ФИЗИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 767–776.

УДК 537.9+537.6 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-767-776

ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА НА ОБЪЁМНО-ЦЕНТРИРОВАННОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ

А. К. Муртазаев, К. Ш. Муртазаев[a], М. А. Магомедов[b], М. К. Рамазанов, М. Р. Джамалудинов

Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия
[a] 5kurban@mail.ru, [b] magomedov_ ma@mail.ru

Репличным алгоритмом метода Монте-Карло выполнено исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга на объёмно-центрированной кубической решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля. Изучено влияние внешнего магнитного поля на термодинамические и магнитные свойства данной модели. Получены температурные и полевые зависимости основных термодинамических параметров. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины внешнего магнитного поля для рассматриваемой модели. Получены магнитные структуры основного состояния в широком интервале магнитного поля.

Ключевые слова: *метод Монте-Карло, магнитное поле, спиновая система, объёмно-центрированная кубическая решётка, модель Гейзенберга.*

Введение

В физике конденсированного состояния в последнее время большой интерес вызывают исследования спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями. Исследование фазовых переходов (ФП) и термодинамических свойств таких систем позволяет получить ответы на актуальные вопросы в теории фазовых переходов и магнетизма [1]. Большинство работ посвящено исследованиям с треугольной решёткой или двумерным системам [2–4]. Трёхмерная модель Гейзенберга на объёмно-центрированной кубической (ОЦК) решётке с учётом конкурирующих обменных взаимодействий изучалась разными методами. Термодинамические свойства квантовой антиферромагнитной модели Гейзенберга с учётом взаимодействия первых J_1 и вторых ближайших соседей J_2 со спиновой и одноионной анизотропией на ОЦК решётке исследованы в работах [5; 6]. В этих работах с использованием метода функции Грина второго порядка в рамках приближения случайных фаз исследована область, где $J_2/J_1<2/3$, т. е. фаза Нееля. Анализируется влияние фрустрации на характер температурной зависимости намагниченности подрешётки. Проведён анализ влияния спиновой и одноионной анизотропии на намагниченность подрешёток, температуру Нееля, свободную и внутреннюю энергию. В ряде работ

Исследование выполнено в рамках научной программы НЦФМ (проект «Исследования в сильных и сверхсильных магнитных полях»).

проведена оценка влияния вторых ближайших соседей J_2 на критическую температуру для модели Гейзенберга на ОЦК решётке с ферро- и антиферромагнитными взаимодействиями разными методами и алгоритмами: высокотемпературным разложением для структурного фактора [7], с помощью функции Грина второго порядка [8], с помощью анализа высокотемпературных разложений подрешёточной восприимчивости [9].

Для антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с помощью метода Монте-Карло (МК) было исследовано влияние J_2 на критическую температуру и на род ФП. Получены структуры основного состояния в широком диапазоне значений $k{=}J_2/J_1$. Для данной модели было показано, что изменение обменных взаимодействий J_2 приводит к изменению рода ФП, температуры ФП и класса универсальности [10–12]. Для этой же модели без учёта внешнего магнитного поля (МП) было показано, что изменение величины взаимодействия вторых ближайших соседей приводит к изменению структур основного состояния [13; 14].

Однако невыясненными остаются вопросы, связанные с влиянием внешнего МП на ФП, термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитной модели Гейзенберга. Насколько нам известно, исследование классической модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего МП до сих пор никем не проводилось. В ряде работ показано, что учёт внешнего МП ведёт к изменению многих свойств фундаментального характера в антиферромагнитных спиновых системах [14–16].

В данной работе на основе метода МК проведены исследования антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля. Исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями на основе современных методов позволит получить ответы на вопросы, связанные с ФП, термодинамическими и магнитными свойствами спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями.

1. Модель и метод исследования

Гамильтониан системы может быть представлен в следующем виде [17]:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (\overrightarrow{S}_i \cdot \overrightarrow{S}_l) - h \sum_{\langle i \rangle} \overrightarrow{S}_i,$$

где $\vec{S}_i$ — трёхкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Первый член в формуле учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей ($J_1{<}0$), а второй — следующих за ближайшими соседей ($J_2{<}0$). h — величина магнитного поля (приводится в единицах $|J_1|$). Магнитное поле менялось в интервале $0 \leqslant h \leqslant 20$. В данной работе рассматривается случай, когда величины обменных взаимодействий $J_2 = J_1 = -1.0$, а величина $k = J_2/J_1 = 1$.

Известно, что для данной антиферромагнитной модели при $k = 1$ в системе наблюдается антиферромагнитная фаза 2-го типа AF2 [10]. Для правильного описания этой фазы необходимы четыре подрешётки. Схематически модель представлена на рис. 1, *a*. Антиферромагнитная фаза AF2 приведена на рис. 1, *b* [10; 18–20].

Моделирование методом Монте-Карло — один из наиболее мощных методов статистической физики, широко применяемый для изучения ФП и критических явлений. Теоретические и экспериментальные подходы к исследованию процессов вблизи критических температур зачастую оказываются менее эффективными [21]. В данной работе используется метод Монте-Карло. С помощью этого метода при

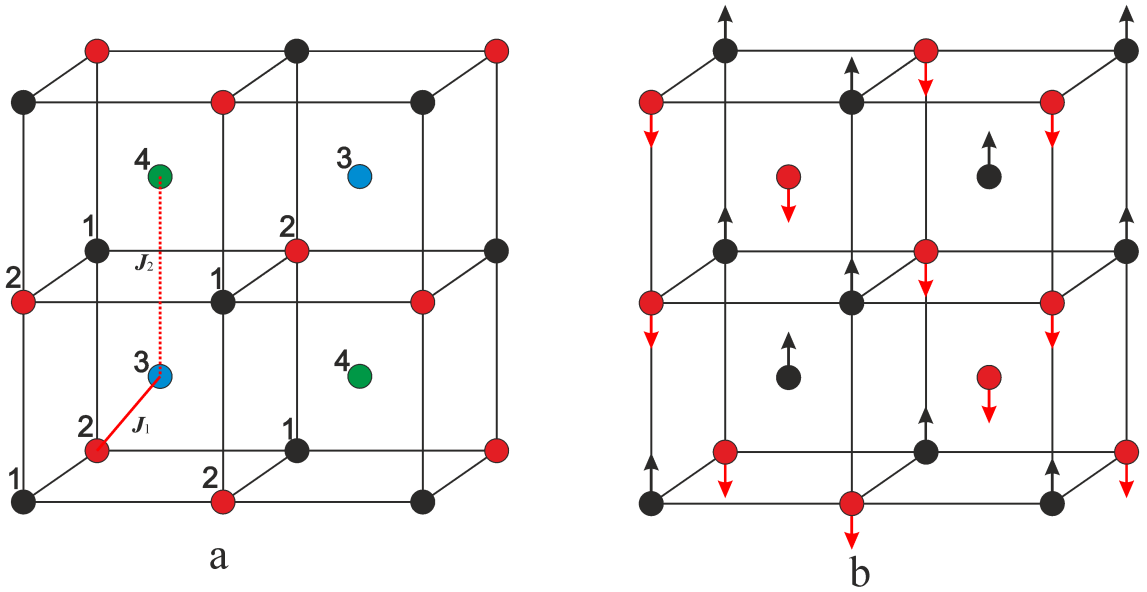

Рис. 1. a) схематическое изображение объёмно-центрированной кубической решётки, цифрами обозначены четыре подрешётки; b) AF2 упорядоченная фаза

изучении систем с конкурирующими обменными взаимодействиями и внешними магнитными полями можно выявить чёткую зависимость термодинамических параметров от взаимодействия вторых ближайших соседей и внешнего магнитного поля. Спиновые системы с дальнодействующими обменными взаимодействиями и дополнительными внешними факторами успешно изучаются этим методом. В данном исследовании мы используем репличный алгоритм метода МК. Он обладает рядом преимуществ над классическим алгоритмом Метрополиса [22; 23].

Расчёты проводились с использованием периодических граничных условий и линейными размерами $L = 12$–24, $N = 2\text{x}L\text{x}L\text{x}L$, где L измеряется в размерах элементарной ячейки, N — количество спинов в системе. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 = 10^5$ МК шагов на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка тестируемой модели. Усреднение вычисляемых параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau{=}10\tau_0$ МК шагов на спин.

2. Результаты Монте-Карло моделирования

Для построения температурной зависимости теплоёмкости использовалось выражение [24]: $C = (NK^2)\left(\langle U^2\rangle - \langle U\rangle^2\right)$, где $K = |J_1|/k_BT$, U — внутренняя энергия.

Магнитная восприимчивость вычислялась по формуле [25]

$$\chi = \begin{cases} (NK)\left(\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2\right), & T < T_N, \\ (NK)\langle m^2\rangle, & T \geqslant T_N, \end{cases}$$

где m — намагниченность, T_N — критическая температура. Для намагниченности системы использовалась формула

$$m = \frac{3}{N}\sqrt{\left\langle M_x^2 + M_y^2 + M_z^2\right\rangle/3}.$$

Намагниченность подрешёток вычислялась по формуле $\langle|\vec{M}_r|\rangle = \langle\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\rangle$, где $r = 1, 2, 3, 4$ — номер подрешётки (рис. 1, *a*).

Температурные зависимости для теплоёмкости и восприимчивости приведены на рис. 2. Отметим, что рост значения h сопровождается сдвигом максимумов в сторону более низких температур, одновременно с этим наблюдается спад абсолютных

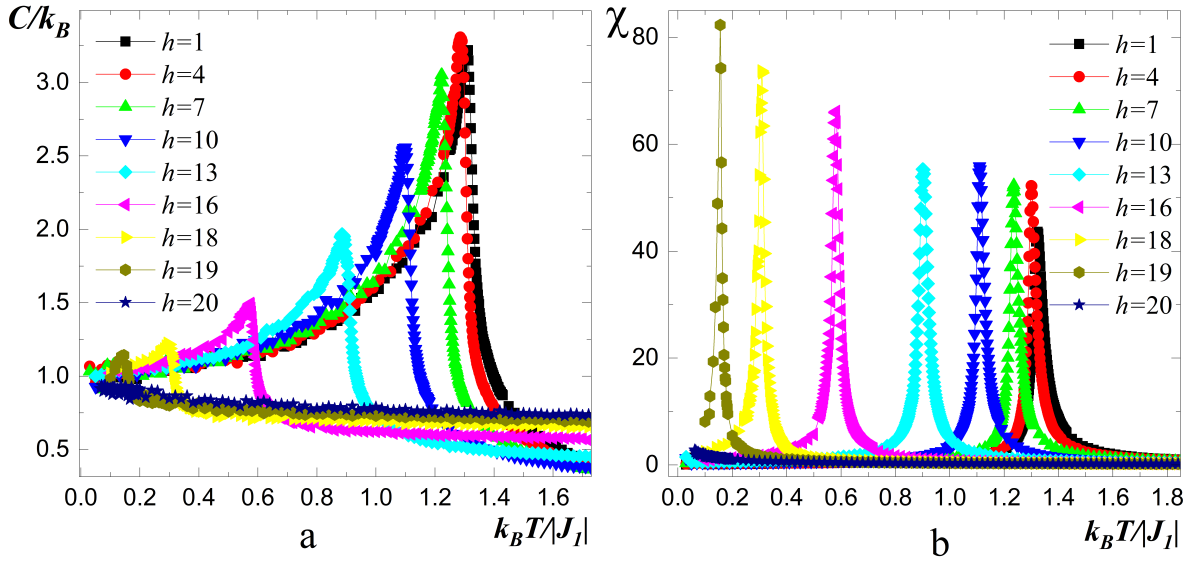

Рис. 2. a) Зависимость теплоёмкости C/k_B от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных значений h; b) зависимость магнитной восприимчивости χ от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных значений h

значений максимумов теплоёмкости и не значительный рост абсолютных значений восприимчивости. Очевидно, что это связано с подавлением флуктуаций с увеличением магнитного поля. Рост абсолютных значений магнитной восприимчивости (рис. 2, *b*) при росте значения МП связан с тем, что происходит рост флуктуаций намагниченности в точке ФП. Рост значения магнитного поля смещает температуру упорядочения к более низким значениям. На рис. 2 видно, что с увеличением МП температура ФП стремится к нулю и в конце концов размывается ФП.

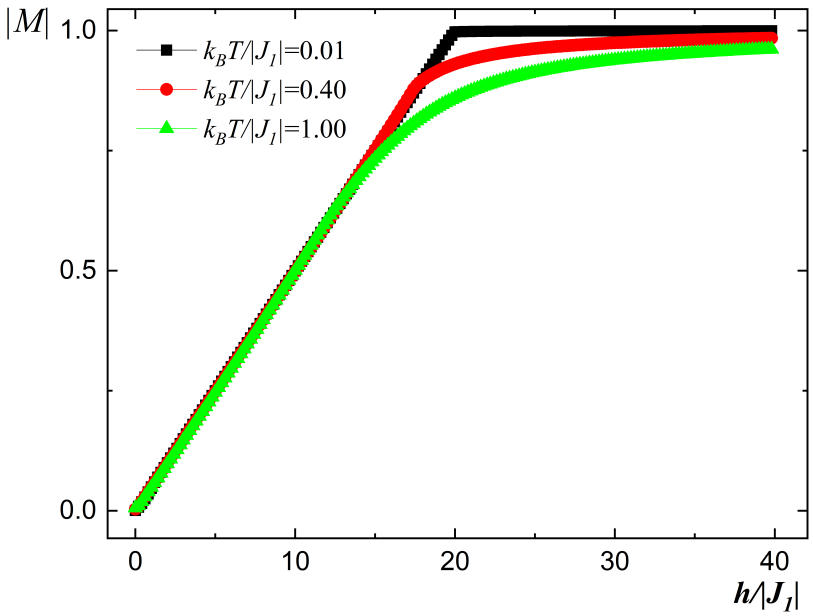

Рис. 3. Зависимость намагниченности m от магнитного поля $h/|J_1|$ для разных значений температур

На рис. 3 представлена зависимость намагниченности m от величины МП для разных значений температур. В антиферромагнитной модели Гейзенберга наблюдается единственное плато намагниченности, которое соответствует ферромагнитному упорядочению. Для основного состояния при $k_BT/|J_1| = 0.01$ с ростом поля намагниченность растёт прямолинейно и доходит до значения $m = 1$. Можно заметить, что для температур $k_BT/|J_1| = 0.4$ и 1.0 не достигается полное насыщение намагниченности при том же значении поля, что и для $k_BT/|J_1| = 0.01$. Это связано с температурными флуктуациями.

Для определения критический температуры T_N и анализа природы ФП был использован метод кумулянтов Биндера U_L четвёртого порядка [24–26]

$$U_L = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle_L}{3 \langle M^2 \rangle_L^2}.$$

На рис. 4 представлены зависимости кумулянтов Биндера четвёртого порядка

U_L для разных размеров системы L при значении магнитного поля $h = 7.0$. На рисунке видна отчётливая точка пересечения кривых при $T_N = 1.231$, которая свидетельствует, что в системе реализуется ФП второго рода. С помощью данного метода можно с высокой точностью определить температуру ФП и его тип. Точка пересечения кривых кумулянтов Биндера для разных линейных размеров указывает на критическую температуру [24–26].

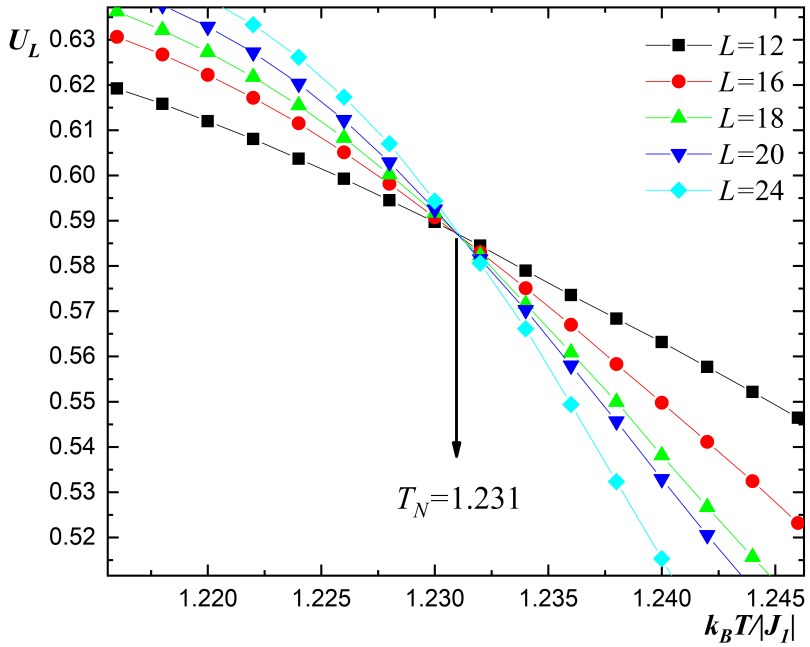

Рис. 4. Зависимость кумулянта Биндера U_L от температуры $k_BT/|J_1|$ для разных L при $h = 7.0$

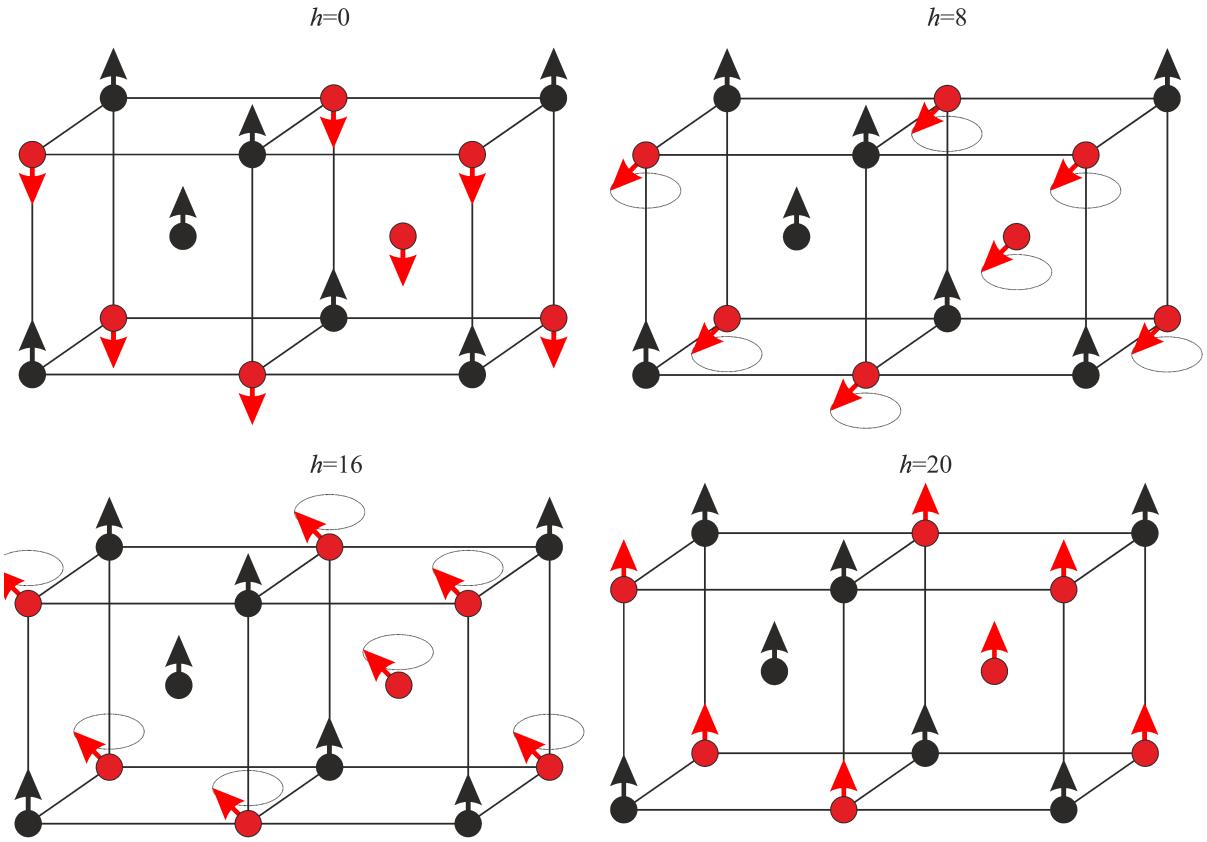

Рис. 5. Магнитное упорядочение подрешёток при наличии внешнего магнитного поля

Аналогичные зависимости кумулянтов Биндера были получены для всех значений магнитного поля в интервале $0 \leqslant h \leqslant 19$. Анализ наших результатов показывает, что в интервале $0 \leqslant h \leqslant 19$ наблюдается ФП второго рода.

На рис. 5 приведены магнитные структуры основного состояния при разных значениях магнитного поля. Магнитное поле направлено вдоль спинов, окрашенных чёрным цветом (вверх). Структуры получены в основном состоянии при близкой к нулю температуре. Видно, что с увеличением значения МП спины подрешёток, направленные против направления МП, ориентируются по направлению поля. При достижении магнитного поля $h = 20.0$ система в основном состоянии упорядочена ферромагнитно.

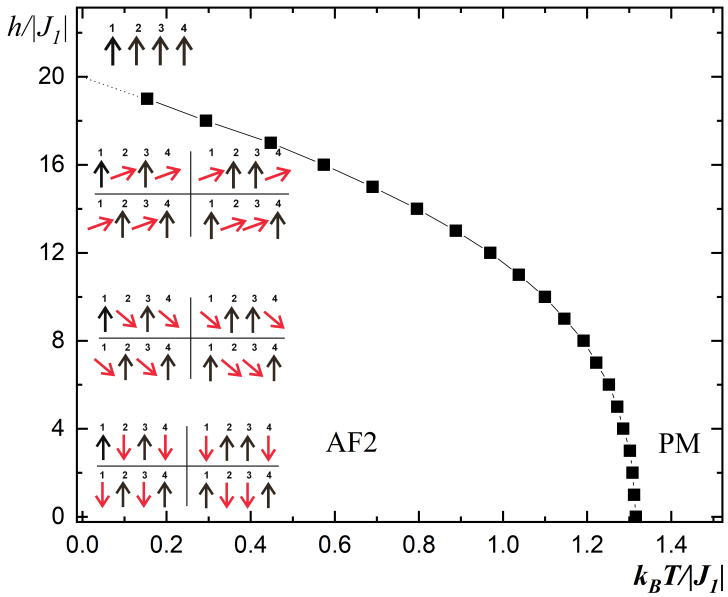

Рис. 6. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от магнитного поля $h/|J_1|$

На рис. 6 показана фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля h. Чёрными и красными стрелками обозначены направления спинов в каждой подрешётке, а цифры над стрелками указывают на номер подрешётки. При небольшом или нулевом значении магнитного поля система имеет упорядочение типа AF2. AF2 может иметь 4 вариации антиферромагнитного упорядочения, как показано на рис. 6 [10]. На рис. 6 видно, что с увеличением значения МП две противонаправленные подрешётки плавно поворачиваются по направлению магнитного поля и при значении магнитного поля $h = 20$ система переходит в ферромагнитное состояние. Дальнейшее увеличение магнитного поля $h \geqslant 20$ подавляет ФП. Анализ результатов показывает, что во всём интервале значения магнитного поля $0 \leqslant h \leqslant 19$ в системе реализуется ФП второго рода из антиферромагнитной фазы AF2 в парамагнитную фазу PM. С увеличением значения магнитного поля антиферромагнитная фаза основного состояния плавно переходит в ферромагнитную фазу.

Заключение

Проведены исследования антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с учётом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей для $k = J_2/J_1 = 1$ при наличии внешнего магнитного поля. Получены зависимости теплоёмкости C, восприимчивости χ от температуры для разных значений МП. Также построены зависимости намагниченности m от величины магнитного поля для раз-

ных температур. Определён род фазового перехода в большом интервале магнитного поля и показано, что в системе реализуется только ФП второго рода. Получены магнитные структуры основного состояния для разных значений МП. Показано, что в основном состоянии для данной модели реализуется AF2-упорядочение. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины магнитного поля антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решётке с конкурирующими обменными взаимодействиями.

Список литературы

1. **Lacroix C., Mendels P., Mila F. (eds.)** Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011.
2. **Chubukov A. V., Golosov D. I.** Quantum theory of an antiferromagnet on a triangular lattice in a magnetic field // Journal of Physics: Condensed Matter. 1991. Vol. 3. P. 69.
3. **Kawamura H.** Monte Carlo study of chiral criticality — XY and Heisenberg stacked-triangular antiferromagnets // Journal of the Physical Society of Japan. 1992. Vol. 61, no. 4. P. 1299–1325.
4. **Gvozdikova M., Melchy P., Zhitomirsky M.** Magnetic phase diagrams of classical triangular and kagome antiferromagnets // Journal of Physics: Condensed Matter. 2011. Vol. 23. P. 164209.
5. **Mi B.-Zh.** Thermodynamic properties of frustrated arbitrary spin-S J1-J2 quantum Heisenberg antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation // Solid State Communications. 2016. Vol. 239. P. 20–26.
6. **Mi B.-Zh.** Magnetism and thermodynamics of the anisotropic frustrated spin-1 Heisenberg antiferromagnet on a body-centered cubic lattice // Solid State Communications. 2017. Vol. 251. P. 79–87.
7. **Richter J., Meuller P., Lohmann A., et al.** High-temperature expansion for frustrated magnets: Application to the J1-J2 model on the BCC lattice // Physics Procedia. 2015. Vol. 75. P. 813–820.
8. **Sushkov O. P., Oitmaa J., Weihong Z.** Quantum phase transitions in the two-dimensional J1-J2 model // Physical Review B. 2001. Vol. 63. P. 104420.
9. **Richter J., Ivanov N. B., Retzlaff K.** On the violation of Marshall–Peierls sign rule in the frustrated J1-J2 Heisenberg antiferromagnet // Europhysics Letters. 1994. Vol. 25. P. 545–550.
10. **Murtazaev A. K., Kurbanova D. R., Ramazanov M. K.** Phase transitions and critical properties of the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with second-neighbor interactions // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 2019. Vol. 156, no. 5. P. 980–988.
11. **Murtazaev A. K., Kurbanova D. R., Ramazanov M. K.** Phase diagram of the antiferromagnetic Heisenberg model on a bcc lattice with competing first and second neighbor interactions // Physica A. 2020. Vol. 545. P. 123548.
12. **Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Kurbanova D. R., et al.** Phase transitions and the critical properties of the Heisenberg model on a body-centered cubic lattice // Physics of the Solid State. 2019. Vol. 61. P. 1107–1112.
13. **Binder K., Landau D. P.** Phase diagrams and critical behavior in Ising square lattices with nearest- and next-nearest-neighbor interactions // Physical Review B. 1980. Vol. 21, no. 5. P. 1941–1962.
14. **Ye M., Chubukov A. V.** Quantum phase transitions in the Heisenberg J1-J2 triangular antiferromagnet in a magnetic field // Physical Review B. 2017. Vol. 95. P. 014425.
15. **Kazuaki M., Yukiyasu O.** Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field // Physical Review B. 2020. Vol. 101. P. 184427.

16. **Yamamoto D., Suzuki C., Marmorini G., et al.** Quantum and thermal phase transitions of the triangular SU(3) Heisenberg model under magnetic fields // Physical Review Letters. 2020. Vol. 125. P. 057204.
17. **Moran-Lopez J. L., Aguilera-Granja F., Sanchez J. M.** Phase transitions in king square antiferromagnets with first and second-neighbour interactions // Journal of Physics: Condensed Matter. 1994. Vol. 6. P. 9759–9772.
18. **Banavar J. R., Jasnow D., Landau D. P.** Fluctuation-induced first-order transition in a bcc Ising model with competing interactions // Physical Review B. 1979. Vol. 20, no. 9. P. 3820–3827.
19. **Oitmaa J., Zheng W.** Phase diagram of the bcc S=1/2 Heisenberg antiferromagnet with first and second neighbor exchange // Physical Review B. 2004. Vol. 69. P. 064416.
20. **Pantic M. R., Kapor D., Radosevic S., et al.** Phase diagram of spin-1/2 quantum Heisenberg J1-J2 antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation // Solid State Communications. 2014. Vol. 182. P. 55–58.
21. **Metropolis N., Rosenbluth W., Rosenbluth N., et al.** Equation of state calculations by fast computing machines // The Journal of Chemical Physics. 1953. Vol. 21, no. 6. P. 1087–1092.
22. **Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y.** Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers // Peptide Science. 2001. Vol. 60. P. 96.
23. **Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Badiev M. K.** Phase transitions and critical phenomena in the antiferromagnetic Ising model on a layered triangular lattice // Physica A. 2018. Vol. 507. P. 210–218.
24. **Binder K., Wang J. Sh.** Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations // Journal of Statistical Physics. 1989. Vol. 55. P. 87–126.
25. **Peczak P., Alan M., Ferrenberg A. M., et al.** High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet // Physical Review B. 1991. Vol. 43, no. 7. P. 6087–6093.
26. **Binder K., Heermann D. W.** Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. An Introduction. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1988.

Поступила в редакцию 30.04.2025.
После переработки 04.08.2025.

Сведения об авторах

Муртазаев Акай Курбанович, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, директор Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, Махачкала, Россия; e-mail: akai2005@mail.ru

Муртазаев Курбан Шамильевич, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: 5kurban@mail.ru.

Магомедов Магомед Алиевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной физики и физики фазовых переходов, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: magomedov_ma@mail.ru

Рамазанов Магомедшейх Курбанович, кандидат физико-математических наук, заведеющий лабораторией математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: sheikh77@mail.ru

Джамалудинов Магомед Русланович, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования конденсированных сред, Институт физики им. Х. И. Амирханова ДФИЦ РАН, Махачкала, Россия; e-mail: dzhamaludinov.1993@mail.ru

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 767–776.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-767-776

STUDY OF THE ANTIFERROMAGNETIC HEISENBERG MODEL ON A BODY-CENTERED CUBIC LATTICE

A.K. Murtazaev, K.Sh. Murtazaev[a], M.A. Magomedov[b], M.K. Ramazanov, M.R. Jamaludinov

Institute of Physics named after Kh.I. Amirkhanov, Dagestan Federal Research Center of RAS, Makhachkala, Russia

[a] 5kurban@mail.ru, [b] magomedov_ma@mail.ru

Monte Carlo replica-exchange algorithm was used to study the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with competing exchange interactions in the presence of an external magnetic field. The influence of the external magnetic field on the thermodynamic and magnetic properties of this model was investigated. Temperature and field dependences of the main thermodynamic parameters were obtained. A phase diagram of the critical temperature as a function of the external magnetic field was constructed for the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice. The ground-state magnetic structures were obtained over a wide range of magnetic fields.

Keywords: *Monte Carlo method, magnetic field, spin system, volume-centered cubic lattice, Heisenberg model.*

References

1. **Lacroix C., Mendels P., Mila F. (eds.)** *Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2011.
2. **Chubukov A.V., Golosov D.I.** Quantum theory of an antiferromagnet on a triangular lattice in a magnetic field. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1991, vol. 3, p. 69.
3. **Kawamura H.** Monte Carlo study of chiral criticality — XY and Heisenberg stacked-triangular antiferromagnets. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1992, vol. 61, no. 4, pp. 1299–1325.
4. **Gvozdikova M., Melchy P., Zhitomirsky M.** Magnetic phase diagrams of classical triangular and kagome antiferromagnets. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2011, vol. 23, p. 164209.
5. **Mi B.-Zh.** Thermodynamic properties of frustrated arbitrary spin-S J1-J2 quantum Heisenberg antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation. *Solid State Communications*, 2016, vol. 239, pp. 20–26.
6. **Mi B.-Zh.** Magnetism and thermodynamics of the anisotropic frustrated spin-1 Heisenberg antiferromagnet on a body-centered cubic lattice. *Solid State Communications*, 2017, vol. 251, pp. 79–87.
7. **Richter J., Meuller P., Lohmann A., et al.** High-temperature expansion for frustrated magnets: Application to the J1-J2 model on the BCC lattice. *Physics Procedia*, 2015, vol. 75, pp. 813–820.
8. **Sushkov O.P., Oitmaa J., Weihong Z.** Quantum phase transitions in the two-dimensional J1-J2 model. *Physical Review B*, 2001, vol. 63, p. 104420.
9. **Richter J., Ivanov N.B., Retzlaff K.** On the violation of Marshall–Peierls sign rule in the frustrated J1-J2 Heisenberg antiferromagnet. *Europhysics Letters*, 1994, vol. 25, pp. 545–550.

The work was performed within the framework of the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics (NCPM) under the project “Research in High and Ultra-High Magnetic Fields”.

10. **Murtazaev A.K., Kurbanova D.R., Ramazanov M.K.** Phase transitions and critical properties of the antiferromagnetic Heisenberg model on a body-centered cubic lattice with second-neighbor interactions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 156, no. 5, pp. 980–988.
11. **Murtazaev A.K., Kurbanova D.R., Ramazanov M.K.** Phase diagram of the antiferromagnetic Heisenberg model on a bcc lattice with competing first and second neighbor interactions. *Physica A*, 2020, vol. 545, p. 123548.
12. **Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Kurbanova D.R., et al.** Phase transitions and the critical properties of the Heisenberg model on a body-centered cubic lattice. *Physics of the Solid State*, 2019, vol. 61, pp. 1107–1112.
13. **Binder K., Landau D.P.** Phase diagrams and critical behavior in Ising square lattices with nearest- and next-nearest-neighbor interactions. *Physical Review B*, 1980, vol. 21, no. 5, pp. 1941–1962.
14. **Ye M., Chubukov A.V.** Quantum phase transitions in the Heisenberg J1-J2 triangular antiferromagnet in a magnetic field. *Physical Review B*, 2017, vol. 95, p. 014425.
15. **Kazuaki M., Yukiyasu O.** Dynamical scaling analysis of symmetry breaking for the antiferromagnetic triangular Heisenberg model in a uniform magnetic field. *Physical Review B*, 2020, vol. 101, p. 184427.
16. **Yamamoto D., Suzuki C., Marmorini G., et al.** Quantum and thermal phase transitions of the triangular SU(3) Heisenberg model under magnetic fields. *Physical Review Letters*, 2020, vol. 125, p. 057204.
17. **Moran-Lopez J.L., Aguilera-Granja F., Sanchez J.M.** Phase transitions in king square antiferromagnets with first and second-neighbour interactions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1994, vol. 6, pp. 9759–9772.
18. **Banavar J.R., Jasnow D., Landau D.P.** Fluctuation-induced first-order transition in a bcc Ising model with competing interactions. *Physical Review B*, 1979, vol. 20, no. 9, pp. 3820–3827.
19. **Oitmaa J., Zheng W.** Phase diagram of the bcc S=1/2 Heisenberg antiferromagnet with first and second neighbor exchange. *Physical Review B*, 2004, vol. 69, p. 064416.
20. **Pantic M.R., Kapor D., Radosevic S., et al.** Phase diagram of spin-1/2 quantum Heisenberg J1-J2 antiferromagnet on the body-centered-cubic lattice in random phase approximation. *Solid State Communications*, 2014, vol. 182, pp. 55–58.
21. **Metropolis N., Rosenbluth W., Rosenbluth N., et al.** Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 1953, vol. 21, no. 6, pp. 1087–1092.
22. **Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y.** Generalized-ensemble algorithms for molecular simulations of biopolymers. *Peptide Science*, 2001, vol. 60, p. 96.
23. **Murtazaev A.K., Ramazanov M.K., Badiev M.K.** Phase transitions and critical phenomena in the antiferromagnetic Ising model on a layered triangular lattice. *Physica A*, 2018, vol. 507, pp. 210–218.
24. **Binder K., Wang J.Sh.** Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations. *Journal of Statistical Physics*, 1989, vol. 55, pp. 87–126.
25. **Peczak P., Alan M., Ferrenberg A.M., et al.** High-accuracy Monte Carlo study of the three-dimensional classical Heisenberg ferromagnet. *Physical Review B*, 1991, vol. 43, no. 7, pp. 6087–6093.
26. **Binder K., Heermann D.W.** *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics. An Introduction.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1988.

Article received 30.04.2025.
Corrections received 04.08.2025.