Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 3. С. 299–311.

УДК 517.958 DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16304

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О НАГРЕВЕ ПРОВОДНИКА

В. Н. Павленко[1,a], **Д. К. Потапов**[2,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
[a] *pavlenko@csu.ru*, [b] *d.potapov@spbu.ru*

Рассматривается задача Х. Дж. Купера о нагреве проводника в однородном электрическом поле с интенсивностью $\sqrt{\lambda}$ (λ выступает в роли положительного параметра). Распределение температуры в проводнике является решением задачи Дирихле с однородными начальными данными в ограниченной области для квазилинейного уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью и параметром. Коэффициент теплопроводности зависит от пространственной переменной и температуры, а удельная электропроводность имеет разрывы по фазовой переменной. Топологическим методом доказывается существование континуума обобщённых положительных решений, соединяющего $(0,0)$ и ∞. Указано достаточное условие для полуправильности таких решений. По сравнению с работами Х. Дж. Купера и К. Ч. Чанга ослаблены ограничения на разрывную нелинейность (удельную электропроводность).

Ключевые слова: *задача Купера, нагрев проводника, квазилинейное уравнение эллиптического типа, разрывная нелинейность, континуум положительных решений, полуправильное решение, топологический метод.*

Введение. Постановка задачи

В работе [1] Х. Дж. Купер предложил математическую модель стационарного распределения температуры T в проводнике, помещённом в однородное электрическое поле интенсивности $\sqrt{\lambda}$ ($\lambda > 0$). Предполагалось, что область Ω, занятая проводником, ограничена, её граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, а удельная электропроводность $\sigma(x,T)$ допускает разрывы по фазовой переменной T (при переходе через определённые температуры σ меняется скачкообразно). Коэффициент теплопроводности $k(x,T)$ зависит от пространственной переменной x и от температуры T. На границе $\partial\Omega$ области Ω поддерживается постоянная температура. Не теряя общности, можно считать её равной нулю. Математическая модель Купера описанного выше процесса — нижеследующая эллиптическая краевая задача с параметром λ и разрывной нелинейностью $\sigma(x,T)$:

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(k(x,T(x))T_{x_i}\right)_{x_i} = \lambda\sigma(x,T(x)), \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$T(x) = 0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

В данной постановке Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, функция $k(x,T)$ — непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, и на этом множестве выполняется неравенство

$$k(x,T) \geq \alpha, \tag{3}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740003.

где α — положительная константа. Удельная электропроводность $\sigma(x,T)$ суперпозиционно измеримая [2], т. е. для любой измеримой по Лебегу функции $T(x)$ на Ω композиция $\sigma(x,T(x))$ измерима по Лебегу на Ω. Кроме того, для некоторой положительной на Ω функции $\beta(x)$ на $\Omega\times\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\sigma(x,T)\geq\beta(x). \tag{4}$$

В работе [3] рассмотрен случай $k(x,T)\equiv k>0$, а в [1] $k(x,T)=k(x)>0$.

В [4] Х. Дж. Купер исследовал задачу (1), (2) при сделанных выше предположениях, дополнительно потребовав, чтобы удельная электропроводность $\sigma(x,T)$ удовлетворяла следующим условиям:

($i1$) $\sigma(x,T)=\varphi(x,T)+\psi_1(x,T)-\psi_2(x,T)$, где $\varphi(x,T)$ — каратеодориева функция (т. е. для почти всех $x\in\Omega$ функция $\varphi(x,\cdot)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и для каждого $T\in\mathbb{R}$ функция $\varphi(\cdot,T)$ измерима по Лебегу на Ω), функции $\psi_j(x,T)$, $j=1,2$, непрерывны по x при фиксированном T и неубывающие по T при фиксированном x;

($i2$) для функции $\varphi(x,T)$ из условия ($i1$) для почти всех $x\in\Omega$ и для всех $T\in\mathbb{R}$ верна оценка $|\varphi(x,T)|\leq a(x)+\psi(|T|)$, где $a\in L_p(\Omega)$, $p>n$, $\psi(t)$ — неубывающая функция на $[0,+\infty)$.

Для функции $g:\Omega\times\mathbb{R}\to X$ ($X\subseteq\mathbb{R}$) положим

$$g_-(x,T)=\liminf_{\eta\to T}g(x,\eta),\quad g_+(x,T)=\limsup_{\eta\to T}g(x,\eta).$$

Здесь предполагается, что функция $g(x,\cdot)$ локально ограниченная для почти всех $x\in\Omega$. Из условия ($i1$) следует (см. [4]), что множество

$$D=\{T\in\mathbb{R}:\ \text{найдется } x\in\Omega,\ \text{для которого}\\ \text{либо } \psi_{1-}(x,T)\neq\psi_{1+}(x,T),\ \text{либо } \psi_{2-}(x,T)\neq\psi_{2+}(x,T)\}$$

не более чем счётно. Однако, если в условии ($i1$) непрерывность по x функций $\psi_j(x,T)$, $j=1,2$, заменить на измеримость при каждом $T\in\mathbb{R}$, то множество D может быть несчётным. Действительно, функция $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\{0,1\}$, заданная следующим образом:

$$f(x,T)=\begin{cases}1, & \text{если } x<T,\\ 0, & \text{если } x\geq T,\end{cases}$$

неубывающая по T, измеримая по x и для неё множество $D=[0,1]$ несчётно. Поскольку для любого $x\in[0,1]$ функция f непрерывна слева по T на $\mathbb{R}$, то f — суперпозиционно измеримая [5].

Переопределим f на множестве $x=T$, $x\in[0,1]$. Пусть A — неизмеримое подмножество отрезка $[0,1]$. Положим $f(x,x)=0$, если $x\in A$, и $f(x,x)=1$, если $x\in[0,1]\backslash A$. Тогда $f(x,T)$ не будет суперпозиционно измеримой, т. к. функция $f(x,x)$ неизмеримая на $[0,1]$. Интересно отметить, что при этом функции $f_-(x,T)$ и $f_+(x,T)$ суперпозиционно измеримые.

Приведём определения решений задачи (1), (2), а также некоторые комментарии к ним.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (1), (2) называется функция $T(x)\in W_p^2(\Omega)$, $p>n$, удовлетворяющая почти всюду на Ω уравнению (1) и равная нулю на $\partial\Omega$.

Поскольку пространство $W_p^2(\Omega)$ при $p>n$ компактно вкладывается в пространство $C^1(\overline{\Omega})$ непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}$ функций (см. [6]), то сильное

решение задачи (1), (2) является непрерывно дифференцируемой на $\overline{\Omega}$ функцией. В дальнейшем будем многократно использовать теоремы вложения Соболева из [6] без указания ссылки.

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (1), (2) называется такое сильное её решение, что множество

$$D = \{x \in \Omega : T(x) \text{ — точка разрыва функции } \sigma(x, \cdot)\}$$

имеет меру нуль.

Впервые понятие полуправильного решения было введено М. А. Красносельским и А. В. Покровским в работе [7].

Определение 3. *Обобщённым решением* задачи (1), (2) называется функция $T(x) \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(k(x, T(x))T_{x_i}\right)_{x_i} \in \lambda[\sigma_-(x, T(x)), \sigma_+(x, T(x))] \tag{5}$$

и граничному условию (2).

Если $\sigma(x, T) \in [\sigma_-(x, T), \sigma_+(x, T)]$ для почти всех $x \in \Omega$ и любого $T \in \mathbb{R}$, то любое сильное решение задачи (1), (2) является обобщённым решением такой задачи. Полуправильное решение задачи (1), (2) всегда является обобщённым решением этой задачи. Обратное неверно.

Применительно к задаче (1), (2) в [4] Х. Дж. Купер доказал, что множество положительных решений (λ, u), где $\lambda \geq 0$, u — сильное неотрицательное решение задачи (1), (2), соответствующее λ, содержит континуум, соединяющий $(0, 0)$ и ∞, в $\mathbb{R} \times S$. Здесь S — функциональное пространство, непрерывно вложенное в $W_q^1(\Omega)$ и в которое компактно вложено пространство $W_p^2(\Omega)$, $q \geq p > n$. Континуум положительных решений задачи (1), (2), соединяющий $(0, 0)$ и ∞, — это неограниченное связное и замкнутое множество положительных решений задачи (1), (2) в $\mathbb{R} \times S$, содержащее $(0, 0)$. Купер с помощью специальной аппроксимации разрывной нелинейности непрерывными нелинейностями свёл исходную задачу к задаче существования континуума положительных решений аппроксимирующей задачи. Последняя решается с помощью теоремы М. А. Красносельского о существовании положительного собственного значения положительного вполне непрерывного оператора в банаховом пространстве с конусом (см. [8, теорема 5.5]).

Другой подход к исследованию задачи (1), (2) содержится в статье К. Ч. Чанга [9]. Поиск обобщённых решений этой задачи сводится к нахождению неподвижных точек выпуклозначного компактного отображения в пространстве $W_p^1(\Omega)$, частично упорядоченном конусом неотрицательных функций. При этом конус неотрицательных функций инвариантен относительно этого отображения. Удельная электропроводность $\sigma(x, T)$ у Чанга удовлетворяет условиям (4) и $(i1)$. В этой ситуации все обобщённые решения задачи (1), (2) являются полуправильными. Действительно, пусть $T(x)$ — обобщённое решение задачи (1), (2) и $\omega = \{x \in \Omega : \sigma_-(x, T(x)) \neq \sigma_+(x, T(x))\}$. Как отмечалось выше, условие $(i1)$ влечёт существование не более чем счётного множества $t_j \in \mathbb{R}$, таких, что если $x \in \omega$, то для некоторого $j \in \mathbb{N}$ значение $T(x) = t_j$ (t_j — различные). Если допустить, что $\operatorname{mes}\omega \neq 0$, то найдётся $j \in \mathbb{N}$, такое, что мера множества

$\omega_j = \{x \in \omega : T(x) = t_j\}$ не равна нулю. С другой стороны, левая часть включения (5) равна нулю почти всюду на ω_j [10, лемма 7.7], а правая — не содержит нуль, что противоречит определению обобщённого решения.

Существование континуума положительных неподвижных точек в операторной постановке задачи у Чанга следует из полученной им общей теоремы для положительных выпуклозначных компактных отображений в банаховом пространстве с конусом. Правда, в формулировке соответствующего результата для задачи (1), (2) относительно гладкости $k(x,T)$ говорится, что она должна быть достаточной (без уточнений), и не указаны ограничения на рост $\sigma(x,T)$ при $T \to +\infty$, а проверка выполнения условий общей теоремы считается очевидной. Заметим, что из условия $(i1)$ следует суперпозиционная измеримость $\sigma_-(x,T)$ и $\sigma_+(x,T)$, так как для любого $T \in \mathbb{R}$ они измеримы по x и для любого $x \in \Omega$ функция $\sigma_-(x,\cdot)$ $(\sigma_+(x,\cdot))$ непрерывна слева (справа) на $\mathbb{R}$ [5]. Последнее существенно для подхода Чанга.

Отметим, что неравенство (4) вытекает из физического смысла функции $\sigma(x,T)$, а условие $(i1)$ представляется менее естественным. В отличие от [4; 9] в данной работе ослаблены ограничения на удельную электропроводность $\sigma(x,T)$ (не требуется выполнение условия $(i1)$). В частности, множество D точек разрыва $\sigma(x,T)$ по фазовой переменной T может быть несчётным.

1. Формулировка основного результата

Будем говорить, что для функции $k : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выполнено условие (k), если

$(k1)$ $k \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ и справедливо неравенство (3);

$(k2)$ для любого $r > 0$ существует постоянная $M > 0$, такая, что для всех $x \in \overline{\Omega}$, t_1, $t_2 \in [-r, r]$ верны неравенства $|k_{x_j}(x,t_1) - k_{x_j}(x,t_2)| \le M|t_1 - t_2|$ $(j = \overline{1,n})$ и $|k_T(x,t_1) - k_T(x,t_2)| \le M|t_1 - t_2|$.

Отметим, что если $k \in C^2(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, то функция $k(x,T)$ удовлетворяет условию (k).

Функция $\sigma : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (σ), если

$(\sigma1)$ существуют неубывающая функция $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и функция $a \in L_p(\Omega)$, $p > n$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $T \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\sigma(x,T)| \le a(x) + \psi(|T|)$;

$(\sigma2)$ функция $\sigma(x,T)$ борелева (mod 0) [2] (т. е. отлична от борелевой на $\Omega \times \mathbb{R}$ функции лишь на множестве $B \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль) и для почти всех $x \in \Omega$ и всех $T \in \mathbb{R}$ имеет место включение $\sigma(x,T) \in [\sigma_-(x,T), \sigma_+(x,T)]$.

Основным результатом работы является нижеследующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *область Ω класса $C^{1,1}$;*
2) *коэффициент теплопроводности $k(x,T)$ удовлетворяет условию (k);*
3) *удельная электропроводность $\sigma(x,T)$ удовлетворяет условию (σ) и неравенству (4).*

Тогда задача (1), (2) имеет континуум обобщённых положительных решений, соединяющий $(0,0)$ и ∞, в пространстве $\mathbb{R} \times W_p^1(\Omega)$.

Если дополнительно выполнено условие

$(\sigma3)$ *существует множество $\omega \subset \Omega$ нулевой меры Лебега, такое, что имеет меру нуль множество*

$$D = \bigcup_{x \in \Omega \setminus \omega} \{T \in \mathbb{R} : \sigma_-(x,T) \ne \sigma_+(x,T)\},$$

то все обобщённые решения задачи (1), (2) являются полуправильными.

2. Операторная постановка задачи (1)–(2). Вспомогательные результаты

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Норму в соболевском пространстве $W_p^l(\Omega)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{p,l}$, а в пространстве Лебега $L_p(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_p$ ($p \geq 1$, $l \in \mathbb{N}$). Фиксируем $T(x) \in W_p^1(\Omega)$, $p > n$, и рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(T)v \equiv -\sum_{j=1}^{n}(k(x,T(x))v_{x_j})_{x_j} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} k(x,T(x))v_{x_jx_j} - \sum_{j=1}^{n}(k_{x_j}(x,T(x)) + k_T(x,T(x))T_{x_j}(x))v_{x_j}, \tag{6}$$

где $v \in W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. В силу условия ($k1$) это равномерно эллиптический линейный оператор в Ω с коэффициентами при v_{x_j} из $L_p(\Omega)$, а $k(x,T(x)) \in W_p^1(\Omega)$ [4, лемма 2], причём α из неравенства (3) — константа равномерной эллиптичности, и существует неубывающая функция $\mu(T)$, такая, что

$$\sum_{j=1}^{n} k(x,T)\xi_j^2 \leq \mu(T)\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Более того,

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} k(x,T(x))v_{x_j}^2 dx \geq \alpha \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} v_{x_j}^2(x)dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Из чего следует, что оператор $L(T) : E \to L_p(\Omega)$ ($E = W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$) имеет ограниченный обратный, причём

$$\|v\|_{p,2} \leq \hat{M}\|L(T)v\|_p \quad \forall v \in E, \tag{7}$$

где положительная постоянная $\hat{M}$ не зависит от v [11]. Однако $\hat{M}$ зависит от $\mu(\|T\|_\infty)$, α и $\|k(x,T(x))\|_{p,1}$ [11]. Согласно [4, лемма 2] существует неубывающая функция $\theta(T)$, такая, что для всех $T \in W_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство $\|k(x,T(x))\|_{p,1} \leq \theta(\|T\|_{p,1})$. В итоге получаем следующий результат.

Лемма 1. *Пусть функция $k(x,T)$ удовлетворяет условию ($k1$), $B(\theta,R)$ — шар в пространстве $W_p^1(\Omega)$, $p > n$, радиуса R с центром в нуле. Тогда существует постоянная $\hat{M} > 0$, зависящая только от R, такая, что для любого $T \in B(\theta,R)$ верна оценка* (7).

Будем предполагать, что для функции $\sigma(x,T)$ в уравнении (1) выполняется условие (σ). Свяжем с σ многозначный оператор $F : W_p^1(\Omega) \to 2^{L_p(\Omega)}$ ($p > n$), определяемый равенством:

$$\begin{gathered} F(T) = \{z : \Omega \to \mathbb{R} : z \text{ — измеримая и} \\ z(x) \in [\sigma_-(x,T(x)), \sigma_+(x,T(x))] \text{ почти всюду на } \Omega\} \end{gathered} \tag{8}$$

для всех $T \in W_p^1(\Omega)$.

В силу условия ($\sigma 2$) имеем $\sigma(x,T(x)) \in F(T)$. Поскольку $p > n$, то $W_p^1(\Omega)$ компактно вложено в $C(\overline{\Omega})$. Отсюда из условия ($\sigma 1$) следует, что $z \in F(T)$ принадлежит

пространству $L_p(\Omega)$ и множество $F(T)$ ограничено в $L_p(\Omega)$ для любого $T \in W_p^1(\Omega)$. Кроме того, множество $F(T)$ выпукло и замкнуто в $L_p(\Omega)$. Действительно, если z_1, $z_2 \in F(T)$ и $t \in [0,1]$, то функция $(1-t)z_1(x) + tz_2(x)$ измеримая на Ω и для почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\sigma_-(x, T(x)) \le (1-t)z_1(x) + tz_2(x) \le \sigma_+(x, T(x)).$$

Из чего следует выпуклость $F(T)$. Пусть теперь последовательность $(z_n) \subset F(T)$ и $z_n \to z$ в $L_p(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность z_{n_k}, такая, что $z_{n_k} \to z(x)$ почти всюду на Ω. Поскольку $\sigma_-(x, T(x)) \le z_{n_k}(x) \le \sigma_+(x, T(x))$ почти всюду на Ω, то $z(x) \in [\sigma_-(x, T(x)), \sigma_+(x, T(x))]$ для почти всех $x \in \Omega$. Замкнутость множества $F(T)$ установлена.

Докажем, что отображение F полунепрерывно сверху на $W_p^1(\Omega)$. Это означает для любого $T_0 \in W_p^1(\Omega)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существование $\delta > 0$, такого, что для любого T из δ-окрестности точки T_0 в $W_p^1(\Omega)$ имеет место включение $F(T) \subset F(T_0) + B(\theta, \varepsilon)$, где $B(\theta, \varepsilon)$ — шар в пространстве $L_p(\Omega)$ радиуса ε с центром в нуле пространства. Рассмотрим овыпукливание по T функции $\sigma(x, T)$ при фиксированном $x \in \Omega$:

$$\sigma^{\square}(x, T) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathrm{co}}\{z = \sigma(x, s) : |s - T| < \varepsilon\} = [\sigma_-(x, T), \sigma_+(x, T)].$$

Оно порождает многозначное отображение G, определяемое равенством

$$G(T) = \{z \in L_p(\Omega) : z(x) \in \sigma^{\square}(x, T(x)) \text{ почти всюду на } \Omega\}$$

для любого $T \in C(\overline{\Omega})$. В силу условия (σ) значения G лежат в $L_p(\Omega)$. Этот оператор полунепрерывен сверху на $C(\overline{\Omega})$ [2]. Заметим, что G на $W_p^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ совпадает с F. Отсюда из компактности вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ следует полунепрерывность сверху отображения F на $W_p^1(\Omega)$. Из условия $(\sigma 1)$ следует, что образ ограниченного множества в $W_p^1(\Omega)$ при отображении F ограниченный в $L_p(\Omega)$. В итоге доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть для функции $\sigma(x, T)$ выполнено условие (σ) и $p > n$. Тогда отображение F, заданное равенством* (8)*, действует из $W_p^1(\Omega)$ в $2^{L_p(\Omega)}$, его значения — ограниченные выпуклые и замкнутые множества в $L_p(\Omega)$, оно полунепрерывно сверху и ограниченные множества переводит в ограниченные.*

Рассмотрим отображение $\Phi : W_p^1(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$, определяемое равенством $\Phi(u) = L^{-1}(u) \circ F(u)$ для любого $u \in W_p^1(\Omega)$, где $L(u)$ — дифференциальный оператор, заданный формулой (6). Выше было показано, что для любого $u \in W_p^1(\Omega)$ оператор $L(u)$ имеет ограниченный обратный, действующий из $L_p(\Omega)$ в $E = W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Так как E компактно вкладывается в $W_p^1(\Omega)$, то $L^{-1}(u) : L_p(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ компактный. Заметим, что если $u \in \lambda\Phi(u)$ $(\lambda > 0)$, то u — обобщённое решение задачи (1), (2) из пространства E. Изучим свойства отображения Φ.

Покажем, что значения Φ — это ограниченные выпуклые замкнутые множества в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Так как $L^{-1}(u)$ линейный и ограниченный оператор, а $F(u)$ — ограниченное выпуклое множество, то $\Phi(u)$ также ограниченное и выпуклое. Из замкнутости $F(u)$ и компактности $L^{-1}(u)$ следует замкнутость $\Phi(u)$. Действительно, пусть $(z_n) \subset \Phi(u)$ и $z_n \to z$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $y_n \in F(u)$, такое, что $z_n = L^{-1}(u)y_n$. Из ограниченности $F(u)$ и рефлексивности $L_p(\Omega)$ следует существование слабо сходящейся в $L_p(\Omega)$ подпоследовательности y_{n_k}

последовательности y_n к некоторому y. Так как $F(u)$ — замкнутое выпуклое множество, то оно слабо замкнуто, и, значит, $y \in F(u)$. Поскольку оператор $L(u)$ замкнутый, то его график слабо замкнут в $L_p(\Omega) \times L_p(\Omega)$. А так как $y_{n_k} = L(u)z_{n_k} \rightharpoonup y$, $z_{n_k} \to z$, то $y \in E$ и $z = L^{-1}(u)y$. Выше показано, что $y \in F(u)$. Поэтому $z \in \Phi(u)$. Замкнутость $\Phi(u)$ доказана.

При доказательстве полунепрерывности сверху отображения Φ потребуется следующее утверждение.

Лемма 3. *Предположим, что функция $k(x,T)$ удовлетворяет условию (k), $u_0 \in W_p^1(\Omega)$, $v \in W_p^2(\Omega)$, $p > n$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $K > 0$, такое, что для любого u, принадлежащего шару $B(u_0,\varepsilon)$ в пространстве $W_p^1(\Omega)$, верно неравенство $\|(L(u) - L(u_0))v\|_p \le K\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2}$.*

Доказательство. Для $u \in W_p^1(\Omega)$ и $v \in W_p^2(\Omega)$ имеем

$$-L(u)v(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} (k(x,u(x))v_{x_j})_{x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (k(x,u(x))v_{x_jx_j} + (k_{x_j}(x,u(x)) + k_u(x,u(x))u_{x_j})v_{x_j})$$

для почти всех $x \in \Omega$. Из чего следует для почти всех $x \in \Omega$

$$|(L(u) - L(u_0))v(x)| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} ((k(x,u(x)) - k(x,u_0(x)))v_{x_jx_j} + (k_{x_j}(x,u(x)) - k_{x_j}(x,u_0(x))v_{x_j} + \right.$$

$$\left. +(k_u(x,u(x))u_{x_j} - k_u(x,u_0(x))u_{0_{x_j}})v_{x_j})\right| \le$$

$$\le |k(x,u(x)) - k(x,u_0(x))| \cdot \sum_{j=1}^{n} |v_{x_jx_j}| + \sum_{j=1}^{n} |k_{x_j}(x,u(x)) - k_{x_j}(x,u_0(x))| \cdot |v_{x_j}| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |k_u(x,u(x))u_{x_j} - k_u(x,u(x))u_{0_{x_j}}| \cdot |v_{x_j}| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} |k_u(x,u(x)) - k_u(x,u_0(x))| \cdot |u_{0_{x_j}}| \cdot |v_{x_j}|. \tag{9}$$

Поскольку $p > n$, то $W_p^1(\Omega)$ компактно вложено в $C(\overline{\Omega})$. Поэтому существует константа $C > 0$, такая, что $\|u\|_\infty \le C\|u\|_{p,1}$ для любого $u \in W_p^1(\Omega)$. Если $u \in W_p^1(\Omega)$, то $|u(x) - u_0(x)| \le C\|u - u_0\|_{p,1} \le C\varepsilon$ для любого $x \in \overline{\Omega}$. Отсюда следует, что $|u(x)| \le |u_0(x)| + |u(x) - u_0(x)| \le C\|u_0\|_{p,1} + C\varepsilon$ на $\overline{\Omega}$. Пусть M — постоянная из условия $(k2)$, соответствующая $r = C\|u_0\|_{p,1} + C\varepsilon$. Тогда в силу свойства $(k2)$ получим для почти всех $x \in \Omega$

$$\begin{gathered} |k_{x_j}(x,u(x)) - k_{x_j}(x,u_0(x))| \le M|u(x) - u_0(x)| \le MC\|u - u_0\|_{p,1}, \quad j = \overline{1,n}, \\ |k_u(x,u(x)) - k_u(x,u_0(x))| \le MC\|u - u_0\|_{p,1}. \end{gathered} \tag{10}$$

Так как функция $k_u(x,T)$ непрерывна на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, то существует постоянная $M_1 > 0$, такая, что для любых $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in B(u_0,\varepsilon)$ справедливо неравенство $|k_u(x,T)| \le M_1$

для любого T, принадлежащего отрезку с концами $u_0(x)$ и $u(x)$. Из чего получаем следующие две оценки, верные для почти всех $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in B(u_0, \varepsilon)$:

$$\begin{gathered} |k(x,u(x)) - k(x,u_0(x))| \le M_1|u(x) - u_0(x)| \le M_1 C\|u - u_0\|_{p,1}, \\ |k_u(x,u(x))(u_{x_j}(x) - u_{0_{x_j}}(x))| \le M_1|u_{x_j}(x) - u_{0_{x_j}}(x)|. \end{gathered} \tag{11}$$

Из (9) в силу оценок (10), (11) для почти всех $x \in \Omega$ и любого $u \in B(u_0, \varepsilon)$ получим:

$$\begin{gathered} |(L(u) - L(u_0))v(x)| \le \\ \le M_1 C\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} |v_{x_j x_j}| + MC\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} |v_{x_j}| + \\ + M_1 \sum_{j=1}^{n} |u_{x_j}(x) - u_{0_{x_j}}(x)| \cdot |v_{x_j}| + MC\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} |u_{0_{x_j}}| \cdot |v_{x_j}|. \end{gathered} \tag{12}$$

Перейдём к оценке $\|(L(u) - L(u_0))v\|_p$. Для любого $u \in B(u_0, \varepsilon)$ в силу (12) имеем

$$\begin{gathered} \|(L(u) - L(u_0))v\|_p \le \\ \le M_1 C\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} \|v_{x_j x_j}\|_p + MC\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} \|v_{x_j}\|_p + \\ + M_1 \sum_{j=1}^{n} \|v_{x_j}\|_\infty \cdot \|(u - u_0)_{x_j}\|_p + MC\|u - u_0\|_{p,1} \sum_{j=1}^{n} \|v_{x_j}\|_\infty \cdot \|u_{0_{x_j}}\|_p \le \\ \le M_1 Cn\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2} + MCn\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2} + \\ + M_1 Cn\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2} + MC^2 n\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2}. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\|(L(u) - L(u_0))v\|_p \le K\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v\|_{p,2},$$

где $K = Cn(2M_1 + M + MC\|u_0\|_{p,1}) > 0$. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть функция $k(x,T)$ удовлетворяет условию (k), а функция $\sigma(x,T)$ — условию (σ). Тогда многозначное отображение Φ, действующее из $W_p^1(\Omega)$ в $W_p^1(\Omega)$, определяемое равенством $\Phi(u) = L^{-1}(u) \circ F(u)$, где $L(u)$ и F заданы формулами* (6) *и* (8) *соответственно, полунепрерывно сверху на $W_p^1(\Omega)$, а значения Φ — ограниченные выпуклые замкнутые множества.*

Доказательство. Пусть $u_0 \in W_p^1(\Omega)$ и $\nu > 0$. Необходимо доказать существование $\delta > 0$, такого, что для любого $u \in B(u_0, \delta)$ верно включение $\Phi(u) \subset \Phi(u_0) + B(\theta, \nu)$. Последнее означает, что для любого $v \in \Phi(u)$ найдётся $v_0 \in \Phi(u_0)$, для которого $\|v - v_0\|_{p,1} < \nu$.

Рассмотрим шар $B(u_0, \varepsilon)$ в пространстве $W_p^1(\Omega)$, где $\varepsilon > 0$ фиксировано. В силу леммы 1 существует постоянная $\hat{M} > 0$, такая, что для любых $u \in B(u_0, \varepsilon)$ и $v \in E = W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|v\|_{p,2} \le \hat{M}\|L(u)v\|_p. \tag{13}$$

Поскольку $W_p^2(\Omega)$ компактно вложено в $W_p^1(\Omega)$, то найдётся постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$\|v\|_{p,1} \le C_1 \|v\|_{p,2} \quad \forall v \in W_p^2(\Omega). \tag{14}$$

Так как отображение F полунепрерывно сверху на $W_p^1(\Omega)$ (см. лемму 2), то для $u_0 \in W_p^1(\Omega)$ и постоянной $\nu/(2\hat{M}C_1)$ найдётся $\delta_1 \in (0, \varepsilon)$, такое, что для любого $u \in B(u_0, \delta_1)$ имеет место включение $F(u) \subset F(u_0) + B(\theta, \nu/(2\hat{M}C_1))$.

Пусть $\delta_2 > 0$ удовлетворяет неравенству $K\delta_2\|v_0\| < \nu/(2\hat{M}C_1)$ для любого $v_0 \in \Phi(u_0)$, где постоянная $K > 0$ из леммы 3. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и пусть $v \in \Phi(u)$, $u \in B(u_0, \delta)$. Тогда $v = L^{-1}(u)w$, где $w \in F(u)$. Так как $F(u) \subset F(u_0) + B(\theta, \nu/(2\hat{M}C_1))$, то существует $z \in F(u_0)$, такой, что

$$\|w - z\|_p < \nu/(2\hat{M}C_1). \tag{15}$$

Из леммы 3 и выбора δ_2 следует, что если $v_0 = L^{-1}(u_0)z$, то

$$\|(L(u) - L(u_0))v_0\|_p \le K\|u - u_0\|_{p,1} \cdot \|v_0\|_{p,2} \le K\delta_2\|v_0\|_{p,2} < \nu/(2\hat{M}C_1).$$

Отсюда и из (15) получаем неравенство

$$\|L(u)(v - v_0)\|_p \le \|(L(u) - L(u_0))v_0\|_p + \|L(u)v - L(u_0)v_0\|_p \le$$

$$\nu/(2\hat{M}C_1) + \nu/(2\hat{M}C_1) = \nu/(\hat{M}C_1)$$

(здесь дополнительно воспользовались равенствами $L(u)v = w$, $L(u_0)v_0 = z$). Отсюда в силу неравенств (13), (14) получим

$$\|v - v_0\|_{p,1} \le C_1\|v - v_0\|_{p,2} \le C_1\hat{M}\|L(u)(v - v_0)\|_p \le C_1\hat{M} \cdot \frac{\nu}{\hat{M}C_1} = \nu.$$

Полунепрерывность сверху отображения $\Phi(u)$ установлена. То, что значения Φ — ограниченные выпуклые и замкнутые множества, было доказано раньше. Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда для любого ограниченного множества G в пространстве $W_p^1(\Omega)$ множество $\Phi(G)$ предкомпактно в $W_p^1(\Omega)$, где Φ — отображение, определённое в лемме* 4.

Доказательство. Пусть G — ограниченное в $W_p^1(\Omega)$ множество. Тогда в силу леммы 2 множество $F(G)$ ограничено в $L_p(\Omega)$. Пусть $v = L^{-1}(u)w$, где $w \in F(u)$, $u \in G$. Заметим, что $v \in E = W_p^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Так как G ограничено, то согласно лемме 1 существует постоянная $\hat{M}$, не зависящая от v, такая, что $\|v\|_{p,2} \le \hat{M}\|w\|_p$ для произвольного $u \in G$ и при $w \in F(u)$. Отсюда следует ограниченность $\Phi(G)$ в пространстве $W_p^2(\Omega)$. Но $W_p^2(\Omega)$ компактно вложено в $W_p^1(\Omega)$, поэтому множество $\Phi(G)$ предкомпактно в $W_p^1(\Omega)$. Лемма 5 доказана. □

Пусть X, Y — банаховы пространства, S — метрическое пространство, $\Gamma(Y)$ — множество всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств Y. Предположим, что отображение $\varphi_1 : S \to \Gamma(Y)$ — компактное, т. е. оно полунепрерывно сверху на S и $\varphi_1(S)$ — предкомпактное множество в Y, $\varphi_2 : Y \to X$ — однозначное непрерывное отображение. Тогда $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : S \to 2^X$ называется *компактной последовательностью отображений первого типа* (см. [9]).

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда для любого открытого ограниченного множества G в пространстве $W_p^1(\Omega)$ отображение Φ — компактная последовательность первого типа на $\overline{G}$.*

Доказательство. Пусть $X = Y = W_p^1(\Omega)$, $S = \overline{G}$, $\varphi_1 = \Phi$, φ_2 — тождественное отображение в $W_p^1(\Omega)$. Из лемм 4 и 5 следует, что $\varphi_1 : S \to \Gamma(Y)$ — компактное, а $\varphi_2 : Y \to X$ — однозначное непрерывное отображение. Лемма 6 доказана. □

Доказательство первого утверждения теоремы 1 (существование континуума положительных решений, соединяющего $(0,0)$ и ∞) сводится к проверке условий теоремы 2.12 из [9]. Приведём её формулировку.

Теорема 2. *Пусть X — вещественное банахово пространство, упорядоченное конусом P, и $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1 : [0,R] \times \overline{U} \to \Gamma(Y) \to 2^P$ — компактная последовательность отображений первого типа для каждого $R > 0$ и произвольного открытого ограниченного подмножества U конуса P. Предположим, что $\varphi(0,\theta) = \theta$ (θ — нуль пространства X) и θ — единственная неподвижная точка $\varphi(0,\cdot)$. Более того, предположим, что существует $\rho > 0$, такое, что $\gamma x \notin \varphi(0,x)$ для любых $x \in S_\rho^+ = \{y \in P : \|y\| = \rho\}$ и $\gamma \geq 1$. Тогда множество решений $\Sigma = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times P : x \in \varphi(\lambda, x)\}$ содержит неограниченное связное и замкнутое подмножество, содержащее $(0,\theta)$ (т. е. континуум решений, соединяющий $(0,\theta)$ и ∞).*

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 (полуправильность решений) потребуется теорема 6 из [1]. Приведём её формулировку.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2, $Lv(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)v_{x_i} + a(x)v(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор в области Ω, коэффициенты $a_{ij}(x)$ которого принадлежат $W_p^1(\Omega)$, $p > n$, $b_i(x)$ и $a(x)$ из $L_p(\Omega)$, причём $a(x) \leq 0$ почти всюду на Ω. Кроме того, для L выполнено условие коэрцитивности: существует постоянная $\alpha > 0$, такая, что

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)v_{x_i}v(x) + a(x)v^2(x) \right) dx \geq \alpha \|v\|_{2,1}^2 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Предположим, что $v(x)$ — сильное решение краевой задачи $Lv(x) = f(x)$, $x \in \Omega$, $v(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, где $f(x) > 0$ почти всюду на Ω и $f \in L_p(\Omega)$. Тогда для любого множества $\hat{\sigma}$ из $\mathbb{R}$ нулевой меры прообраз $v^{-1}(\hat{\sigma}) = \{x \in \Omega : v(x) \in \hat{\sigma}\}$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

3. Доказательство теоремы 1

Существование обобщённого решения задачи (1), (2) равносильно наличию неподвижной точки у отображения $\lambda\Phi(T) = \lambda L^{-1}(T) \circ F(T)$, где $L(T)$ определяется формулой (6), а $F(T)$ — формулой (8), в вещественном банаховом пространстве $X = W_p^1(\Omega)$. Введём отношение порядка на X с помощью конуса P неотрицательных функций из $W_p^1(\Omega)$: $u \leq v$, если $u(x) \leq v(x)$ на Ω. В силу условия 3) теоремы 1 имеем $\sigma(x,T) \geq \beta(x) > 0$ на $\Omega \times \mathbb{R}$. Поэтому из сильного принципа максимума [10] следует, что обобщённые решения задачи (1), (2) положительные в Ω. Из чего заключаем, что значения отображения $\varphi(\lambda, T) = \lambda\Phi(T)$, $\lambda \geq 0$, лежат в конусе P.

Так как $\varphi(0,T) \equiv \theta$, то у $\varphi(0,T)$ единственная неподвижная точка — θ и для любого $T \neq \theta$ и произвольного $\gamma \geq 1$ элемент $\gamma T \notin \varphi(0,T)$. Из леммы 6 следует,

что для любого открытого ограниченного множества G в $W_p^1(\Omega)$ отображение Φ — компактная последовательность первого типа на $\overline{G}$. Отсюда следует, что для любого открытого ограниченного множества G в X и произвольного $R > 0$ отображение $\varphi(\lambda, T)$ на $[0, R] \times \overline{G}$ — компактная последовательность первого типа. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2. Поэтому существует континуум решений, соединяющий $(0, \theta)$ и ∞, в множестве всех обобщённых положительных решений задачи (1), (2).

Перейдём к доказательству второго утверждения теоремы 1. Пусть $T(x)$ — обобщённое решение задачи (1), (2). Тогда существует $z(x) \in [\sigma_-(x, T(x)), \sigma_+(x, T(x))]$ для почти всех $x \in \Omega$, такая, что $L(T(x))T(x) = \lambda z(x)$ почти всюду на Ω. Согласно условию 3) теоремы 1 имеем $\sigma(x, T) \geq \beta(x) > 0$ на $\Omega \times \mathbb{R}$. Поэтому $z(x) > 0$ почти всюду на Ω. При фиксированном $T(x) \in W_p^1(\Omega)$ оператор

$$L(T(x))v(x) \equiv -\sum_{j=1}^{n} k(x, T(x))v_{x_j x_j} - \sum_{j=1}^{n} (k_{x_j}(x, T(x)) + k_T(x, T(x))T_{x_j}(x))v_{x_j}$$

удовлетворяет условиям теоремы 6 из [1], так как $k(x, T(x)) \in W_p^1(\Omega)$, а коэффициенты при v_{x_j} — непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции. Из условия ($\sigma 3$) теоремы 1 следует, что за исключением множества меры нуль $\omega \subset \Omega$ множество значений $T(x)$, для которых $\sigma_-(x, T(x)) \neq \sigma_+(x, T(x))$, имеет меру нуль. Отсюда из теоремы 6 из [1] следует, что множество $\{x \in \Omega : \sigma_-(x, T(x)) \neq \sigma_+(x, T(x))\}$ имеет меру нуль. Следовательно, $T(x)$ — полуправильное решение задачи (1), (2). Теорема 1 доказана полностью.

Список литературы

1. **Kuiper H. J.** On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2. 1971. Vol. 20, no. 2–3. P. 113–138.
2. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Системы с гистерезисом. М. : Наука, 1983.
3. **Потапов Д. К.** Об одной задаче электрофизики с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 421–424.
4. **Kuiper H. J.** Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1974. Vol. 53, no. 2. P. 178–186.
5. **Шрагин И. В.** Условия измеримости суперпозиций // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 2. С. 295–298.
6. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988.
7. **Красносельский М. А., Покровский А. В.** Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 3. С. 506–509.
8. **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений. М. : Физматгиз, 1962.
9. **Chang K. C.** Free boundary problems and the set-valued mappings // Journal of Differential Equatons. 1983. Vol. 49, no. 1. P. 1–28.
10. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М. : Наука, 1989.
11. **Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N.** Linear and quasilinear elliptic equations. New York; London : Academic Press, 1968.

Поступила в редакцию 19.03.2021.
После переработки 27.07.2021.

Сведения об авторах

Павленко Вячеслав Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: pavlenko@csu.ru.

Потапов Дмитрий Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: d.potapov@spbu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 3. P. 299–311.

DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16304

ABOUT A PROBLEM ON CONDUCTOR HEATING

V.N. Pavlenko[1,a], **D.K. Potapov**[2,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*
[a] *pavlenko@csu.ru*, [b] *d.potapov@spbu.ru*

Kuiper's problem on conductor heating in a uniform electric field of intensity $\sqrt{\lambda}$ with a positive parameter λ is considered. The conductor temperature distribution is a solution to the Dirichlet problem with homogeneous initial data in a bounded domain for a quasilinear elliptic equation with a discontinuous nonlinearity and a parameter. The heat-conductivity coefficient depends on the spatial variable and temperature, and the specific electric conductivity has discontinuities with respect to the phase variable. The existence of a continuum of generalized positive solutions that connects $(0,0)$ to ∞ is proved by a topological method. A sufficient condition is obtained for such solutions to be semiregular. Compared to the papers of H.J. Kuiper and K.C. Chang, the restrictions on the discontinuous nonlinearity (the specific electric conductivity) are weaken.

Keywords: *Kuiper's problem, conductor heating, quasilinear elliptic equation, discontinuous nonlinearity, continuum of positive solutions, semiregular solution, topological method.*

References

1. **Kuiper H.J.** On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2*, 1971, vol. 20, no. 2–3, pp. 113–138.
2. **Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V.** *Systems with Hysteresis.* Berlin, Springer-Verlag, 1989.
3. **Potapov D.K.** On one problem of electrophysics with discontinuous nonlinearity. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 419–422.
4. **Kuiper H.J.** Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1974, vol. 53, no. 2, pp. 178–186.
5. **Shragin I.V.** Conditions for measurability of superpositions. *Soviet Mathematics Doklady*, 1971, vol. 12, pp. 465–470.
6. **Sobolev S.L.** *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* American Mathematical Society, 1991.
7. **Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V.** Regular solutions of equations with discontinuous nonlinearities. *Soviet Mathematics Doklady*, 1976, vol. 17, pp. 128–132.
8. **Krasnosel'skii M.A.** *Positive Solutions of Operator Equations.* Groningen, Noordhoff Ltd., 1964.
9. **Chang K.C.** Free boundary problems and the set-valued mappings. *Journal of Differential Equations*, 1983, vol. 49, no. 1, pp. 1–28.
10. **Gilbarg D., Trudinger N.S.** *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Berlin, Springer-Verlag, 1983.
11. **Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* New York, London, Academic Press, 1968.

Accepted article received 19.03.2021.
Corrections received 27.07.2021.

The research was funded by RFBR and Chelyabinsk Region, project number 20-41-740003.