Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 688–700.

УДК 517.53 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-688-700

ОБОБЩЁННАЯ ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ПОЛУКОЛЬЦА И ПОЛУКРУГА

К. Г. Малютин[a], А. А. Наумова[b]

Курский государственный университет, Курск, Россия
[a] malyutinkg@gmail.com, [b] aliona.filatowa2013@yandex.ru

Получено обобщение формулы Карлемана субгармонической функции в открытом полукольце и в открытом полукруге. Обобщённая формула учитывает как распределение меры Рисса функции, так и её граничную меру. Доказательство использует теорию тонкой топологии и пространств Мартина.

Ключевые слова: *формула Карлемана, полукольцо, полукруг, субгармоническая функция, мера Рисса, граничная мера, полная мера.*

Введение

Многие важные результаты в теории субгармонических функций получаются с использованием формул представления этих функций. Наиболее известная из них — формула Пуассона — Иенсена, которая даёт представление субгармонической функции в круге. Отметим также формулы Неванлинны, Симидзу — Альфорса, Карлемана, Левина, которые приведены в [1]. Теория субгармонических функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, созданная А. Ф. Гришиным [2], в значительной мере опирается на открытые им интегральные формулы. Аналогичные формулы при различных ограничениях получали другие авторы [3–6]. Важное место в этом ряду занимает формула Карлемана [7], которая устанавливает связь между распределением нулей и полюсов мероморфной функции в замкнутом полукольце $\{z : 0 < R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2 < +\infty, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ с её поведением на границе полукольца. Обобщение этой формулы на функции аналитические в полукруге $\{z : |z| \leqslant R < +\infty, \operatorname{Im} z > 0\}$ получено Н. В. Говоровым [3]. Для функций, субгармонических в верхней полуплоскости, обобщение формулы Карлемана получил А. Ф. Гришин [2; 8]. В последнее время важные результаты в этом направлении получены в работах Б. Н. Хабибуллина и его учеников [9; 10].

В настоящей работе мы распространяем результаты из работ [2–4; 8] на функции, субгармонические в открытом полукольце и в открытом полукруге.

1. Основные обозначения и терминология

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $\mathbb{C} = \{z = x + iy\}$ обозначим комплексную плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость без границы. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, $\overline{D}$ — замыкание множества D, D_+ означает пересечение множества D с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, то есть $D_+ = D \cap \mathbb{C}_+$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

Символом ∂ мы обозначаем в одних случаях частную производную, в других — границу множества, $\stackrel{\text{def}}{=}$ означает равно по определению. Обозначим через $D_+(R_1,R_2)=\{z:0<R_1<|z|<R_2<+\infty,\operatorname{Im} z>0\}$ открытое полукольцо на верхней полуплоскости. Субгармоничность в замкнутом полукольце $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ равносильна субгармоничности в $D_+(R_1',R_2',\delta)=\{z:0<R_1'<|z|<R_2'<+\infty,\operatorname{Im} z>-\delta\}$ при некоторых $R_1'<R_1<R_2<R_2'$, $\delta>0$. Поэтому функции, субгармонические и ограниченные сверху внутри открытого полукольца $D_+(R_1,R_2)$, образуют более широкий класс, чем субгармонические в замыкании $\overline{D_+(R_1,R_2)}$ полукольца. Для меры λ обозначаем $\lambda(t)=\lambda(C(0,t))$.

2. Вспомогательные сведения

Пусть $SK(R_1,R_2)$ — пространство субгармонических функций в $D_+(R_1,R_2)$, имеющих в этом полукольце положительную гармоническую мажоранту, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукольца $D_+(R_1,R_2)$, $\frac{\partial G}{\partial n_\zeta}$ — производная по внутренней нормали к границе полукольца. Из [11, теорема 7] следует, что функции $v(z)$ из пространства $SK(R_1,R_2)$ обладают следующими свойствами:

Пусть $v\in SK(R_1,R_2)$, μ — риссовская мера функции $v(z)$. Тогда

a) v имеет почти всюду некасательные пределы

$$v(R_1e^{i\varphi})=\lim_{r\to R_1+0}v(re^{i\varphi}),\ v(R_2e^{i\varphi})=\lim_{r\to R_2-0}v(re^{i\varphi}),\ v(t)=\lim_{y\to+0}v(t+iy)\,;$$

b) существуют однозначно определяемые функцией $v(z)$ меры: ν_j, $j=1,2$, на интервале $(0,\pi)$ и мера ν на объединении интервалов $I(R_1,R_2)=(-R_2,-R_1)\cup(R_1,R_2)$, такие, что для любой точки $z_0\in D_+(R_1,R_2)$, в которой $v(z_0)>-\infty$,

мера $\tilde\mu$, $d\tilde\mu(\zeta)\stackrel{\text{def}}{=}G(z_0,\zeta)\,d\mu(\zeta)$, конечна на $D_+(R_1,R_2)$,

меры $\tilde\nu_j$, $d\tilde\nu_j(\zeta)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial G(z_0,R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\zeta)$, $j=1,2$, имеют ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$,

мера $\tilde\nu$, $d\tilde\nu(t)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}\,d\nu(t)$, имеет ограниченную полную вариацию на $I(R_1,R_2)$;

c) имеют место формулы

$$\nu_1([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_1+0}R_1\int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,\ \nu_2([\alpha,\beta])=\lim_{r\to R_2-0}R_2\int_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

$$\text{если } 0<\alpha<\beta<\pi,\quad \nu_j(\{\alpha\})=\nu_j(\{\beta\})=0,\quad j=1,2\,,$$

$$\nu([a,b])=\lim_{y\to+0}\int_a^b v(x+iy)\,dx,\ \text{если } [a,b]\subset I(R_1,R_2),\ \nu(\{a\})=\nu(\{b\})=0,$$

$$d\nu_j(\varphi)=R_jv(R_je^{i\varphi})\,d\varphi+d\sigma_j(\varphi),\ j=1,2,\quad d\nu(t)=v(t)\,dt+d\sigma(t)\,,$$

где σ_j, $j=1,2$, σ — меры, сингулярные относительно меры Лебега (невозрастающие ограниченные функции на $(0,\pi)$, соответственно на $I(R_1,R_2)$, для которых почти всюду $\sigma_j'=0$, $\sigma'=0$).

Мера $\hat\nu=\nu_1+\nu_2+\nu$ называется граничной мерой функции v.

Для функции $v \in SK(R_1, R_2)$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{D_+(R_1,R_2)\cap K} \operatorname{Im} \zeta \, d\mu(\zeta) - \hat{\nu}(K)\,.$$

Мера λ обладает следующими свойствами: 1) λ — конечная мера на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}$; 2) λ — неотрицательная мера в $D_+(R_1, R_2)$; 3) λ равна нулю в дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D_+(R_1, R_2)}$.

Наоборот, если мера λ удовлетворяет условиям 1)–3), то существует функция $v \in SK(R_1, R_2)$ с полной мерой, равной λ.

Используя введённые определения, функцию $v \in SK(R_1, R_2)$, $z \in D_+(R_1, R_2)$, можно записать в виде (см. [11, теорема 7])

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\overline{D_+(R_1,R_2)}} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) + \sum_{j=1}^{4} a_j M(z, R_j), \tag{1}$$

где $R_3 = -R_1$, $R_4 = -R_2$,

$$K(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{Im}\zeta} G(z,\zeta), & \zeta \in D_+(R_1,R_2), \\ \dfrac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}, & \zeta = R_j e^{i\varphi}, \varphi \in (0,\pi), \\ \dfrac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}, & \zeta \in I(R_1,R_2)\,, \end{cases}$$

$M(z,\zeta)$ — функция Мартина полукольца $D_+(R_1, R_2)$, отвечающая граничной точке ζ, а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования, функция $K(z,\zeta)$ продолжена по непрерывности на вещественную ось при $R_1 \leqslant |t| \leqslant R_2$.

В частности, если функция $v(z)$ субгармонична в полукольце $D_+(R_1', R_2')$, $R_1' < R_1 < R_2 < R_2'$, то при $z \in D_+(R_1, R_2)$

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,R_2)\cup I(R_1,R_2)} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) + \sum_{j=1}^{2} \frac{R_j}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z, R_j e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(R_j e^{i\varphi}\right)\, d\varphi\,. \tag{2}$$

При этом в определении полной меры функции $v(z)$ её сингулярные меры σ_j, $j = 1, 2$, отсутствуют (они равны нулю).

Пусть $R_1 = qR, R_2 = R/q$. Тогда имеет место соотношение

$$G(z,\zeta) = \ln \left| \frac{\sigma\left(\ln \dfrac{z\overline{\zeta}}{q^2R^2}\right) \sigma\left(\ln \dfrac{z}{\overline{\zeta}}\right)}{\sigma\left(\ln \dfrac{z\zeta}{q^2R^2}\right) \sigma\left(\ln \dfrac{z}{\zeta}\right)} \right|,$$

где $\ln\omega = \ln|\omega| + i\arg\omega$, $0 < \arg z$, $\arg\zeta < \pi$, $\arg\overline{\zeta} = -\arg\zeta$, $\arg\omega_1\omega_2 = \arg\omega_1 + \arg\omega_2$, $\arg\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \arg\omega_1 - \arg\omega_2$, $\sigma(u)$ — сигма-функция Вейерштрасса с основными периодами $\omega_1 = -4\ln q$, $\omega_2 = 2\pi i$.

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [12, гл. III, п. 12]), можно получить разложения ядра в формуле (1) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0,1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \tag{3}$$
$$qR < \tau < r < R/q\,,$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}\tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \tag{4}$$
$$qR < r < \tau < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{t}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{t^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta\,, \tag{5}$$
$$qR < |t| < r < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = \frac{2}{t}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{r}{t}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}t^{2m}}{R^{2m}}\right)\left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta\,, \tag{6}$$
$$qR < r < |t| < R/q\,,$$

$$\frac{\partial G\left(z, qRe^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4}{qR}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial G\left(z, \frac{1}{q}Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi\,. \tag{8}$$

Формулы (2)–(8) приведены в диссертации А. Ф. Гришина [2]. В других источниках нам они не встречались. Заметим также, что если $\zeta \in \partial D(R_1, R_2)$, то $G(z,\zeta) = 0$.

Приведём также известные формулы для функции Грина (см., например, [2; 3]) $G(z,\zeta)$ полукруга $C(0,R) = \{z \,||z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Имеют место соотношения

$$G(z,\zeta) = \ln\left|\frac{(z-\overline{\zeta})(R^2 - z\overline{\zeta})}{(z-\zeta)(R^2 - z\zeta)}\right|,$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad 0 \leqslant \tau < r \leqslant R\,, \tag{9}$$

$$G(z,\zeta) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{\tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad 0 \leqslant r < \tau \leqslant R\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t} = \frac{2r\sin\theta(R^2 - r^2)(R^2 - t^2)}{|z-t|^2|R^2 - tz|^2}\,,$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m(R^{2m} - t^{2m})}{t^{m+1}R^{2m}} \sin m\theta\,, \quad 0 \leqslant r < |t| \leqslant R\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial n} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1}(R^{2m} - t^{2m})}{r^m R^{2m}} \sin m\theta\,, \quad 0 \leqslant |t| < r \leqslant R\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}=\frac{R^2-r^2}{R|Re^{i\varphi}-z|^2}-\frac{R^2-r^2}{R|Re^{-i\varphi}-z|^2}\,,$$

$$\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{R^{m+1}}\sin m\theta\sin m\varphi\,. \tag{13}$$

3. Обобщённая формула Карлемана для полукольца

Перейдём к обобщению формулы Карлемана для полукольца.

Прежде чем сформулировать нашу теорему, введём обозначение. Пусть λ — произвольная мера в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+$, определим меру λ_m, $m\in\mathbb{N}$, равенством

$$d\lambda_m(\zeta)=\frac{\sin m\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^m\,d\lambda(\zeta),\quad \zeta=\tau e^{i\varphi}\,,$$

где $\dfrac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi=0,\pi$ определяется по непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $v\in SK(R_1,R_2)$. Тогда справедлива формула*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta=\sum_{j=1}^{4}a_j\int_0^{\pi}M(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta},R_j)\sin m\theta\,d\theta-\\
-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\int_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)d\lambda_m(\tau)-\\
-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\int_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)+\\
+\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m}{R_1^m+R_2^m}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int_0^{\pi}\sin m\theta\,d\nu_j(\theta)\right)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Доказательство. В представлении (1) выберем точку $z=re^{i\varphi}$ так, что $v(z)>-\infty$ (такую точку всегда можно выбрать на любой полуокружности $\{z=re^{i\theta}|0<\theta<\pi,R_1<r<R_2\}$, так как в противном случае $v(z)\equiv-\infty$). Запишем представление (1) субгармонической функции v в полукольце $D_+(R_1,R_2)$:

$$\begin{aligned}v(re^{i\theta})=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\operatorname{Int}D_+(R_1,R_2)}\frac{G(re^{i\theta},\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta)+\sum_{j=1}^{4}a_jM(z,R_j)+\\
+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{\pi}\frac{\partial G(re^{i\theta},R_je^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_j(\varphi)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{I(R_1,R_2)}\frac{\partial G(re^{i\theta},t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)\,.\end{aligned}$$

Положим $R=\sqrt{R_1R_2}$, $q=\sqrt{R_1/R_2}$. Используя формулы (3)–(8), получим:

$$v(re^{i\theta})=\sum_{j=1}^{4}a_jM(re^{i\theta},R_j)-$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mr^m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{R-\varepsilon}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R+0}^{R_2-0}\left(\frac{1}{\tau^{2m}}-\frac{q^{2m}}{R^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)+\\
&\qquad+\frac{2}{\pi qR}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{r}{R}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)+\\
&\quad+\frac{2q}{\pi R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{R}{r}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_2(\varphi)-I_\varepsilon\,,\quad \varepsilon>0\,,
\end{aligned}
$$

где

$$
I_\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{D_+(R-\varepsilon,R)}}K(z,\zeta)\,d\lambda(\zeta)\,.
$$

Используя свойства функции Грина области (неотрицательность, логарифмическую особенность в точке z) и меры λ, нетрудно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}I_\varepsilon=0$. В пределе при $\varepsilon\downarrow+0$ получим

$$
\begin{aligned}
v(re^{i\theta})&=\sum_{j=1}^{4}a_jM(re^{i\theta},R_j)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mr^m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}r^{2m}}{R^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{R}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{\tau^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{m(1-q^{4m})}\left(1-\frac{q^{2m}R^{2m}}{r^{2m}}\right)\sin m\theta\int\limits_{R+0}^{R_2-0}\left(\frac{1}{\tau^{2m}}-\frac{q^{2m}}{R^{2m}}\right)\,d\lambda_m(\tau)+\\
&\qquad+\frac{2}{\pi qR}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{r}{R}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)+\\
&\quad+\frac{2q}{\pi R}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m\sin m\theta}{1-q^{4m}}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^m-q^{2m}\left(\frac{R}{r}\right)^m\right)\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_2(\varphi)\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Полагая в (15) $R=\sqrt{R_1R_2}$, $q=\sqrt{R_1/R_2}$, $r=R$, получим

$$
\begin{aligned}
v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})&=\sum_{j=1}^{4}a_jM(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta},R_j)-\\
&\quad- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\sin m\theta\int\limits_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)\,d\lambda_m(\tau)-
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\sin m\theta\int\limits_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int\limits_0^{\pi}\sin m\varphi\,d\nu_j(\varphi)\right)\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m\sin m\theta}{R_1^m+R_2^m}\,.$$

Используя ортогональность тригонометрических мономов, после умножения обеих частей на $\sin m\theta$ и интегрирования получим формулу (14). □

Следствие 1. *Пусть $v\in SK(R_1',R_2')$, $R_1'<R_1<R_2<R_2'$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_0^{\pi}v(\sqrt{R_1R_2}e^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta=\frac{\left(\sqrt{R_1R_2}\right)^m}{R_1^m+R_2^m}\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{R_j}\int\limits_0^{\pi}v(R_je^{i\theta})\sin m\theta\,d\theta\right)-$$

$$-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\right)^m\int\limits_{R_1+0}^{\sqrt{R_1R_2}}\left(1-\left(\frac{R_1}{\tau}\right)^{2m}\right)d\lambda_m(\tau)-$$

$$-\frac{2}{m(R_1^m+R_2^m)}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^m\int\limits_{\sqrt{R_1R_2}}^{R_2-0}\left(\left(\frac{R_2}{\tau}\right)^{2m}-1\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (16)$$

Доказательство. Утверждение прямо следует из (14). В этом случае

$$\lim_{r\to R_2-0}R_2\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta=R_2\int\limits_\alpha^\beta v(R_2e^{i\theta})\,d\theta,\ \lim_{r\to R_1+0}R_1\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta=R_1\int\limits_\alpha^\beta v(R_1e^{i\theta})\,d\theta$$

и, следовательно, $d\nu_j(\theta)=R_jv(R_je^{i\theta})\,d\theta$, $j=1,2$. Кроме того, выполняются равенства $a_j=0$, $j=1,2,3,4$. □

4. Обобщённая формула Карлемана для полукруга

Рассмотрим обобщённую формулу Карлемана для субгармонических функций в полукруге. Она имеет различное оформление и выводится при различных ограничениях на функцию v. Для функций субгармонических в полуплоскости наиболее удачное оформление обобщённой формулы Карлемана получил К. Ито [5] (см. также [2, теорема 43; 12]). Нам понадобится следующая теорема А. Ф. Гришина.

Теорема 2. *Пусть v — субгармоническая функция в полукруге $C_+(0,R)$, имеющая в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту, μ — её мера Рисса, $G(z,\zeta)$ — функция Грина полукруга $C_+(0,R)$. Тогда существуют вещественные числа a_j, $j=1,2$, мера ν_1 на интервале $(0,\pi)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причём мера $\tilde\nu_1$, где $d\tilde\nu_1(\zeta)=\frac{\partial G(z_0,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}d\nu_1(\zeta)$, имеет ограниченную полную вариацию на интервале $(0,\pi)$, мера ν на интервале $(-R,R)$, конечная на каждом компакте из этого интервала, причём мера $\tilde\nu$, где $d\tilde\nu(\zeta)=\frac{\partial G(z_0,t)}{\partial n_\zeta}d\nu(\zeta)$*

(z_0 *такая точка, что* $v(z_0) > -\infty$), *имеет ограниченную полную вариацию на интервале* $(-R, R)$, *такие, что при* $z \in C_+(0,R)$ *имеет место равенство*

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta}\,d\nu_1(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t) + \\ + a_1 M(z,R) + a_2 M(z,-R)\,, \tag{17}$$

где $M(z,\zeta)$ *— функция Мартина полукруга* $C_+(0,R)$, *отвечающая граничной точке* ζ, *а интегралы понимаются как несобственные с особыми точками на концах интегрирования. Имеют место формулы*

$$\nu_1([\alpha,\beta]) = \lim_{r\to R-0} R\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\varphi})\,d\varphi,\ \textit{если}\ 0<\alpha<\beta<\pi,\quad \nu_1(\{\alpha\}) = \nu_1(\{\beta\}) = 0\,,$$

$$\nu([a,b]) = \lim_{y\to+0}\int\limits_a^b v(x+iy)\,dx,\ \textit{если}\ [a,b]\in(-R,R),\ \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0\,,$$

$$d\nu_1(\varphi) = Rv(Re^{i\varphi})\,d\varphi + d\sigma_1(\varphi),\quad d\nu(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)\,,$$

где почти всюду

$$v(Re^{i\varphi}) = \lim_{r\to R-0} v(re^{i\varphi}),\ v(t) = \lim_{y\to+0} v(t+iy)\,,$$

а σ_1, σ, *— меры, сингулярные относительно меры Лебега* (*невозрастающие ограниченные функции на* $(0,\pi)$, *на* $(-R,R)$, *для которых почти всюду* $\sigma_1' = 0$, $\sigma' = 0$).

Если, кроме этого, функция v *является субгармонической и имеет положительную гармоническую мажоранту в более широком полукруге* $C_+(0,R_1)$, $R<R_1$, *то*

$$v(z) = -\iint\limits_{C_+(0,R)} G(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n_\zeta} v(Re^{i\varphi})\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial G(z,t)}{\partial n_t}\,d\nu(t)\,.$$

Теорема 2 доказана в диссертации А. Ф. Гришина [3, теорема 37]. В других источниках (например, в [4, теорема 1, теорема 2]) она приводится без доказательства. Доказательство легко провести, используя рассуждения при доказательстве теоремы 7 в [11]. В несколько другой формулировке теорема 2 доказана в работе [5].

Мера $\hat\nu = \nu_1 + \nu$ называется граничной мерой функции v.

Обозначим через $SK(R)$ пространство субгармонических функций в полукруге $C_+(0,R)$, имеющих в этом полукруге положительную гармоническую мажоранту. Для функции $v \in SK(R)$ определим полную меру λ как

$$\lambda(K) = 2\pi \int\limits_{C_+(0,R)\cap K} \operatorname{Im}\,\zeta\,d\mu(\zeta) - \hat\nu(K)\,.$$

Сформулируем и докажем обобщённую формулу Карлемана для субгармонических функций в полукруге.

Теорема 3. *Пусть $v \in SK(R)$. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{R^{m+1}}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)\,d\nu_1(\theta) = \frac{1}{R_0^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(R_0e^{i\theta})\,d\theta - \\ - a_1\int\limits_0^\pi M(R_0e^{i\theta},R)\sin(m\theta)\,d\theta - a_2\int\limits_0^\pi M(R_0e^{i\theta},-R)\sin(m\theta)\,d\theta + \\ + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) + \frac{1}{2m}\int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (18)$$

Доказательство. В представлении (17) выберем такую точку $z = R_0e^{i\theta}$, что $v(z) > -\infty$ (как отмечалось выше, такую точку всегда можно выбрать на любой полуокружности $\{z = re^{i\theta} | 0 < \theta < \pi, 0 < r < R\}$). Запишем представление (17) субгармонической функции $v(z)$ в полукруге $C_+(0,R)$. Используя формулы (9)–(13), получим

$$v(R_0e^{i\theta}) = a_1M(R_0e^{i\theta},R) + a_2M(R_0e^{i\theta},-R) + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^\infty \frac{R_0^m\sin m\theta}{m}\left(-\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) - \int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^\infty\left(\frac{R_0^m}{R^{m+1}}\right)\sin m\theta\int\limits_0^\pi \sin m\varphi\,d\nu_1(\varphi)\,.$$

Используя ортогональность тригонометрических мономов, после умножения обеих частей на $\sin m\theta$ и интегрирования получим формулу (18). □

Следствие 2. *Пусть $v \in SK(R')$, $R < R'$. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{R^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(Re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{R_0^m}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(R_0e^{i\theta})\,d\theta + \\ + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0) + \frac{1}{2m}\int\limits_{R_0}^R\left(\frac{1}{\tau^2 m}-\frac{1}{R^{2m}}\right)d\lambda_m(\tau)\,. \quad (19)$$

Доказательство. Утверждение прямо следует из (18). В этом случае

$$\lim_{r\to R-0} R\int\limits_\alpha^\beta v(re^{i\theta})\,d\theta = R\int\limits_\alpha^\beta v(Re^{i\theta})\,d\theta$$

и, следовательно, $d\nu_1(\theta) = Rv(Re^{i\theta})\,d\theta$.

Кроме того, выполняются равенства $a_j = 0$, $j = 1, 2$. □

Заметим, что формула (19) — это формула Ито (полученная для субгармонических функций во всей полуплоскости) в исполнении А. Ф. Гришина.

Заключение

В проблеме представления субгармонических функций в различных областях комплексной плоскости остаётся много открытых вопросов. На наш взгляд, одна из основных проблем, являющихся камнем преткновения, есть вычисление функции Грина данной области, особенно для многосвязных областей. В этих случаях эффективным инструментом решения проблемы является теория тонкой топологии и пространств Мартина [13], в частности, теорема Рисса — Мартина о представлении.

Формула (16) отличается от формулы (19) и, на первый взгляд, выглядит более «громоздко». Однако в ней нет слагаемого

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{R_0^{2m}}-\frac{1}{R^{2m}}\right)\lambda_m(R_0-0)\,,$$

которое может иметь большой рост относительно R_0 и создавать проблемы при исследованиях. Дело в том, что формулы типа Карлемана связывают коэффициенты Фурье

$$c_m(r,v)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(m\theta)v(re^{i\theta})\,d\theta$$

субгармонической в полуплоскости функции v с её полной мерой λ [14] и являются полезным инструментом в теории роста субгармонических функций.

Интересно также получить аналогичные формулы для субгармонических функций в кольце $\{z : R_0 < |z| < R\}$.

Список литературы

1. **Гольдберг А. А., Островский И. В.** Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1972.
2. **Гришин А. Ф.** Субгармонические функции конечного порядка : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 1992.
3. **Hayman W. K.** Questions of regularity connected with Phragmen–Lindelöf principle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1956. Vol. 9, no. 35. P. 115–126.
4. **Ito J.-I.** Subharmonic functions in half-plane // Transactions of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 129, no. 3. P. 479–499.
5. **Govorov N. V.** Riemann's Boundary Problem with Infinite Index. Basel, Boston, Berlin : Birkäuser, 1994.
6. **Malyutin K. G., Kozlova I. I., Sadik N. M.** Canonical functions of admissible measures in the half-plane // Mathematical Notes. 2014. Vol. 96, no. 3. P. 85–96.
7. **Carleman T.** Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate van vorgegeben Potenzen // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1923. Vol. 17, no. 9. P. 1–30.
8. **Гришин А. Ф.** Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I // Математика, физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1, №2. С. 193–215.
9. **Меньшикова Э. Б.** Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций // Изв. вузов. Математика. 2022. № 6. С. 37–53.
10. **Khabibullin B. N., Menshikova E. B.** Preorders on subharmonic functions and measures with applications to the distribution of zeros of holomorphic functions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 3. P. 587–611.

11. **Малютин К. Г., Наумова А. А.** Представление субгармонических функций в полукольце и в полукруге // Чебышев. сб. 2023. Т. 24, вып. 5. С. 136–152.
12. **Ахиезер Н. И.** Элементы теории эллиптических функций. М. : Наука, 1970.
13. **Brelot M.** On Topologies and Boundaries in Potential Theory. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1971.
14. **Малютин К. Г.** Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 6. С. 51–70.

Поступила в редакцию 30.01.2025.
После переработки 09.08.2025.

Сведения об авторах

Малютин Константин Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: malyutinkg@gmail.com.

Наумова Алена Александровна, ассистент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: aliona.filatowa2013@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 688–700.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-688-700

GENERALIZED CARLEMAN FORMULA FOR SEMIRING AND SEMIDISC

K.G. Malyutin[a], A.A. Naumova[b]

Kursk State University, Kursk, Russia
[a] malyutinkg@gmail.com, [b] aliona.filatowa2013@yandex.ru

A generalization of the Carleman formula for the subharmonic function in an open semiring and in an open semidisc is obtained. The generalized formula takes into account both the distribution of the Riesz measure of the function and its boundary measure. The proof uses the theory of thin topology and Martin spaces.

Keywords: *Carleman formula, semiring, semicircle, subharmonic function, Riesz measure, boundary measure, full measure.*

References

1. **Gol'dberg A.A., Ostrovskii I.V.** *Raspredeleniye zhacheniy meromorfnykh funktsiy* [Value distribution for meromorphic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970. (In Russ.).
2. **Grishin A.F.** *Subgarmonicheskiye funktsii konechnogo poryadka* [Subharmonic functions of finite order]. Doctor of Sciences Thesis. Khar'kov, 1992. (In Russ.).
3. **Hayman W.K.** Questions of regularity connected with Phragmen — Lindelöf principle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1956, vol. 9, no. 35, pp. 115–126.
4. **Ito J.-I.** Subharmonic functions in half-plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 129, no. 3, pp. 479–499.
5. **Govorov N.V.** *Riemann's Boundary Problem with Infinite Index*. Basel, Boston, Berlin, Birkäuser, 1994.
6. **Malyutin K.G., Kozlova I.I., Sadik N.M.** Canonical functions of admissible measures in the half-plane. *Mathematical Notes*, 2014, vol. 96, no. 3, pp. 85–96.
7. **Carleman T.** Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate van vorgegeben Potenzen. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 1923, vol. 17, no. 9, pp. 1–30.
8. **Grishin A.F.** Nepreryvnost' i asimptoticheskaya nepreryvnost' subgarmonicheskikh funktsiy. I [Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. I]. *Matematika, fizika, analiz, geometriya* [Mathematics, physics, analysis, geometry], 1994, vol. 1, no 2, pp. 193–215. (In Russ.).
9. **Men'shikova E.B.** Integral formulas of Carleman and Levin for meromorphic and subharmonic functions. *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, pp. 28–42.
10. **Khabibullin B.N., Men'shikova E.B.** Preorders on Subharmonic Functions and Measures with Applications to the Distribution of Zeros of Holomorphic Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 587–611.
11. **Malyutin K.G., Naumova A.A.** Representation of subharmonic functions in the half-ring and in the half-disk. *Chebyshevskii Sbornik*, 2023, vol. 24, no. 5, pp. 136–152.
12. **Ahiezer N.I.** *Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy* [Elements of the theory of elliptic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970.
13. **Brelot M.** *On Topologies and Boundaries in Potential Theory.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1971.

The research is supported by Russian Science Foundation (project No. 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

14. **Malyutin K.G.** Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a halfplane. *Sbornik Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 6, pp. 843–861.

Article received 30.01.2025.
Corrections received 09.08.2025.