Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 701–714.

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-701-714

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА ПОГЛОЩЕНИЯ В УРАВНЕНИЯХ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Ю. А. Тукмачева[a], С. Г. Пятков[b]

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия
[a] *y_tukmacheva@ugrasu.ru*, [b] s_pyatkov@ugrasu.ru

Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении постоянной, стоящей перед младшим коэффициентом (коэффициентом поглощения) в параболическом уравнении. Доказана теорема существования и единственности решения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и свойствах решений параболических задач. Использованный метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи.

Ключевые слова: *обратная задача, параметр поглощения, параболическое уравнение, тепломассоперенос.*

Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении числового параметра, стоящего перед младшим коэффициентом в параболическом уравнении вида

$$Mu = u_t - Lu + g(t,x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} - a_0(t,x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ, $g(t,x) = \alpha\Phi_1(t,x)$ и α — неизвестный параметр, который подлежит определению. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$Bu|_S = g_0(t,x) \quad (S = (0,T) \times \Gamma), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma(t,x)u$ или $Bu = u$ и $\vec{\gamma}(t,x)$ — некасательное к Γ векторное поле, направленное вне области G, и условием переопределения

$$u(t_1,y_1) = \psi_1, \tag{3}$$

где $(t_1,y_1) \in \overline{Q}$, $y_1 \in G$, $0 < t_1 \leqslant T$. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), и неизвестного параметра α, функция Φ_1 считается заданной.

Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: описание различных процессов тепломассопереноса [1–4], фильтрации, экологии (определение потоков парниковых газов [5–7], описание процессов поглощения метана в почвах [8–10] и др. В частности, в работах [8–10] функция $g(t,x) \equiv g(x)$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (грант № 25-11-20026).

скорость поглощения метана в почвах. Соответствующая модель предложена в работе [8]. В работах [9; 10] рассмотрен вопрос о численном определении скорости поглощения $g(x)$ в стационарном случае. Отметим, что изучение величин потребления (удельных потоков) CH_4, понимание процессов, обусловливающих его временную и пространственную динамику, а также моделирование потребления необходимы для построения обоснованных климатических прогнозов. Как известно, потребление метана в почве за счёт окисления метанотрофными бактериями в автоморфных почвах — единственный известный биологический механизм стока для атмосферного метана [11].

В настоящее время имеется большое количество работ, посвящённых исследованию обратных задач об определении младшего коэффициента в параболическом уравнении в различных постановках, возникающих в приложениях. Прежде всего отметим работу [12], где рассмотрена задача об определении коэффициента $g = g(x)$ по условию финального переопределения, т. е. условие (3) заменяется на условие $u(T, x) = \varphi(x)$. Эта задача совпадает с классической задачей управления: перевести систему из заданного состояния u_0 в состояние $u(T, x)$ за счёт изменения параметров системы. В этой работе получена теорема существования и единственности классических решений задачи. Доказательства основаны на принципе максимума, и коэффициент g ищется знакоопределённым. Эти результаты также изложены в монографии [2]. Аналогичный результат, но уже с интегральным условием переопределения имеется в работе [13], где также можно найти и подробную библиографию. Теорема существования и единственности решений задачи об определении коэффициента $g = g(x)$ в случае финального переопределения имеется также в работе [14] (см. также [15]), где основное условие на данные — условие малости временного интервала. В работе [16] требуется выполнение некоторых неравенств, связывающих между собой нормы данных, фактически эти условия есть условия малости данных. Аналогичные условия требуются и в работе [17], где коэффициент g ищется в виде $g(t, x) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x)\Phi_i(t, x)$ с неизвестными функциями $g_i(x)$ и дополнительно задаются значения решения $u(t_i, x)$ в некотором наборе точек $t = t_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Здесь также получены теоремы существования и единственности решений. В работе [18] рассматривается одномерная задача, где коэффициент $g(x)$ определяется по данным Коши на боковой стороне прямоугольника. Отметим также работы [19; 20], где рассматриваются вопросы корректности задачи определения функции $g(x)$ с использованием интегральных условий переопределения. Гораздо больше работ посвящено определению младшего коэффициента g, зависящего от времени. Мы сошлёмся только на работы [21–24], где можно найти библиографию. Сошлёмся также на работы [25; 26], где коэффициент $g = g(t)$ определяется численно, хотя можно отметить, что таких работ очень много. Условия переопределения вида (3) использовались в ряде работ для определения различных параметров в уравнении (см., например, [27]).

Обратные задачи определения параметров (постоянных коэффициентов) в параболических уравнениях ранее изучались (см. работы [28–32], для иных классов уравнений см. [33–35]). Однако в этих работах задача исследовалась с другими условиями переопределения. Предложенная постановка рассматривалась, например, в работе [27] и ряде других [8–10] и кажется нам довольно естественной. Мы не нашли теоретических результатов, посвящённых задаче (1)–(3) в литературе. Наши результаты наиболее близки к результатам работы [17]. В работе основное внимание посвящено условиям существования решения задачи (1)–(3) в классах Соболева. Полученные результаты допускают обобщение в том числе и на квази-

линейный случай и могут послужить основой для создания численного алгоритма. Они основаны на принципе максимума для параболических задач.

1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G;E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определённых на G со значениями в E и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [36]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и т. д. стандартные (см. [36; 37]). Если $E=\mathbb{R}$ или $E=\mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q}), C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [38]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J=(0,T)$, положим $W_p^{s,r}(Q)=W_p^s(J;L_p(G))\cap L_p(J;W_p^r(G))$. Соответственно, $W_p^{s,r}(S)=W_p^s(J;L_p(\Gamma))\cap L_p(J;W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u,v)=\int_G u(x)v(x)dx$ и $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до Γ. Определение границы класса C^s, $s\geqslant 1$, имеется в [38, гл. 1]. Рассматривая задачу (1)–(3), мы предполагаем, что $\Gamma\in C^2$.

Введём обозначения: $Q_\delta(\tau,y)=\{(t,x)\in Q:|x-y|<\delta,|t-\tau|<\delta\}$, $B_\delta(t,y)$ — шар радиуса δ с центром в точке (t,y), то же обозначение используется и для шара меньшей размерности, например, $B_\delta(y)$ — шар радиуса δ с центром в точке $y\in G$.

Оператор L считается эллиптическим, т. е. для некоторой постоянной $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\delta_0|\xi|^2\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall(t,x)\in Q. \tag{4}$$

Приведём условия на исходные данные. Считаем, что выполнены условия

$$a_i\in L_\infty(Q),\ a_{kl}\in C(\overline{Q})\cap L_\infty(0,T;W_\infty^1(G)),\ \sigma,\gamma_k\in W_p^{s_0,2s_0}(S), \tag{5}$$

где $p>n+2$, $s_0=1/2-1/2p$, $i=1,2,\ldots,n$, $k,l=1,2,\ldots,n$;

$$\begin{gathered}u_0(x)\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G),\ f\in L_p(Q),\Phi_1(t,x)\in C(\overline{Q}),\\ \Phi_1(t,x)\geqslant 0\text{ п.в. (почти всюду) в }Q,\ a_0\in L_p(Q),\ a_0(t,x)\geqslant k\text{ п.в. в }Q\end{gathered} \tag{6}$$

для некоторого числа k;

$$g_0(0,x)=B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ g_0\in W_p^{k_0,2k_0}(S), \tag{7}$$

где $k_0=1/2-1/(2p)$, если $Bu\neq u$, и $k_0=1-1/(2p)$ в противном случае;

$$u_0(x)\geqslant 0\ \forall x\in G,\ f(t,x)\geqslant 0\text{ п.в. в }Q,\ g_0(t,x)\geqslant 0,\ (t,x)\in S. \tag{8}$$

Также предположим, что или $\sigma(t,x)\equiv 1$ и $\gamma_i\equiv 0$, или $\gamma_i\not\equiv 0$ и

$$\sigma(t,x)\geqslant 0\ \forall(t,x)\in\overline{S}. \tag{9}$$

Отметим, что поскольку $\Gamma\in C^2$, то можно сделать замену переменных и свести задачу к случаю, когда $\sigma(t,x)\geqslant\delta_0>0\ \forall(t,x)\in\overline{S}$, где δ — постоянная. Соответствующая замена имеет вид $u=e^{-\lambda\rho(x)}v$, где $\lambda>0$ — достаточно большой положительный параметр и ρ — положительная функция, совпадающая в некоторой окрестности Γ с $\rho(x,\Gamma)$. Свойства функции $\rho(x,\Gamma)$ описаны в [39, §10, гл. 3]. Обозначим через Φ решение задачи (1), (2), где $\alpha=0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(9) *и* $\alpha \geqslant 0$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q)$, *причём справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S)})$$

и неравенства

$$0 \leqslant u(t,x) \leqslant \Phi(t,x). \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \geqslant 0$. Существование и единственность решений задачи (1), (2) вытекает из известных результатов о разрешимости параболических задач. Мы можем сослаться, например, на теорему 2.1 в [40; 41] и на теорему 5.3 в [42]. Отметим, что стандартные результаты (см., например, теорему 10.4 в §10, гл. 7 в [38]) не дают утверждения теоремы, поскольку там требуется, чтобы в последнем включении в (5) пространство Соболева было заменено на пространства Гёльдера. Если $\alpha \geqslant 0$, то легко увидеть, что функции $0, \Phi$ являются соответственно нижним и верхним решением задачи (1), (2) (см. определения в [39]), и тогда, используя принцип максимума (следствие 7.4 в §1, гл. 7 в [39]), получим (10). □

2. Основные результаты

Приведём дополнительные условия вида

$$\Phi(t_1,y_1) > \psi_1 > 0,\ \exists \delta_0, \delta_1 > 0:\ \Phi_1(t,x) \geqslant \delta_1 > 0 \ \text{ в } \ Q_{\delta_0}(t_1,y_1), \tag{11}$$

где δ_0 — положительная постоянная, такая, что $B_{\delta_0}(y_1) \subset G$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (4)–(9), (11). *Тогда существует единственное решение задачи* (1)–(3), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\alpha \geqslant 0$, *причём* $0 \leqslant u(t,x) \leqslant \Phi(t,x)$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j(p-1) + \sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ijx_i}\right)\xi_j u + a_0u^2 \geqslant \delta_2(|\xi|^2+u^2),\ \forall\, u \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{12}$$

при п.в. $(t,x) \in Q$, где δ_2 — положительная постоянная. Иначе мы сделаем замену переменных $u = ve^{\lambda t}$. Коэффициент a_0 перейдёт в новый коэффициент $a_0 + \lambda$. Используя условие (6), можем выбрать достаточно большой параметр λ, такой, что для нового уравнения условие (12) уже выполнено. Отметим, что $\Phi(t,x) \in C^{1-(n+2)/(2p),2-(n+2)/p}(\overline{Q})$ (см. теоремы вложения в [37, теорема 2.6.6]). Тем же свойством обладает и любое решение задачи (1), (2). В частности, имеем $u \leqslant \Phi \leqslant M$, $M = \|\Phi\|_{C(\overline{Q})}$. Вначале мы покажем некоторые оценки и приведём некоторые свойства решений задачи (1), (2). Легко показать, что $u \to \Phi$ при $\alpha \to 0$. Действительно, пусть u_α — решение задачи (1), (2) с $g = \alpha\Phi_1$. Рассматривая разность $w = \Phi - u_\alpha$, получим, что она удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $-\alpha\Phi_1 u_\alpha$. Тогда из теоремы 1 имеем оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant C_0|\alpha|\|\Phi_1 u_\alpha\|_{L_p(Q)} \leqslant C_1|\alpha|, \tag{13}$$

где $C_1 = C_0\|\Phi_1\|_{L_p(Q)}\|\Phi\|_{L_\infty(Q)}$, постоянная C_1 не зависит от параметра α. Как уже было отмечено, $w(t,x) \in C^{1-(n+2)/(2p),2-(n+2)/p}(\overline{Q})$ [37, теорема 2.6.6, гл. 7]. Тогда получим оценку $\|w\|_{C(\overline{Q})} \leqslant c_1\|w\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_1C_1|\alpha| \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Построим функции $\varphi^k(x) \in C_0^\infty(G)$, $\psi_k(t) \in C_0^\infty(0,T)$, такие, что $\varphi^k(x) = 1$ в $B_{\delta_0 r_k}(y_1)$, $\psi_k = 1$ в $B_{\delta_0 r_k}(t_1)$, $\operatorname{supp}\varphi^k \subset B_{r_{k-1}\delta_0}(y_1)$, $\operatorname{supp}\psi_k \subset B_{r_{k-1}\delta_0}(t_1)$, $r_k = 1/2+(2+[p]-k)/(2+2[p])$, для некоторой постоянной $c>0$ справедливо неравенство $|\nabla\varphi^k(x)|^2 \leqslant c\varphi^k(x)$ при всех $x \in G$. Положим $\varphi_k(t,x) = \varphi^k(x)\psi_k(t)$. Умножим уравнение (1) на функцию $\varphi_1|u|^{p-2}u$ и интегрируем по G. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t \int\limits_G \frac{|u|^p}{p}\varphi_1\,dx - \int_G \frac{|u|^p}{p}\varphi_{1t}\,dx + \int\limits_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}(u_{x_i}(p-1)\varphi_1|u|^{p-2} + |u|^{p-2}u\varphi_{1x_i}) + \\ + \left(\sum_{j=1}^n \left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right) u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_1\,dx + \\ + \alpha\int\limits_G \varphi_1\Phi_1|u|^p\,dx = (f, |u|^{p-2}u\varphi_1). \quad (14)$$

Далее мы используем числовое неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (15)$$

Имеем

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}|u|^{p-2}u\varphi_{1x_i}\right| \leqslant \varepsilon|\nabla u|^2|u|^{p-2}\varphi_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}|u|^p,$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное число. Далее в силу условия (12) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}(p-1)\varphi_1|u|^{p-2} + \left(\sum_{j=1}^n\left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_1\,dx \geqslant \\ \geqslant \delta_2\varphi_1(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p),$$

где $\delta_2>0$ — положительная постоянная. Кроме того,

$$|f\varphi_1|u|^{p-2}u| \leqslant |f|^p\varphi_1/(4(\varepsilon\alpha)^{p-1}) + \alpha|u|^p\varphi_1\varepsilon.$$

Интегрируя (14) по t и используя последние три неравенства, взяв $\varepsilon = \min(\delta_1,\delta_2)/4$, получим

$$\int_0^T\int_G \varphi_1(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p)/2 + \alpha\Phi_1|u|^p\varphi_1\,dxdt \leqslant \\ \leqslant \frac{c_4}{\alpha^{p-1}}\|f\|^p_{L_p(Q)} + c_3\int_0^T\int_G |u|^p\,dxdt \leqslant c_3M^pT\mu(G) + \frac{c_4}{\alpha^{p-1}}\|f\|^p_{L_p(Q)} = c_5, \quad (16)$$

где постоянные c_3, c_4 не зависят от постоянной α. Далее мы повторим рассуждения. Умножим уравнение (1) на $\alpha|u|^{p/2}u\varphi_2$ и проинтегрируем по G. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t\int_G \alpha\frac{|u|^p}{p}\varphi_2\,dx - \alpha\int_G\frac{|u|^p}{p}\varphi_{2t}\,dx + \alpha\int_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}(u_{x_i}\varphi_2|u|^{p-2} + |u|^{p-2}u\varphi_{2x_i}) + \\ + \alpha\left(\sum_{j=1}^n\left(a_j + \sum_{i=1}^n a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_2\,dx + \\ + \alpha^2\int_G\varphi_2\Phi_1|u|^p\,dx = \alpha(f, |u|^{p-2}u\varphi_2).$$

Имеем

$$\left|\alpha\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}|u|^{p-2}u\varphi_{2x_i}\right| \leqslant \alpha\varphi_2|\nabla u|^2|u|^{p-2}\varepsilon + c(\varepsilon)|u|^p\varphi_1\alpha,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Далее в силу условия (12) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_j}u_{x_i}(p-1)\varphi_2|u|^{p-2} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ijx_i}\right)u_{x_j}|u|^{p-2}u + a_0|u|^p\right)\varphi_2\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \delta_2\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p).$$

Кроме того, $|f\varphi_2|u|^{p-2}u| \leqslant |f|^p\varphi_2/(4(\varepsilon_1\alpha^2)^{p-1}) + \alpha^2|u|^p\varphi_2\varepsilon_1$. Интегрируя (14) по t и используя последние три неравенства, взяв достаточно малые параметры $\varepsilon, \varepsilon_1$, получим

$$\int_0^T\int_G \alpha\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_2\alpha^2\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T\int_G c_7\|f\|^p\,dxdt + \int_0^T\int_{G_2} c_8\alpha|u|^p\varphi_1\,dxdt \leqslant c_8.$$

Для оценки последнего слагаемого используем оценку (16). Получим неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_G \alpha\varphi_2(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_2\alpha^2\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_9(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p).$$

Далее повторяем рассуждения. Предположим, что мы уже получили оценку

$$\int_0^T\int_G \alpha^{k-1}\varphi_k(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_k\alpha^k\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_9,$$

где постоянная c_9 не зависит от u, а зависит лишь от постоянной M и данных задачи. Последующая оценка получается повторением рассуждений с использованием умножения (1) на функцию $\alpha^k|u|^{p-2}u\varphi_{k+1}$ и интегрированием по области G. Рассуждения повторяются для $k = 1, 2, \ldots, [p]$. Если $p = [p]$, то рассуждения заканчиваются. Если нет, то мы получим оценку

$$\int_0^T\int_G \alpha^{[p]-1}\varphi_{[p]}(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_{[p]}\alpha^{[p]}\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_{10},$$

равномерную по параметру $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное положительное число. Умножим уравнение (1) на $\alpha^{p-1}|u|^{p-2}u\varphi_{[p]+1}$ и повторим рассуждения. Окончательная оценка имеет вид

$$\int_0^T\int_G \alpha_l^{p-1}\varphi_{[p]+1}(|\nabla u|^2|u|^{p-2} + |u|^p) + \varphi_{[p]+1}\alpha^p\Phi_1|u|^p\,dxdt \leqslant c_{11},$$

где постоянная c_{11} не зависит от $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное фиксированное положительное число. Она имеет вид $c_{12}(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p)$ (напомним, что $M = \|u\|_{L_\infty(Q)}$), где постоянная c_{12} зависит от данных задачи. Поскольку $\Phi_1 \in L_\infty(Q)$, из этой оценки вытекает неравенство

$$\alpha^p\|\varphi_{[p]+1}\Phi_1 u\|^p_{L_p(Q)} \leqslant c_{13}(\|f\|^p_{L_p(Q)} + M^p), \tag{17}$$

где постоянная c_{13} не зависит от $\alpha \geqslant \delta_2$, где δ_2 — произвольное фиксированное положительное число.

Далее, возьмём функции $\varphi(x) = \varphi_{[p]+2}(x)$, $\psi(t) = \psi_{[p]+2}(t)$ со свойствами: $\varphi_{[p]+2}(x) \in C^2(\overline{G})$, $\varphi_{[p]+2}(x) = 1$ в $B_{\delta_0 r_{[p]+2}}(y_1)$, $\operatorname{supp}\varphi_{[p]+2} \subset \overline{B_{r_{[p]+1}\delta_0}(y_1)}$, для некоторой постоянной $c > 0$ справедливы неравенства $|\nabla\varphi(x)|^2 \leqslant c\varphi(x)$ для всех $x \in G$ и $|\nabla_x\varphi| \leqslant c\varphi/\rho(x)$, где c — некоторая постоянная и $\rho(x) = \rho(x, \partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1))$. Эти условия означают, что в некоторой окрестности границы $\partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$ функция $\varphi_{[p]+2}(x)$ ведёт себя как $\rho^\beta(x)$ ($\beta \geqslant 2$), $x \in B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$, и положительна в $B_{\delta_0 r_{1+[p]}}(y_1)$. Очевидно такие функции существуют. Будем считать, что $\varphi_{[p]+2}(x) \equiv \rho^2(x)$ на некотором множестве $U = \{x \in B_{\delta_0 r_{1+[p]}} : \rho(x) < \varepsilon\}$, т. е. для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$ на этом множестве имеет место неравенство $c_1\rho^2 \leqslant \varphi(x) \leqslant c_2\rho^2$. Положим $\Psi(t,x) = \varphi(x)\psi(t)$. Умножим уравнение (1) на Ψ и преобразуем его следующим образом:

$$v_t - Lv = -\alpha\Psi\Phi_1 v + \Psi f + \Psi_t u - 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Psi_{x_i}u_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Psi_{x_ix_j}u + \sum_{i=1}^{n} a_i\Psi_{x_i}u,$$

где $v = \Psi u$. Используя оценку из теоремы 1 и оценку (17), получим

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{14}(\|f\|_{L_p(Q)} + \||\nabla_x\Psi||\nabla u|\|_{L_p(Q)} + M). \tag{18}$$

Имеем неравенство $|\nabla_x\Psi||\nabla u| \leqslant \frac{|\nabla_x\Psi|}{\Psi}|\nabla(\Psi u)| + \frac{|\nabla_x\Psi|^2}{\Psi}u$. Используя свойства функции Ψ, получим $|\nabla_x\Psi||\nabla u| \leqslant \frac{c_{15}}{\rho}|\nabla(\Psi\nabla u)| + c_{16}|u|$. Тогда из неравенства (18) получим оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{17}(\|f\|_{L_p(Q)} + \|\rho^{-1}|\nabla_x v|\|_{L_p(Q)} + M). \tag{19}$$

Определим весовые пространства Соболева с нормами

$$\|v\|^p_{H_p^2\left(G_{\delta_0 r_{1+[p]}}\right)} = \int_{G_{\delta_0 r_{1+[p]}}} \sum_{i,j=1}^{n} |v_{x_ix_j}|^p + \rho^{-p}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^p + \rho^{-2p}|v|^p\,dx,$$

$$\|v\|^p_{H_p^1\left(G_{\delta_0 r_{1+[p]}}\right)} = \int_{G_{\delta_0 r_{1+[p]}}} \rho^{-p}\sum_{i=1}^{n}|v_{x_i}|^p + \rho^{-2p}|v|^p\,dx.$$

По построению при п. в. t функция v и её производные обращаются в ноль на $\partial B_{\delta_0 r_{1+[p]}}$, следовательно, норма в пространстве $H_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})$ эквивалента норме $W_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})$ (теорема 3.2.6 в [36]). Тогда по теореме 3.4.2 (f) из [36] справедливо неравенство

$$\|v\|_{H_p^1(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})} \leqslant c\|v\|^{1/2}_{H_p^2(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})}\|\rho^{-2}v\|^{1/2}_{L_p(G_{\delta_0 r_{1+[p]}})}.$$

Используя это неравенство и неравенства (15), (19), получим

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{18}\varepsilon_2\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} + c(\varepsilon_2)\|u\|_{L_p(Q)} + c_{14}(\|f\|_{L_p(Q)} + M).$$

Выбрав $\varepsilon_2 = 1/2c_{18}$, получим неравенство

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leqslant c_{19}(\|f\|_{L_p(Q)} + M). \tag{20}$$

Из оценок (20), (17) вытекает оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} + \alpha\|u\|_{L_p(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{20}(\|f\|_{L_p(Q)} + M). \tag{21}$$

Далее используем интерполяционные неравенства. Отметим, что $W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)) \subset C^{\alpha,2\alpha}(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})$, $\alpha = s-(n+2)/(2p)$ [37, теорема 2.6.6, гл. 7]). Таким образом, имеем неравенство

$$\|u\|_{C(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})} \leqslant c_{21}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))},\ (n+2)/2p < s < 1.$$

С помощью интерполяционного неравенства (см. [37, следствие 5.7.3, гл. 7]) и неравенства (21) получим

$$\|u\|_{W_p^{s,2s}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{22}\|u\|^s_{W_p^{1,2}(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))}\|u\|^{1-s}_{L_p(Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1))} \leqslant c_{23}\alpha^{s-1}.$$

Следовательно, имеем

$$\|u\|_{C(\overline{Q_{\delta_0/2}(t_1,y_1)})} \leqslant c_{24}\alpha^{s-1} \to 0 \text{ при } \alpha \to \infty. \tag{22}$$

Рассмотрим уравнение $R(\alpha) = u(\alpha,t_1,y_1) - \psi_1 = 0$, где функция $u(\alpha,t,x)$ есть решение задачи (1), (2) с $g = \alpha\Phi_1$. Используя теорему 1 и вложение $W_p^{1,2}(Q) \subset C(\overline{Q})$, нетрудно показать, что величина $u(\alpha,t_1,y_1)$ непрерывно зависит от параметра α. Найдём параметр α_{01}, такой, что $\psi_1 < u(\alpha_{01},t_1,y_1) \leqslant \Phi(t_1,y_1)$. Это возможно в силу неравенства (13). Далее найдём такой параметр α_{02}, что для соответствующего решения $u(\alpha_{02},t,x)$ задачи (1), (2) с $g = \alpha_{02}\Phi_1$ выполнено $0 \leqslant u(\alpha_{02},t_1,y_1) < \psi_1$. Такое α_{02} найдётся в силу (22). Тогда $R(\alpha_{01}) > 0$, $R(\alpha_{02}) < 0$. Следовательно, найдётся число α_0, такое, что $R(\alpha_0) = 0$. Отсюда вытекает, что пара $(u(\alpha_0,t,x),\alpha_0)$ есть решение задачи.

Покажем единственность решения задачи. Рассмотрим уравнение $u(\alpha,t_1,y_1) = \psi_1$. Поскольку уравнение (1) гладким образом зависит от параметра α, то и решение в норме пространства $W_p^{1,2}(Q)$ также обладает этим свойством, в частности, функция $u(\alpha,t_1,y_1)$ бесконечно дифференцируема по параметру α. Более того, она аналитична по параметру α. Действительно, пусть $v = u - \Phi$. Имеем

$$Mv + \alpha\Phi_1 v = -\alpha\Phi_1\Phi, \quad v|_{t=0} = 0, \quad Bv|_S = 0.$$

Тогда $v = -(M+\alpha\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi_1\Phi$. Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная точка. Далее имеем $v = (M+\alpha_0\Phi_1+(\alpha-\alpha_0)\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi_1\Phi$. Откуда

$$v(t_1,y_1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\alpha-\alpha_0)^k[(M+\alpha_0\Phi_1)^{-1}\Phi_1]^k(M+\alpha_0\Phi_1)^{-1}\alpha\Phi|_{t=t_1,x=y_1}.$$

Используя теорему 1, легко показать, что этот ряд сходится в некоторой окрестности точки α_0 в норме пространства $W_p^{1,2}(Q)$. Утверждение справедливо как для вещественных, так и для комплексных чисел α. Таким образом, $u(\alpha,t,x)$ аналитична по α в любой точке $(t,x) \in Q$. Из внутренней теоремы единственности для аналитических функций заключаем, что нули функции $u'(\alpha,t_1,y_1)$ не могут иметь конечной предельной точки, если функция $u(\alpha,t_1,y_1)$ не постоянная. Однако последнее не выполнено, поскольку по доказанному имеются точки α_{01},α_{02}, где значения $u(\alpha_{0i},t_1,y_1)$ различны. С другой стороны, функция $u'(\alpha,t,x)$ есть решение задачи

$$(M+\alpha\Phi_1)u' = -\Phi_1 u, \quad u'|_{t=0} = 0, \quad Bu'|_S = 0.$$

Используя принцип максимума (следствие 7.4 в §1, гл. 7 в [39]), получим $u' \leqslant 0$ в Q. Тогда функция $u(\alpha,t_1,y_1) - \psi_1$ не может иметь более одного нуля. Мы показали единственность решения. □

Список литературы

1. **Marchuk G. I.** Mathematical Models in Environmental Problems. Amsterdam : Elsevier Science Publ., 1986.
2. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York : Marcel Dekker, Inc., 1999.
3. **Ozisik M. N., Orlande H. R. B.** Inverse Heat Transfer. New York : Taylor & Francis, 2000.
4. **Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Ненарокомов А. В.** Обратные задачи сложного теплообмена. М. : Янус-К, 2009.
5. **Borodulin A. I., Desyatkov B. D., Makhov G. A., Sarmanaev S. R.** Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer // Russian Meteorology and Hydrology. 1997. No. 1. P. 49–55.
6. **Glagolev M. V., Sabrekov A. F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2012. Vol. 7, no. 1. P. 81–101.
7. **Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Terentyeva I. E.** Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations // Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics". Ed. V. D. Lakhno. Vol. 7. Pushchino : IMPB RAS, 2018. Article No. e94.
8. **Murguia-Flores F., Arndt S., Ganesan A. L., Murray-Tortarolo G., Hornibrook E. R. C.** Soil methanotrophy model (MeMo v1.0): A process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil // Geoscientific Model Development. 2018. Vol. 11. P. 2009–2032.
9. **Sabrekov A. F., Glagolev M. V., Terentyeva I. E., Mochenov S. Yu.** Identification of the methane consumption rate in soils by the inverse problem method. Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics. Ed. V. D. Lakhno. Vol. 7. Pushchino : IMPB RAS, 2018. P. 951–955.
10. **Сабреков А. Ф., Глаголев М. В., Терентьева И. Е., Моченов С. Ю.** Идентификация скорости потребления метана в почвах методом обратной задачи // Математическое моделирование в экологии: материалы 6-й конф. Пущино, 2019. С. 179–180.
11. **Prather M. J., Holmes C. D.** Overexplaining or underexplaining methane's role in climate change // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2017. Vol. 114. P. 5324–5326.
12. **Прилепко А. И., Соловьев В. В.** О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 136–143.
13. **Prilepko A. I., Kostin A. B., Solov'ev V. V.** Inverse source and coefficient problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 237, no. 3. P. 576–594.
14. **Choulliy M.** Inverse problem for a semilinear parabolic equation // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1123–1132.
15. **Choulliy M., Yamamoto M.** Generic well-posedness of an inverse parabolic problem — the Hölder-space approach // Inverse Problems. 1996. Vol. 12. P. 195–205.
16. **Kozhanov A. I.** Parabolic equations with an unknown absorption coefficient // Doklady Mathematics. 2006. Vol. 74, no. 1. P. 573–576.
17. **Кожанов А. И.** Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом поглощения // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 13. С. 5–19.
18. **Hao D. N.** A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equation and related inverse problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 295–315.

19. **Beretta E.** Identifying a space dependent coefficient in a reaction-diffusion equation // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 5, no. 2. P. 285–296.
20. **Камынин В. Л.** Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217.
21. **Пятков С. Г., Сафонов Е. И.** О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.
22. **Pyatkov S. G.** Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2022. Vol. 9, no. 2. P. 52–66.
23. **Pyatkov S., Pronkina T.** Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters from boundary integral data // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 282, no. 2. P. 241–252.
24. **Pyatkov S. G., Soldatov O. A.** Inverse problems of recovering lower-order coefficients from boundary integral data // Axioms. 2025. Vol. 14, no. 2. P. 116.
25. **Вабищевич П. Н., Васильев В. И.** Вычислительная идентификация младшего коэффициента параболического уравнения // Докл. Акад. наук. 2014. Т. 455, № 3. С. 258–260.
26. **Hussein M. S., Lesnic D.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2016. Vol. 17, no. 5–6. P. 401–411.
27. **Mamonov A. V., Tsai Y-H. R.** Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // Inverse Problems. 2013. Vol. 29, no. 3. P. 035009.
28. **Lorenzi A.** Recovering two constants in a linear parabolic equation // Journal of Physics: Conference Series. 2007. Vol. 73. P. 012014.
29. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 5, no. 3. P. 695–714.
30. **Mola G.** Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Journal of Abstract Differential Equations and Applications. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 14–28.
31. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equations // Inverse Problems. 2012. Vol. 28, no. 7. P. 075006.
32. **Кожанов А. И.** Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии // Мат. заметки. 2019. Т. 106, № 3. С. 395–408.
33. **Lorenzi A., Paparoni A.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Probl. 1993. Vol. 1, no. 4. P. 331–348.
34. **Lyubanova A. S.** Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // Applicable Analysis. 2008. Vol. 87, no. 10–11. P. 1121–1128.
35. **Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р.** Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфим. мат. журн. 2017. Т. 9, № 1. С. 63–74.
36. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980.
37. **Amann H.** Linear and Quasilinear Parabolic Problems, II. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019.
38. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.
39. **Liebermann G. M.** Second Order Parabollic Differential Equations. Singapure : World Scientific Publ., 2005.
40. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Mathematische Zeitschrift. 2007. Vol. 257, no. 1. P. 193–224.

41. **Meyries M., Schnaubert R.** Maximal regularity with temporal weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions // Mathematische Nachrichten. 2012. Vol. 285, no. 8–9. P. 1032–1051.
42. **Hummel F., Lindemulder N.** Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces // Potential Analysis. 2022. Vol. 57. P. 601–669.

Поступила в редакцию 26.05.2025.
После переработки 05.08.2025.

Сведения об авторах

Тукмачева Юлия Андреевна, преподаватель, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; e-mail: y_tukmacheva@ugrasu.ru.

Пятков Сергей Григорьевич, профессор, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; e-mail: s_pyatkov@ugrasu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 701–714.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-701-714

IDENTIFICATION OF THE ABSORPTION PARAMETER IN CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Ya.A. Tukmacheva[a], S.G. Pyatkov[b]

Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia
[a] y_tukmacheva@ugrasu.ru, [b] s_pyatkov@ugrasu.ru

The correctness in Sobolev spaces of inverse problems of determining the constant at the lowest coefficient (absorption coefficient) is considered in a parabolic equation. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved. The proof is based on the obtained a priori estimates and properties of solutions to parabolic problems. The method used is constructive and based on the proposed approach it is possible to construct numerical methods for solving the problem.

Keywords: *inverse problem, absorption parameter, parabolic equation, heat and mass transfer.*

References

1. **Marchuk G.I.** *Mathematical Models in Environmental Problems.* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 1986.
2. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York, Marcel Dekker, Inc., 1999.
3. **Ozisik M.N., Orlande H.R.B.** *Inverse Heat Transfer.* New York, Taylor & Francis, 2000.
4. **Alifanov O.M., Artyukhov E.A., Nenarokomov A.V.** *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* [Inverse problems in the study of complex heat transfer]. Moscow, Janus-K, 2009. (In Russ.).
5. **Borodulin A.I., Desyatkov B.D., Makhov G.A., Sarmanaev S.R.** Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1997, no. 1, pp. 49–55.
6. **Glagolev M.V., Sabrekov A.F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2012, vol. 7, no. 1, pp. 81–101.
7. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E.** Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations. *Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics"*, ed. V.D. Lakhno, vol. 7. Pushchino, IMPB RAS, 2018. P. e94.
8. **Murguia-Flores F., Arndt S., Ganesan A.L., Murray-Tortarolo G., Hornibrook E.R.C.** Soil methanotrophy model (MeMo v1.0): a process-based model to quantify global uptake of atmospheric methane by soil. *Geoscientific Model Development*, 2018, vol. 11, pp. 2009–2032.
9. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E., Mochenov S.Yu.** Identification of the methane consumption rate in soils by the inverse problem method. *Reports of the International Conference "Mathematical Biology and Bioinformatics"*, ed. V.D. Lakhno, vol. 7. Pushchino, IMPB RAS, 2018. Pp. 951–955.

The work was financially supported by the Russian Science Foundation and the government of the Khanty-Mansiysk Autonomous Okrug —Yugra (grant No. 25-11-20026).

10. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E.** *Modelirovaniye potrebleniya metana v avtomorfnykh pochvakh: vliyaniye mekhanizma perenosa i chislennosti metanotrofov* [Modeling of methane consumption in automorphic soils: influence of transport mechanism and number of methanotrophs]. Materials of 6th conference "Mathematical modeling in ecology", Pushino, 2019. Pp. 179–180. (In Russ.).
11. **Prather M.J., Holmes C.D.** Overexplaining or underexplaining methane's role in climate change. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2017, vol. 114, pp. 5324–5326.
12. **Prilepko A.I., Solov'ev V.V.** *O razreshimosti obratnykh krayevykh zadach opredeleniya koeffitsienta pered mladshey proizvodnoy v parabolicheskom uravnenii* [On solvability of inverse boundary value problems of recovering a coefficient at lower-order derivative in a parabolic equation], *Differentsial'nye Uravneniya* [Differential Equations], 1987, vol. 23, no. 1, pp. 136–143. (In Russ.).
13. **Prilepko A.I., Kostin A.B., Solov'ev V.V.** Inverse source and coefficient problems for elliptic and parabolic equations in Hölder and Sobolev spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 237, no. 3, pp. 576–594.
14. **Choulliy M.** Inverse problem for a semilinear parabolic equation. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, pp. 1123–1132.
15. **Choulliy M., Yamamoto M.** Generic well-posedness of an inverse parabolic problem — the Hölder-space approach. *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 195–205.
16. **Kozhanov A.I.** Parabolic equations with an unknown absorption coefficient. *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, no. 1, pp. 573–576.
17. **Kozhanov A.I.** *Parabolicheskiye uravneniya s neizvestnym koeffitsientom pogloshcheniya* [Parabolic equations with an unknown absorption coefficient]. *Bulletin of Chelyabinsk State University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, no. 13, pp. 5–19. (In Russ.).
18. **Hao D.N.** A noncharacteristic Cauchy problem for linear parabolic equation and related inverse problems. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, pp. 295–315.
19. **Beretta E.** Identifying a space dependent coefficient in a reaction-diffusion equation. *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, no. 2, pp. 285–296.
20. **Kamynin V.L.** The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 205–213.
21. **Pyatkov S.G., Safonov E.I.** On some classes of linear inverse problems for parabolic systems of equations. *Siberian Electronic Reports*, 2014, vol. 11, pp. 777–799.
22. **Pyatkov S.G.** Identification of thermophysical parameters in mathematical models of heat and mass transfer. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 52–66.
23. **Pyatkov S., Pronkina T.** Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters from boundary integral data. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 282, no. 2, pp. 241–252.
24. **Pyatkov S.G., Soldatov O.A.** Inverse problems of recovering lower-order coefficients from boundary integral data. *Axioms*, 2025, vol. 14, no. 2, p. 116.
25. **Vabishevich P.N., Vasil'ev V.I.** Numerical identification of the lower-order coefficient of a parabolic equation. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 455, no. 3, pp. 258–260.
26. **Hussein M.S., Lesnic D.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients and heat source. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2016, vol. 17, no. 5–6, pp. 401–411.
27. **Mamonov A.V., Tsai Y-H.R.** Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems. *Inverse Problems*, 2013, vol. 29, no. 3, p. 035009.
28. **Lorenzi A.** Recovering two constants in a linear parabolic equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2007, vol. 73, p. 012014.

29. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces. *Inverse Problems and Imaging*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 695–714.
30. **Mola G.** Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equation in a Hilbert spaces. *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 14–28.
31. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equations. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 7, p. 075006.
32. **Kozhanov A.I.** Inverse problems of finding the absorption parameter in the diffusion equation. *Mathematical Notes*, 2019, vol. 106, no. 3, pp. 378–389.
33. **Lorenzi A., Paparoni A.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 4, pp. 331–348.
34. **Lyubanova A.S.** Identification of a constant coefficient in an elliptic equation. *Applicable Analysis*, 2008, vol. 87, no. 10–11, pp. 1121–1128.
35. **Kozhanov A.I., Safiullova R.R.** *Opredeleniye parametrov v telegrafnom uravnenii* [Identification of parameters in the telegraph equation]. *Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 63–74. (In Russ.).
36. **Triebel H.** *Interpolation theory. Functional spaces. Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
37. **Amann H.** *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, II. Cham, Springer Nature Switzerland AG, 2019.
38. **Ladyzhenskaya O.A. Uraltseva N.N., Solonnikov V.A.** *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Providence, American Mathematical Society, 1968.
39. **Liebermann G.M.** *Second Order Parabollic Differential Equations*, Singapure, World Scientific Publ., 2005.
40. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data. *Mathematische Zeitschrift*, 2007, vol. 257, no. 1, pp. 193–224.
41. **Meyries M., Schnaubert R.** Maximal regularity with temporal weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 2012, vol. 285, no. 8–9, pp. 1032–1051.
42. **Hummel F., Lindemulder N.** Elliptic and parabolic boundary value problems in weighted function spaces. *Potential Analysis*, 2022, vol. 57, pp. 601–669.

Article received 26.05.2025.
Corrections received 05.08.2025.