Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 677–687.

УДК 517.53 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-677-687

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ С МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ РОСТА

М. В. Кабанко

Курский государственный университет, Курск, Россия
kabankom@gmail.com

Понятие уточнённого порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. В статье приводится общая трактовка этого понятия как уточнённой функции роста относительно модельной функции роста. Классический уточнённый порядок, уточнённый порядок в смысле Валирона, является частным случаем рассматриваемого понятия. Основной результат данной работы — нижняя оценка расстояния между точками, в которых достигается максимум модуля целой функции, и множеством нулей этой функции, полученная с помощью понятия уточнённого порядка относительно модельной функции.

Ключевые слова: *модельная функция, функция роста, уточнённый порядок, выпуклая функция, целая функция.*

Введение

В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой (субгармонической) функции и распределением нулей целой (риссовской меры субгармонической) функции. В данной работе исследуется связь расстояния между множеством нулей целой функции и точками, в которых достигается максимум модуля. Первые результаты в этом направлении были получены А. Макентайром в работе [1]. Дальнейшее развитие этих идей представлено в работах [2–6], в которых И. В. Островский и А. Юрейн получили более точные оценки для исследуемых расстояний. Также можно отметить в этом направлении работы С. И. Фединика и П. В. Филевича (см., например, [7]).

В настоящей работе это расстояние оценивается на основе уточнённого порядка относительно модельной функции, который был введён Б. Н. Хабибуллиным в работе [8] и в дальнейшем использовался авторами работ [9; 10] для уточнения классических результатов и приложений в теории роста целых и субгармонических функций.

Будем использовать следующие определения и терминологию. Через $K, M, \ldots, \varepsilon, \delta, \ldots$ мы будем обозначать положительные константы. Через $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ обозначаем множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел и $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ — положительная полуось. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, в частности, $C(r) = C(0, r)$. Через $B(a, r) = \overline{C(a, r)}$ обозначим замкнутый круг, в частности, $B(r) = B(0, r)$. Также стандартно обозначим $S(a, r) = B(a, r) \setminus C(a, r)$ — окружность радиуса r с центром в точке a.

Равенства (неравенства), которые выполняются для всех достаточно больших значений переменной $r > 0$, будем называть традиционно асимптотическими равенствами (неравенствами).

Определение 1. Функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+$, строго положительная и выпуклая относительно логарифма, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$, называется *модельной функцией роста.*

Будем считать, что $M(0) = 0$ для модельной функции и $f(0) = 1$ для целых функций, поскольку нас будет интересовать поведение этих функций при достаточно больших $r > 0$. Это ограничение не уменьшает общности наших дальнейших рассуждений и носит технический характер, упрощая в некоторых случаях доказательства.

Известно (см., например, [11]), что для любого $r > 0$ существуют точки на окружности $S(0, r)$, в которых максимум модуля $\mathcal{M}(r, f)$ достигается. Обозначим такие точки $\{w(r)\}$ и будем называть их точками максимума модуля функции. Существование таких точек эквивалентно тому, что $|f(w)| = \mathcal{M}(|w(r)|, f)$. В дальнейшем будем отождествлять w и $w(r)$.

Определение 2. Абсолютно непрерывная функция ρ_M называется *уточнённым порядком* относительно модельной функции роста $M(r)$, если существуют пределы

$$\lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \varrho \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = 0\,. \tag{1}$$

Здесь под $\rho'_M(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Далее, поскольку модельная функция роста M фиксированная, индекс M в обозначении уточнённого порядка мы будем опускать.

Функцию $M^{\rho(r)}(r)$ мы будем обозначать через $V(r)$. Всюду далее будем считать, что $0 < \varrho < \infty$.

Определение 3. Для любой целой функции $f(z)$ конечного порядка ϱ величина

$$\sigma = \sigma_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \mathcal{M}(r, f)}{V(r)}$$

называется *типом функции $f(z)$ относительно уточнённого порядка $\rho_M(r)$.*

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Обозначим $L(r) = M(r)^{\rho(r)-\varrho}$. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{L(r+b)}{L(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\ln \frac{L(r+b)}{L(r)} &= \ln(M(r+b)^{\rho(r+b)-\varrho}) - \ln(M(r)^{\rho(r)-\varrho}) = \\ &= (\rho(r+b) - \varrho) \ln M(r+b) - (\rho(r) - \varrho) \ln M(r) = \\ &= (\rho(r+b) \ln M(r+b) - \rho(r) \ln M(r)) - \varrho(\ln M(r+b) - \ln M(r)).\end{aligned}$$

Введём обозначение $\varphi(t)=\rho(t)\ln M(t)$. Тогда получим

$$\ln\frac{L(r+b)}{L(r)}=\frac{b(\varphi(r+b)-\varphi(r))}{b}-\varrho\ln\frac{(M(r+b)-M(r))+M(r)}{M(r)}=$$

$$=b\varphi'(r)-\varrho\ln\left(1+\frac{(M(r+b)-M(r))}{M(r)}\right)=b\varphi'(r)-\frac{\varrho bM'(r)}{M(r)}\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}}=$$

$$=b\left(\rho'(r)\ln M(r)+\rho(r)\frac{M'(r)}{M(r)}\right)-\frac{\varrho bM'(r)}{M(r)}\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}}=$$

$$=b\frac{M'(r)}{M(r)}\left(\rho'(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\ln M(r)+\rho(r)-\varrho\ln\left(1+\frac{bM'(r)}{M(r)}\right)^{\frac{M(r)}{bM'(r)}}\right).$$

Учитывая (1), получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\left(\ln\frac{L(r+b)}{L(r)}\right)^{\frac{M'(r)}{bM(r)}}=0,$$

а отсюда и утверждение леммы. □

Предложение 1. *Для функции роста $V(r)$ относительно модельной функции $M(r)$ справедливо следующее равенство:*

$$\int\limits_{r_0}^{r}M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du=\frac{1}{\varrho+1}M(r)^{\rho(r)+1}+o(M(r)^{\rho(r)+1}),\quad r\to+\infty\,. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{r_0}^{r}M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du=\frac{1}{\varrho+1}\int\limits_{r_0}^{r}M(u)^{\rho(u)-\varrho}\,dM(u)^{\varrho+1}=\frac{1}{\varrho+1}M(u)^{\rho(u)+1}\Big|_{r_0}^{r}+$$

$$+O(1)-\frac{1}{\varrho+1}\int\limits_{r_0}^{r}\left[\rho(u)+\frac{M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right]M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du\,.$$

Из определения уточнённого порядка следует, что для любого $\epsilon>0$ асимптотически

$$|\rho(r)-\varrho|<\frac{\epsilon}{2},\quad \left|\frac{M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right|<\frac{\epsilon}{2}\,.$$

Воспользовавшись этим, мы получим, что

$$(1+o(1))\int\limits_{r_0}^{r}M(u)^{\rho(u)}M'(u)\,du=\frac{1}{\varrho+1}M(r)^{\rho(r)+1}+O(1),\quad r\to+\infty.$$

Отсюда следует равенство (2). □

В дальнейших рассуждениях будем использовать обозначение $\psi(t)=\frac{1}{(\ln M(t))'}$.

Лемма 2. *Пусть $\rho_M(r)$ — уточнённый порядок относительно модельной функции. Тогда будет справедливо следующее асимптотическое равенство при $0<\rho<\infty$: $\psi(r)V'(r)=(\varrho+o(1))V(r)$.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем

$$V'(r) = M^{\rho(r)-1}(r)\rho(r)M'(r) + M^{\rho(r)}(r)\ln M(r)\rho'(r) = \\ = V(r)\frac{M'(r)}{M(r)}\left(\rho(r) + \rho'(r)\ln M(r)\frac{M(r)}{M'(r)}\right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{V'(r)}{(\ln M(r))'} = (\varrho + o(1))V(r). \tag{3}$$

Лемма доказана. □

Введём в рассмотрение функцию

$$\xi(t) = t\exp\left(\frac{\psi(t)V(t)}{V'(t)}\right). \tag{4}$$

Тогда в силу равенства (3) получаем

$$\ln\frac{\xi(r)}{r} = \frac{1}{\varrho} + o(1).$$

Теорема 1. *Пусть $M(r)$ — мультипликативная модельная функция. Если отрезок $[a,b]$ таков, что $b \geqslant a > 0$, то равномерно относительно $M(t) \in [a,b]$ выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{V(tr)}{V(r)} = M^{\varrho}(t).$$

Доказательство. Для начала рассмотрим

$$\frac{V(tr)}{V(r)} = M(t)^{\rho(tr)}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)}.$$

Пусть, $\varepsilon(r) = \sup\limits_{u\geqslant r}\left|\frac{\ln M(u)}{M'(u)}\rho'(u)\ln M(u)\right|$. Легко видеть, что $\lim\limits_{r\to+\infty}\varepsilon(r) = 0$. Используя это, получим

$$|\rho(tr) - \rho(r)| = \left|\int\limits_r^{tr}\rho'(u)\,du\right| = \left|\int\limits_r^{tr}\frac{\rho'(u)M(u)\ln M(u)}{M'(u)}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right| \leqslant \\ \leqslant \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\left|\int\limits_r^{tr}\frac{M'(u)}{M(u)\ln M(u)}\,du\right| = \max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\}\ln\left(1 + \frac{\ln M(t)}{\ln(M(r)}\right).$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \left|\varlimsup_{r\to+\infty}\ln\frac{(M(r))^{\rho(tr)}}{V(r)}\right| \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}\ln M(r)|\rho(tr) - \rho(r)| \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{r\to+\infty}\left(\max\{\varepsilon(r);\varepsilon((tr)\}\ln M(r)\ln\left(1 + \frac{\ln M(t)}{\ln M(r)}\right)\right) \leqslant \lim_{r\to+\infty}\max\{\varepsilon(r);\varepsilon(tr)\} = 0.$$

Таким образом, существует предел

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)^{\rho(tr)}}{V(r)} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(tr)^{\rho(tr)}}{V(r)}=\lim_{r\to+\infty}M(t)^{\rho(tr)}\lim_{r\to+\infty}M(r)^{\rho(tr)-\rho(r)}=M^{\varrho}(t)\,. \tag{5}$$

$\square$

Замечание 1. Более общее утверждение относительно модельной функции было доказано в работе [10], однако для целей работы более удобно рассматривать мультипликативную модельную функцию.

Теорема 2. *При $r\to\infty$ и $0<a\leqslant t\leqslant b<\infty$ равномерно относительно t выполняется асимптотическое неравенство*

$$(1-\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r)<M(tr)^{\rho(tr)}<(1+\epsilon)M^{\varrho}(t)V(r)\,.$$

Заметим, что при $M(t)>1$ имеет место асимптотическое неравенство

$$M(tr)^{\rho(tr)}<M(t)^{\varrho+\epsilon}V(r)\,.$$

Лемма 3. *Для функции $\xi(r)$, определённой равенством* (4)*, будет справедливо равенство*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Доказательство. Действительно, из (1) непосредственно получаем

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(\xi(r))}{V(r)}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V\left(r\exp\left(\frac{\psi(r)V(r)}{V'(r)}\right)\right)}{V(r)}=M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим функцию вида

$$K(M(r),f)=\frac{d}{d\ln M(r)}\ln\mathcal{M}(M(r),f)=\frac{M(r)}{M'(r)}\frac{d}{dr}\ln\mathcal{M}(M(r),f).$$

Функция $K(M(r),f)$ является неотрицательной и неубывающей.

Легко видеть, что из леммы 3 следует неравенство

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{V(\xi(r))}{\psi(r)V'(r)\ln\frac{\xi(r)}{r}}\leqslant M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}). \tag{6}$$

Лемма 4. *Пусть целая функция $f(z)$ имеет конечный отличный от нуля порядок относительно уточнённого порядка ρ_M и тип, не превосходящий σ. Тогда будет верно неравенство*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{K(r,f)}{\psi(r)V'(r)}\leqslant\sigma\cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}}).$$

Доказательство. Для любых $R>r$ получаем

$$\ln\mathcal{M}(M(R),f)=\int_0^R\frac{d}{dt}\ln\mathcal{M}(M(t),f)dt=\int_0^R\frac{d}{d\ln M(t)}\ln\mathcal{M}(M(t),f)d\ln M(t)\geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_r^R \frac{d\ln\mathcal{M}(M(t),f)}{d\ln M(t)} d\ln M(t) \geqslant K(M(r),f)\int\limits_r^R d\ln M(t) = K(M(r),f)\cdot\ln\frac{M(R)}{M(r)}.$$

Таким образом, для $b = M(r)$, $B = M(R)$ при $R > r$ получаем оценку

$$\ln\mathcal{M}(B,f) \geqslant K(b,f)\cdot\ln\frac{B}{b}.$$

Кроме того, получим

$$\frac{K(b,f)}{\psi(b)V'(b)} \leqslant \frac{\ln\mathcal{M}(B,f)}{V(B)}\cdot\frac{V(B)}{\psi(b)V'(b)\ln\frac{B}{b}}.$$

Следовательно, при стремлении r к бесконечности, используя (6), полагая в нём $B = \xi(b)$, получаем требуемое неравенство. $\square$

2. Основной результат

Обозначим через Z_f множество нулей функции $f(z)$: $Z_f = \{z \in \mathbb{C} |\, f(z) = 0\}$. Под $\operatorname{dist}(a,G)$ будем понимать расстояние между точкой a и множеством G:

$$\operatorname{dist}(a,G) = \inf_{z\in G}|a - z|.$$

Определение 4. Пусть $M(r)$ — модельная функция роста и

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\mathcal{M}(r,f)}{\ln M(r)} = \varrho \in \mathbb{R}_+\,.$$

Функция $\rho(r) = \rho_M(r)$ называется *собственным уточнённым порядком целой функции* $f(z)$, если $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \varrho$.

Теорема 3. *Пусть $\rho_M(r)$ — собственный уточнённый порядок целой функции $f(z)$ и $\sigma = \sigma_f$ — тип функции $f(z)$ относительно модельной функции $\rho_M(r)$. Тогда*

$$\varliminf_{|w|\to\infty}\operatorname{dist}(w,Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{\exp(-M^{\varrho}(1))}{\sigma\cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})},$$

где w — точка максимума модуля, $V(r) = M(r)^{\rho(r)}$ — функция роста относительно мультипликативной модельной функции $M(r)$ и $\psi(r) = \frac{1}{(\ln M(r))'}$.

Доказательство. В доказательстве теоремы мы будем использовать идеи A. Macintyre из работы [1], которые также использовались авторами работ [2–6].

Пусть, как и выше, w — точка максимума модуля функции $f(z)$. Определим функции $\Phi_w(z)$ и $Q(h,w)$ равенствами

$$\Phi_w(z) = \frac{f(w+z)}{f(w)}, \quad Q(h,w) = \max_{|z|\leqslant h}|\Phi_w(z)|.$$

Поскольку для функции $f(z)$ верно неравенство $|f(w+z)| \leqslant \mathcal{M}(|w|+|z|,f)$, то получаем оценку

$$Q(h,w) \leqslant \frac{\mathcal{M}(|w|+h,f)}{\mathcal{M}(|w|,f)}.$$

После логарифмирования этого неравенства получаем

$$\ln Q(h,w) \leqslant \ln \mathcal{M}(|w|+h,f) - \ln \mathcal{M}(|w|,f) = \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln \mathcal{M}(M(t),f) =$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} \frac{d}{d\ln M(t)} \ln \mathcal{M}(M(t),f) d\ln M(t) =$$

$$= \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} K(M(t),f) d\ln M(t) \leqslant K(|w|+h,f) \int\limits_{M^{-1}(|w|)}^{M^{-1}(|w|+h)} d\ln M(t) =$$

$$= K(|w|+h,f) \ln\left(1+\frac{h}{|w|}\right) \leqslant K(|w|+h,f)\frac{h}{|w|}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства и леммы 4 следует, что при $|w| > r_\varepsilon$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\ln Q(h,w) \leqslant (\sigma \cdot M^\varrho(e^{\frac{1}{\varrho}}) + \varepsilon)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|}. \qquad (7)$$

Теперь с помощью функции $Q(h,w)$ оценим требуемое расстояние. Для этого будем использовать функцию

$$\eta_w(z) = \frac{Q(h,w)(\Phi_w - 1)}{Q^2(h,w) - \Phi_w(z)}.$$

Эта функция была введена в работе [1], и рассуждения с её применением, с некоторыми изменениями, аналогичны доказательствам работ [2–6]. Для полноты изложения приведём доказательство.

Функция $\eta_w(z)$ удовлетворяет условиям $\eta_w(0) = 0$ и $|\eta_w(z)| \leqslant 1$ при значениях $|z| \leqslant h$. Применив к этой функции лемму Шварца, получаем $|\eta_w(z)| \leqslant \frac{|z|}{h}$ для $|z| \leqslant h$. Тогда

$$Q(h,w)|\Phi_w(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{h} \cdot |Q^2(h,w) - \Phi_w(z)| \leqslant \frac{|z|}{h}(|Q^2(h,w) - 1| + |1 - \Phi_w(z)|).$$

Из последнего соотношения следует неравенство

$$|\Phi_w(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{h} \cdot \frac{|Q^2(h,w) - 1|}{|Q(h,w) - \frac{|z|}{h}|} \leqslant \frac{|z|}{h(Q(h,w)+1)} < 1.$$

Так как правая часть последнего неравенства меньше единицы, то $|z| < \frac{h}{Q(h,w)}$. Отсюда следует, что $\Phi_w(z) \neq 0$ и, более того, $f(w+z) \neq 0$ для значений $|z| < \frac{h}{Q(h,w)}$. Таким образом, получаем

$$\operatorname{dist}(w, Z_f) \geqslant \frac{h}{Q(h,w)}. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получаем следующую оценку для любого $\varepsilon > 0$:

$$\operatorname{dist}(w, Z_f) \geqslant h \exp\left(-\sigma \cdot M^\varrho(e^{\frac{1}{\varrho}}) + \varepsilon\right)\psi(|w|+h)V'(|w|+h)\frac{h}{|w|} \text{ при } |w| > r_\varepsilon. \qquad (9)$$

Положим
$$h = \frac{|w|}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}. \tag{10}$$
Из (9) получим при $|w| > r_\varepsilon$
$$\operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right)\frac{\psi(|w|+h)V'(|w|+h)}{\psi(|w|)V'(|w|)}\right).$$
Применяя лемму 2, получаем
$$\operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right)\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)}\right).$$
Оценим сомножитель $\dfrac{V(|w|+h)}{V(|w|)}$ в показателе экспоненты. По лемме 1, учитывая (10), получим
$$\frac{V(|w|+h)}{V(|w|)} = \frac{V\left(|w| + \frac{|w|}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}\right)}{V(|w|)} \leqslant M^{\rho}\left(1 + \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})\psi(|w|)V'(|w|)}\right).$$
Таким образом, при стремлении $|w|$ к бесконечности получим асимптотическое неравенство
$$\varliminf_{|w|\to\infty} \operatorname{dist}(w, Z_f)\frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{1}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})} \exp\left(-\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}\right)\cdot M^{\varrho}(1)\right),$$
откуда и следует утверждение теоремы. □

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. Г. Малютину за полезные обсуждения, которые позволили улучшить данную работу.

Список литературы

1. **Macintyre A. J.** Wiman's method and "flat regions" of integral functions // Quarterly Journal of Mathematics. 1938. Vol. 9. P. 81–88.
2. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an entire function // Complex Variables, Theory and Application. 2003. Vol. 48, no. 6. P. 341–354.
3. **Üreyen A. E.** On maximum modulus points and the zero set for an entire function of either zero or infinite order // Computational Methods and Function Theory. 2004. Vol. 4, no. 2. P. 341–354.
4. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2005. Vol. 341, no. 8. P. 381–384.
5. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth // Comptes Rendus Mathematique. 2005. Vol. 341, no. 8. P. 481–484.

6. **Ostrovskii I. V., Üreyen A. E.** The growth irregularity of slowly growing entire functions // Functional Analysis and its Applications. 2006. Vol. 40. P. 304–312.
7. **Fedynyak S. I., Filevych P.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an analytic function // Matematychni Studii. 2019. Vol. 52, no. 1. P. 10–23.
8. **Хабибуллин Б. Н.** Обобщение уточнённого порядка // Докл. Башкир. ун-та. 2020. Т. 5, вып. 2. С. 1–5.
9. **Кабанко М. В., Малютин К. Г., Хабибуллин Б. Н.** Об уточнённой функции роста относительно модельной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. математика и её приложения. Темат. обзоры. 2023. Т. 230. С. 56–74.
10. **Kabanko M. V., Malyutin K. G.** On the proximate order with respect to the model function // Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 280. P. 692–709.
11. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М. : ГИТТЛ, 1956.

Поступила в редакцию 27.12.2024.
После переработки 26.07.2025.

Сведения об авторе

Кабанко Михаил Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет, Курск, Россия; e-mail: kabankom@gmail.com

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 677–687.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-677-687

ON SOME METRIC CHARACTERISTICS OF THE ENTIRE FUNCTIONS THAT CONNECTED WITH THE MODEL FUNCTION OF GROWTH

M.V. Kabanko

Kursk State University, Kursk, Russia
kabankom@gmail.com

The concept of proximate order is widely used in the theories of integer, meromorphic, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In this paper, we provide a general interpretation of this concept as a proximate order relative to the model growth function. The classical proximate order in the sense of Valiron is the particular case of proximate order relative to the model growth function. The main result of this work is a lower estimate of the distance between the points at which the maximum modulus of the entire function and the set of zeros of this function is reached, using the concept of a proximate order relative to the model function.

Keywords: *model function, growth function, proximate order, convex function, entire function.*

References

1. **Macintyre A.J.** Wiman's method and "flat regions" of integral functions. *Quarterly Journal of Mathematics*, 1938, vol. 9, pp. 81–88.
2. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an entire function. *Complex Variables, Theory and Application*, 2003, vol. 48, no. 6, pp. 341–354.
3. **Üreyen A.E.** On maximum modulus points and the zero set for an entire function of either zero or infinite order. *Computational Methods and Function Theory*, 2004, vol. 4, no. 2, pp. 341–354.
4. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2005, vol. 341, no. 8, pp. 381–384.
5. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth. *Comptes Rendus Mathematique*, 2005, vol. 341, no. 8, pp. 481–484.
6. **Ostrovskii I.V., Üreyen A.E.** The growth irregularity of slowly growing entire functions. *Functional Analysis and its Applications*, 2006, vol. 40, pp. 304–312.
7. **Fedynyak S.I., Filevych P.** Distance between a maximum modulus point and zero set of an analytic function. *Matematychni Studii*, 2019, vol. 52, no. 1, pp. 10–23.
8. **Khabibullin B.N.** Obobshcheniye utochyonnogo poryadka [A generalization of the proximate order]. *Doklady Bashkirskogo universiteta* [Reports of Bashkir University], 2020, vol. 5, no. 2, pp. 1–5. (In Russ.).
9. **Kabanko M.V., Malyutin K.G., Khabibullin B.N.** Ob utochnyonnoy funktsii rosta otnositel'no model'noy [On the proximate growth function relative to the model growth function]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results in Science and Technology. Series on Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys], 2023, vol. 230, pp. 56–74. (In Russ.).
10. **Kabanko M.V., Malyutin K.G.** On the proximate order with respect to the model function. *Journal of Mathematical Sciences*, 2024, vol. 280, pp. 692–709.

11. **Levin B.Ya.** *Lectures on Entire Functions.* American Mathematical Society, 1996.

Article received 27.12.2024.
Corrections received 26.07.2025.