)$ и $d_k(t)$ при $k = 1, 2, \dots$ должны выполняться равенства

$$c_k''(t) + \gamma_k c_k(t) = 0, \quad t \in (-T_1, 0),$$

$$\begin{aligned} d_k''(t) + \gamma_k d_k(t) &= 0, \quad t \in (0, T_2), \\ c_k(-T_1) &= 0, \quad d_k(T_2) = 0, \\ c_k(-0) &= \alpha d_k(+0) + \varphi_k, \quad d_k'(+0) = \beta c_k'(-0) + \psi_k. \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале случай $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$. Функции $c_k(t)$ и $d_k(t)$ в этом случае имеют вид

$$c_k(t) = A_k e^{\delta_k t} + B_k e^{-\delta_k t}, \quad d_k(t) = C_k e^{\delta_k t} + D_k e^{-\delta_k t}, \quad \delta_k = \sqrt{\frac{\mu - \lambda z_k}{1 - z_k}}.$$

Далее, для чисел A_k, B_k, C_k, D_k должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} A_k e^{-\delta_k T_1} + B_k e^{\delta_k T_1} &= 0, \\ C_k e^{\delta_k T_2} + D_k e^{-\delta_k T_2} &= 0, \\ A_k + B_k - \alpha C_k - \alpha D_k &= \varphi_k, \\ \beta A_k - \beta B_k - C_k + D_k &= \frac{-\psi_k}{\delta_k}. \end{aligned}$$

Эти равенства представляют собой линейную алгебраическую систему, определитель ε_k которой имеет вид $\varepsilon_k = \alpha\beta(M_k + N_k) + M_k - N_k$. Справедливы неравенства

$$M_k \geq N_k \geq 0, \quad M_k \geq 2\delta_k(T_1 + T_2).$$

Из них вытекает, что при каждом k число ε_k положительно. Следовательно, числа A_k, B_k, C_k, D_k определяются однозначно:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left\{ \varphi_k [e^{\delta_k(T_1+T_2)} + e^{-\delta_k(T_2-T_1)}] - \frac{\alpha\psi_k}{\delta_k} [e^{\delta_k(T_1+T_2)} - e^{-\delta_k(T_2-T_1)}] \right\}, \\ B_k &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left\{ \frac{\alpha\psi_k}{\delta_k} [e^{-\delta_k(T_1+T_2)} + e^{\delta_k(T_2-T_1)}] - \varphi_k [e^{-\delta_k(T_1+T_2)} - e^{\delta_k(T_2-T_1)}] \right\}, \\ C_k &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left\{ \frac{\psi_k}{\delta_k} [e^{-\delta_k(T_2-T_1)} + e^{-\delta_k(T_1+T_2)}] + \beta\varphi_k [e^{-\delta_k(T_1+T_2)} + e^{-\delta_k(T_2-T_1)}] \right\}, \\ D_k &= \frac{1}{\varepsilon_k} \left\{ \frac{\psi_k}{\delta_k} [e^{-\delta_k(T_1+T_2)} + e^{-\delta_k(T_2-T_1)}] - \beta\varphi_k [e^{\delta_k(T_1+T_2)} + e^{\delta_k(T_2-T_1)}] \right\}. \end{aligned}$$

В случае $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$ последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ будет ограниченной последовательностью положительных чисел, точная нижняя грань которой положительна (в противном случае будет существовать подпоследовательность, сходящаяся к нулю, а это невозможно). Следовательно, для чисел A_k, B_k, C_k, D_k будет выполняться неравенство

$$|A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k| \leq R_0(|\varphi_k| + |\psi_k|)$$

с постоянной R_0 , определяющейся лишь числами $\lambda, \mu, \alpha, \beta, T_1$ и T_2 , а также областью Ω . Это неравенство, принадлежность функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ пространству $W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$, а также классическое неравенство Бесселя [26] означают, что функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ будут принадлежать пространствам $L_2(Q_1)$ и $L_2(Q_2)$ соответственно.

Аналогичные рассуждения показывают, что при принадлежности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ пространству $W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ функции $\Delta u_1(x, t), \Delta u_2(x, t), u_{1tt}(x, t), u_{2tt}(x, t)$,

$\Delta u_{1tt}(x, t)$, $\Delta u_{2tt}(x, t)$ также будут принадлежать пространствам $L_2(Q_1)$ и $L_2(Q_2)$ соответственно. А это и означает, что в рассматриваемом случае $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$ решение $u(x, t)$ задачи сопряжения (1)–(6) существует и принадлежит пространству V .

Пусть теперь выполняется $\lambda > 0$, $\mu < 0$. Если при этом точка (λ, μ) принадлежит множеству E_1 , то, повторяя все предыдущие рассуждения, получим, что и в этом случае задача сопряжения (1)–(6) имеет решение, принадлежащее пространству V .

Если теперь точка (λ, μ) принадлежит множеству E_2 , то в представлении функций $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ рядами Фурье будет присутствовать конечное число слагаемых, отвечающих случаю $\lambda z_k - \mu \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, k_0(\lambda, \mu)$. Все эти слагаемые будут корректно определены и будут в сумме давать функцию, принадлежащую пространству V . Оставшиеся же слагаемые (т. е. ряды по системе $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, суммирование в которых начинается с индекса $k_0(\lambda, \mu) + 1$) будут также представлять собой функцию, принадлежащую пространству V , что показывается дословным повторением рассуждений, проведённых для случая $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$. Следовательно, формально определённое решение, представленное рядами со слагаемыми $c_k(t)w_k(x)$ и $d_k(t)w_k(x)$ в случае $(\lambda, \mu) \in E_2$ будет действительно являться решением задачи (1)–(6) из пространства V .

Единственность решения задачи (1)–(6) вытекает из теоремы 2. Теорема 3 доказана. \square

Приведём теперь один простой признак несуществования решений задачи (1)–(6). Рассмотрим задачу: *найти функцию $v(x, t)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$Lv = 0 \quad (8)$$

и такую, что для неё выполняются граничные условия (2)–(4), а также условия сопряжения

$$v(x, -0) = \beta v(x, +0), \quad x \in \Omega, \quad (9)$$

$$v_t(x, +0) = \alpha v_t(x, -0), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Теорема 4. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ есть тождественно нулевые в $\bar{\Omega}$ функции, для чисел λ , μ , α и β , а также для некоторого натурального числа k выполняются условия*

$$\lambda z_k - \mu > 0,$$

$$\alpha\beta \cos(T_1\sqrt{\gamma_k}) \sin(T_2\sqrt{\gamma_k}) = -\sin(T_1\sqrt{\gamma_k}) \cos(T_2\sqrt{\gamma_k}).$$

Тогда, если для заданной функции $f(x, t)$ и для ненулевого решения $v(x, t)$ задачи (2)–(4), (8)–(10) выполняется

$$\int_Q f v dx dt \neq 0, \quad (11)$$

то задача сопряжения (1)–(6) решений не имеет.

Доказательство. Предположим, что решение задачи (1)–(6) существует. Рассмотрим равенство

$$\int_Q Lu \cdot v dx dt = \int_Q f v dx dt.$$

Вследствие условий сопряжения (5), (6), (9) и (10), а также краевых условий (2) — (4) имеет место равенство

$$\int_Q Lu \cdot v dx dt = \int_Q u Lv dx dt.$$

Если теперь $v(x, t)$ есть ненулевое решение задачи (2)–(4), (8)–(10) и если выполняется условие (11), то получим противоречие. Это противоречие опровергает предположение о существовании решения $u(x, t)$ задачи (1)–(6). Теорема доказана. \square

4. Замечания и дополнения

Прежде всего заметим, что в случае $T_1 = T_2$ все условия и выкладки будут существенно более простыми по сравнению с представленными в разделах 2 и 3. Например, для выполнения условий (б) и (в) достаточно будет потребовать, чтобы число $\alpha\beta + 1$ не обращалось в нуль, условие (а) также будет иметь более простой вид. Наконец, условие $\alpha\beta > 0$ теоремы 3 можно будет заменить условием $\alpha\beta + 1 \neq 0$.

Следующее замечание вновь связано с числами T_1 и T_2 . Именно: случай $T_2 < T_1$ легко сводится к изученному в разделах 2 и 3 случаю заменой $\tau = -t$.

Покажем теперь, что случай ненулевой функции $f(x, t)$ легко можно свести к рассмотренному в разделе 3 случаю $f \equiv 0$. Определим функцию $\bar{u}(x, t)$ как решение задачи Дирихле для уравнения Буссинеска — Лява:

$$L\bar{u} = f(x, t), \quad \bar{u}(x, t)|_{\Gamma \times (-T_1, T_2)} = 0, \quad \bar{u}(x, -T_1) = \bar{u}(x, T_2) = 0$$

(существование регулярного решения этой задачи нетрудно установить с помощью метода разделения переменных или метода работы [4]). Далее, определим функцию $v(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x, t)$. Очевидно, что эта функция будет решением задачи сопряжения типа задачи (1)–(6), но с нулевой функцией $f(x, t)$.

В изучаемой в работе задаче (1)–(6) условия Дирихле (2)–(4) вполне можно заменить другими условиями. Например, условия (2) и (3) можно заменить условиями

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x, t)|_{\Gamma \times (-T_1, 0)} = \frac{\partial u}{\partial v}(x, t)|_{\Gamma \times (0, T_2)} = 0,$$

условия (5) и (или) (6) условиями

$$u_t(x, T_1) = 0$$

и (или) соответственно

$$u_t(x, T_2) = 0.$$

И последнее замечание. Ненулевая функция $v(x, t)$, используемая в теореме 4, существует. Этот факт вытекает из условий теоремы, построить же явно её нетрудно непосредственно (см. доказательство теоремы 1).

Список литературы

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. Уравнения с доминирующей частной производной. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014.
2. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку : Элм, 1985.

3. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
4. **Kiguradze T.** On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations // *Georgian Mathematical Journal*. 1999. Vol. 6, no. 5. P. 447–470.
5. **Уткина Е. А.** Задача Дирихле для одного уравнения четвёртого порядка // *Дифференц. уравнения*. 2011. Т. 47, № 4. С. 400–404.
6. **Уткина Е. А.** Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 2011.
7. **Пулькина Л. С.** Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2012.
8. **Guezane-Lakoud A., Boumazza N.** Galerkin method for the Boussinesq equation with integral condition // *Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications*. 2012. Vol. 2012, no. 3. P. 29–40.
9. **Замышляева А. А., Юзеева А. В.** Начально-конечная задача для уравнений Буссинеска — Лява // *Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование*. 2010. № 16 (192), вып. 5. С. 23–31.
10. **Замышляева А. А., Суворовцев С. В.** Нахождение численного решения задачи Коши — Дирихле для уравнения Буссинеска — Лява методом конечных разностей // *Вестн. Самар. гос. ун-та*. 2015. Вып. 6 (128). С. 76–81.
11. **Ладыженская О. А.** О решении общей задачи дифракции // *Докл. АН СССР*. 1954. Т. 96, № 3. С. 433–436.
12. **Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н.** О классической разрешимости задач дифракции // *Тр. МИАН СССР*. 1966. Т. 92. С. 116–146.
13. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973.
14. **Олейник О. А.** Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами // *Докл. АН СССР*. 1959. Т. 124, № 6. С. 1219–1222.
15. **Олейник О. А.** Об одном методе решения общей задачи дифракции // *Докл. АН СССР*. 1960. С. 1054–1057.
16. **Ильин В. А.** О разрешимости задачи Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // *Докл. АН СССР*. 1961. Т. 137, № 1. С. 28–30.
17. **Ильин В. А.** О системе классических собственных функций линейного самосопряжённого эллиптического оператора с разрывными коэффициентами // *Докл. АН СССР*. 1961. Т. 137, № 2. С. 272–275.
18. **Ильин В. А., Шишмарев И. А.** Метод потенциалов для задач Дирихле и Неймана в случае уравнений с разрывными коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 1961. Т. 2, № 1. С. 46–58.
19. **Ильин В. А., Шишмарев И. А.** Задача на собственные функции для оператора $Lu = \operatorname{div}[p(x)\operatorname{grad}u] - q(x)u$ с разрывными коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 1961. Т. 2, № 4. С. 523–536.
20. **Ильин В. А.** Метод Фурье для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами // *Докл. АН СССР*. 1962. Т. 142, № 1. С. 21–24.
21. **Ильин В. А., Луференко П. В.** Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // *Докл. АН*. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.
22. **Ильин В. А., Луференко П. В.** Обобщённые решения смешанных задач для разрывного волнового уравнения при условии равенства импедансов // *Докл. АН СССР*. 2009. Т. 429, № 3. С. 317–321.

23. **Schechter M.** General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1959. Vol. 12. P. 457–486.
24. **Kozhanov A. I., Shadrina N. N.** Boundary value problems with conjugation conditions for quasi-parabolic equations of the third order with a discontinuous sign-variable coefficient // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 1. С. 599–616.
25. **Шадрина Н. Н.** О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 411–425.
26. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М. : Наука, 1980.

Поступила в редакцию 13.11.2021.

После переработки 10.12.2021.

Сведения об авторах

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru.

Шадрина Наталья Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальных наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана; доцент кафедры высшей математики, МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия; e-mail: shadrinann8@yandex.ru.

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF PARAMETERS ON THE CORRECTNESS OF THE CONJUGATION PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ — LÖVE DIFFERENTIAL EQUATION

A.I. Kozhanov^{1,a}, N.N. Shadrina^{2,3,b}

¹*S.L. Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

³*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

^a*kozhanov@math.nsc.ru*, ^b*shadrinann8@yandex.ru*

The aim of this work is to study the solvability of boundary value problems for differential equations $u_{tt} - \Delta u_{tt} + \lambda \Delta u = \mu u + f(x, t)$ with the Dirichlet boundary conditions, as well as with some matching conditions on the line $t = 0$. For the problems under study, the properties of existence, uniqueness and non-uniqueness of a regular solution are established (i.e. solutions having all generalized derivatives by S.L. Sobolev included in the equation).

Keywords: *Boussinesq – Löve equation, boundary value problem, conjugation conditions, regular solution, existence of solution, uniqueness of solution, influence of parameters.*

References

1. **Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A.** *Uravneniya s dominiruyushchey chastnoy proizvodnoy* [Equation with a dominant partial derivative]. Kazan, Kazan University, 2014. (In Russ.).
2. **Yakubov S.Ya.** *Lineynye differentsial'no-operatornye uravneniya i ikh prilozheniya* [Linear differential operator equations and their applications]. Baku, Elm, 1985. (In Russ.).
3. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
4. **Kiguradze T.** On the correctness of the Dirichlet problem in a characteristic rectangle for fourth order linear hyperbolic equations. *Georgian Mathematical Journal*, 1999, vol. 6, no. 5, pp. 447–470.
5. **Utkina E.A.** Dirichlet Problem for a fourth-order equation. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 4, pp. 599–603.
6. **Utkina E.A.** *Kharakteristicheskiye granichnye zadachi dlya lineynykh uravneniy vysokogo poryadka so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Characteristic boundary value problems for high-order linear equations with higher partial derivatives]. Thesis of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics. Kazan, Kazan Federal University, 2011. (In Russ.).
7. **Pul'kina L.S.** *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravneniy* [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations]. Samara, Samara State University, 2012. (In Russ.).
8. **Guezane-Lakoud A., Boumaza N.** Galerkin method for the Boussinesq equation with integral condition. *Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications*, 2012, vol. 2012, no. 3, p. 29–40.

9. **Zamyshlyayeva A.A., Yuzeeva A.V.** The initial-finish value problem for the Boussinesq — Löve equation. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo unversiteta. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Ser. Mathematical modelling and programming], 2010, no. 16, iss. 5, pp. 23–31. (In Russ.).
10. **Zamyshlyayeva A.A., Suvorovtsev S.V.** Nakhozhdeniye chislennogo resheniya zadachi Koshi — Dirikhle dlya uravneniya Bussineska — Lyava metodom konechnykh raznostey [The search of a numerical solution for the Cauchy — Dirichlet problem to the Boussinesq — Löve equation by the finite difference method]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Samara State University], 2015, iss. 6, pp. 76–81. (In Russ.).
11. **Ladyzhenskaya O.A.** O reshenii obshchey zadachi difraktsii [On solving of the general diffraction problem]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1954, vol. 96, no. 3, pp. 433–436. (In Russ.).
12. **Ladyzhenskaya O.A., Rivkind V.Ya., Ural'tseva N.N.** O klassicheskoy razreshimosti zadach difraktsii [On classical solvability of diffraction problems]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of Mathematical Institute of Academy of Sciences of USSR], 1966, vol. 92, pp. 116–146. (In Russ.).
13. **Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-Linear Elliptic Equations*. New York, Academic Press, 1968.
14. **Oleynik O.A.** Resheniye osnovnykh krayevykh zadach dlya uravneniy vtorogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami [Solving the main boundary value problems for second order equations with discontinuous coefficients]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1959, vol. 124, no. 6, pp. 1219–1222. (In Russ.).
15. **Oleynik O.A.** Ob odnom metode resheniya obshchey zadachi difraktsii [On a method of solving a general diffraction problem]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1960, vol. 135, no. 5, pp. 1054–1057. (In Russ.).
16. **Il'in V.A.** O razreshimosti zadachi Dirikhle i Neymana dlya lineynogo ellipticheskogo operatora s razryvnymi koeffitsientami [On solvability of Diriclet and Neumann problems for linear elliptic operator with discontinuous coefficients]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1961, vol. 137, no. 1, pp. 28–30. (In Russ.).
17. **Il'in V.A.** O sisteme klassicheskikh sobstvennykh funktsiy lineynogo samosopryazhyonnogo ellipticheskogo operatora s razryvnymi koeffitsientami [On system of classical eigenfunctions of linear self-adjoint elliptic operator with discontinuous coefficients]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1961, vol. 137, no. 2, pp. 272–275. (In Russ.).
18. **Il'in V.A., Shishmarev I.A.** Metod potentsialov dlya zadach Dirikhle i Neymana v sluchaye uravneniy s razryvnymi koeffitsientami [Method of potentials for Dirichlet and Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients]. *Siberian Mathematical Journal*, 1961, vol. 2, no. 1, pp. 46–58. (In Russ.).
19. **Il'in V.A., Shishmarev I.A.** Zadacha na sobstvennyye funktsii dlya operatora $Lu = \operatorname{div}[p(x)\operatorname{gradu}] - q(x)u$ s razryvnymi koeffitsientami [The problem for eigenfunctions for the operator $Lu = \operatorname{div}[p(x)\operatorname{gradu}] - q(x)u$ with discontinuous coefficients]. *Siberian Mathematical Journal*, 1961, vol. 2, no. 4, pp. 523–536. (In Russ.).
20. **Il'in V.A.** Metod Furye dlya giperbolicheskogo uravneniya s razryvnymi koeffitsientami [Fourier method for a hyperbolic equation with discontinuous coefficients]. *Doklady AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of USSR], 1962, vol. 142, no. 1, pp. 21–24. (In Russ.).
21. **Il'in V.A., Lufrenko P.V.** Mixed problems describing longitudinal oscillations of a rod consisting of two segments with different densities and different elasticities but equal impedances. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 642–645.
22. **Il'in V.A., Lufrenko P.V.** Generalized solutions of initial-boundary value problems for a discontinuous wave equation in the case of equal impedances. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 3, p. 901.

23. **Schechter M.** General boundary value problems for elliptic partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1959, vol. 12, pp. 457–486.
24. **Kozhanov A.I., Shadrina N.N.** Boundary value problems with conjugation conditions for quasi-parabolic equations of the third order with a discontinuous sign-variable coefficient. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 1, p. 599–616.
25. **Shadrina N.N.** On the influence of parameters on the solvability of some conjugate problems for elliptical equations. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, p. 411–425.
26. **Trenogin V.A.** *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. (In Russ.).

Article received 13.11.2021.

Corrections received 10.12.2021.