Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 664–676.

УДК 517.929.4 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-664-676

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. К. Искаков

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

Рассматривается класс систем нелинейных неавтономных интегродифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Методом функционалов Ляпунова — Красовского получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, установлены оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценки на множество притяжения.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения с распределённым запаздыванием, уравнение нейтрального типа, устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.*

Введение

Рассматривается класс нелинейных систем интегродифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)+D(t)y(t-\tau)\right)=A(t)y(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}B(t,t-s)y(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds,\quad t>0, \tag{1}$$

где $\tau>0$ — параметр запаздывания, $D(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, параметр $T>0$, $A(t)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $B(t,s)$ — матрица размера $n\times n$ с непрерывными элементами, T-периодическими по первому аргументу, т. е.

$$D(t)\equiv D(t+T),\quad A(t)\equiv A(t+T),\quad B(t,s)\equiv B(t+T,s),$$

при этом

$$\int\limits_{0}^{\infty}\|B(t,s)\|ds<\infty,\quad t\in[0,T],$$

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, https://rscf.ru/project/24-21-00367/.

нелинейное слагаемое $F(t,s,u_1,u_2)$ — непрерывная вектор-функция, липшицева по последним двум переменным, удовлетворяющая следующей оценке:

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,u,w(s))ds \right\| \leqslant q\|u\|^{1+\omega}, \quad t>0, \tag{2}$$

где $q \geqslant 0$, $\omega > 0$, $w(s)$ — произвольная ограниченная и непрерывная функция. Здесь и далее используется спектральная норма матрицы.

Целью работы является получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), нахождение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности, и оценок на множество притяжения нулевого решения.

Теория дифференциальных уравнений с запаздыванием начала интенсивно развиваться во второй половине XX века. Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Одной из важных задач является исследование устойчивости решений. Много работ посвящено данному направлению (см., например, [1–11]). Некоторые работы посвящены изучению уравнений с распределённым запаздыванием (см., например, [12–15]). Одним из наиболее распространённых методов исследования устойчивости решений является метод функционалов Ляпунова — Красовского. Данный метод не требует наличия спектральной информации, более того, он позволяет при правильно подобранном функционале получать не только условия устойчивости, но и оценки на решения, а в нелинейном случае — оценки на множество притяжения. Отметим, что с помощью таких функционалов были исследованы уравнения с запаздывающим аргументом в работах [16–24]. В работах [16–19] рассматривались уравнения с сосредоточенным запаздыванием, в [20–24] — с распределённым запаздыванием, в [23] — со смешанным запаздыванием. При этом в работах [18; 19; 22; 23] исследовались нелинейные уравнения. В работе [24] была рассмотрена система (1) в линейном случае, т. е. $F(t,s,u_1,u_2) \equiv 0$. Результаты в этой работе были получены с помощью функционала Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$v(t,y) = \langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),(y(t)+D(t)y(t-\tau))\rangle +$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle ds + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s,\eta)y(s),y(s)\rangle ds d\eta, \tag{3}$$

где матрицы размера $n\times n$ удовлетворяют условиям

$$H(t)=H^*(t)>0, \quad M(t,s)=M^*(t,s)>0, \quad K(t,s)=K^*(t,s)>0.$$

Обозначение $H(t)>0$ означает положительную определённость матрицы. В настоящей работе при получении результатов будет использоваться функционал (3).

Основные результаты

Рассмотрим для системы уравнений (1) начальные данные

$$y(t)=\varphi(t), \quad t<0, \quad y(+0)=\varphi(0), \tag{4}$$

где $\varphi(t) \in C((-\infty, 0]) \cap C^1([-\tau, 0])$ является заданной ограниченной функцией.

Как и в работе [24], введём обозначения:

$$Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - M(0,t) - \int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds,$$

$$Q_{12}(t) = \left(H(t)A(t) + M(0,t) + \int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds\right) D(t), \tag{5}$$

$$Q_{22}(t) = M(\tau, t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t) - D^*(t)\int\limits_0^\infty K(0,s)\,dsD(t),$$

$$Q_{13}(t,s) = H(t)B(t,s), \quad Q_{33}(s) = K(s,s),$$

$$P(t) = Q_{11}(t) - Q_{12}(t)Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t) - \int\limits_0^\infty Q_{13}(t,s)Q_{33}^{-1}(s)Q_{13}^*(t,s)\,ds. \tag{6}$$

Сформулируем предположения, касающиеся матриц $H(t)$, $K(t,s)$, $M(t,s)$.

Предположение 1. *Пусть матрица $H(t) = H^*(t) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми T-периодическими элементами, т. е.*

$$H(t) \equiv H(t+T).$$

Предположение 2. *Пусть матрица $K(t,s) = K^*(t,s) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми элементами по первой переменной и удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\eta \|K(s,\eta)\|\,dsd\eta < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\eta \left\|\frac{\partial}{\partial s}K(s,\eta)\right\|\,dsd\eta < \infty,$$

$$\int\limits_0^\infty \|K(0,s)\|\,ds < \infty, \quad \int\limits_0^\infty \|K(s,s)\|\,ds < \infty,$$

при этом существует такое число $k > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + kK(t,s) \leqslant 0, \quad t > 0,\ s > 0. \tag{7}$$

Предположение 3. *Пусть матрица $M(t,s) = M^*(t,s) > 0$ является матрицей с непрерывно дифференцируемыми элементами по первой переменной и T-периодическими по второй переменной, т. е. $M(t,s) \equiv M(t,s+T)$, при этом существует такое число $m > 0$, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}M(t,s) + mM(t,s) \leqslant 0, \quad t \in (0,\tau),\ s > -\tau. \tag{8}$$

Далее приведём две теоремы: в первой теореме будут представлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения, во второй теореме будет указана оценка на решение начальной задачи и условие на начальные данные, при которых данная оценка будет справедлива. Справедливость первой теоремы вытекает из второй теоремы.

Теорема 1. *Пусть существуют матрицы* $H(t) = H^*(t) > 0$, $M(t,s) = M^*(t,s) > 0$, $K(t,s) = K^*(t,s) > 0$, *такие, что выполнены следующие условия:*

1) *выполнены предположения 1–3*;
2) *матрица* $Q_{22}(t)$ *из* (5) *является положительно определённой при* $t \in [0,T]$;
3) *матрица* $P(t)$ *из* (6) *определена при* $t \in [0,T]$;
4) *справедливо неравенство*

$$\delta = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \gamma(s)ds > 0, \tag{9}$$

где

$$\gamma(t) = \min\{p_H(t), m, k\}, \tag{10}$$

$p_H(t)$ — *минимальное собственное значение матрицы* $P_H(t) = H^{-\frac{1}{2}}(t)P(t)H^{-\frac{1}{2}}(t)$, k, m — *положительные числа, удовлетворяющие оценкам* (7), (8). *Тогда нулевое решение системы* (1) *экспоненциально устойчиво.*

В [21] и [24] отмечалось, что из условий положительной определённости матриц $M(t,s)$ и $Q_{22}(t)$ из (5) при $t \in [0,T]$ следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы функционально-разностных уравнений вида

$$z(t) = D(t)z(t-\tau),$$

где матрица $D(t)$ из системы (1). В [21] было установлено, что экспоненциальная устойчивость нулевого решения данной системы эквивалентна существованию положительно определённого T-периодического решения матричного уравнения

$$L(t-\tau) - D^*(t)L(t)D(t) = C(t), \quad C(t) = C^*(t) > 0.$$

В [24] было показано, что матрица $M(0,t)$ является решением подобного матричного уравнения:

$$M(0,t-\tau) - D^*(t)M(0,t)D(t) = C(t) > 0. \tag{11}$$

Отметим, что в работе [21] было доказано неравенство

$$\|G_i(t)\| \leqslant \beta\alpha^{\frac{i-1}{2}}, \tag{12}$$

где

$$G_0(t) = E, \quad G_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} D(t-j\tau) = D(t)\dots D(t-(i-1)\tau), \tag{13}$$

$$\alpha = \max_{\xi\in[0,T]}\left(1 - \frac{1}{\|M^{\frac{1}{2}}(0,\xi-\tau)C^{-1}(\xi)M^{\frac{1}{2}}(0,\xi-\tau)\|}\right) < 1, \tag{14}$$

$$\beta = \sqrt{\max_{\xi\in[0,T]}\|M(0,\xi)\| \max_{\xi\in[0,T]}\|M^{-1}(0,\xi)\|}, \tag{15}$$

$C(t)$ определяется в формуле (11). Отметим, что из данной оценки можно получить неравенство

$$e^{-\delta\tau} \geqslant e^{-m\tau} > \alpha, \tag{16}$$

где δ, α определены в (9) и (14) соответственно.

Введём обозначения:

$$c = \max_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \max_{\xi\in[0,T]} \left(\frac{\xi}{T} \int_0^T \frac{\gamma(s)}{2}\, ds - \int_0^\xi \frac{\gamma(s)}{2}\, ds. \right) \right\}, \tag{17}$$

$$z_1(t) = Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)) + y(t-\tau), \tag{18}$$

$$r_1 = \left(2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \|Q_{22}^{-1}(\xi)\|\|H(\xi)\|\|D(\xi)\|^{1+\omega} \right)^{-\frac{1}{\omega}}, \tag{19}$$

$$r_2 = 2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \|H(\xi)\|\|H^{-1}(\xi)\|, \tag{20}$$

$$r_3 = 2^{1+\omega} \max_{\xi\in[0,T]} \left(\|H(\xi)\|\|H^{-1}(\xi)\|\|D(\xi)\|^{1+\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(\xi)Q_{12}^*(\xi)\| + \frac{1}{4} \right) \right). \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для решения начальной задачи* (1), (4) *с начальными данными из множества*

$$\mathbf{E} = \{\varphi \in C((-\infty,0]) \cap C^1([-\tau,0]) : \quad \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| < q^{-\frac{1}{\omega}} r_1,$$

$$qr_2 v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi) + qr_3 \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|^\omega < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{\beta c v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| < q^{-\frac{1}{\omega}} r_1,$$

$$\frac{qr_2 c^\omega v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi)}{\max\limits_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{\omega}{2}}} + qr_3 \left(\frac{\beta c v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^\omega < \frac{\delta}{2} \Big\},$$

где r_1, r_2, r_3 из (19)–(21), *δ из* (9), *α, β из* (14), (15), *c из* (17), *справедлива оценка при $t > 0$*

$$\|y(t)\| \leqslant \frac{\beta c e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(1-\sqrt{\alpha}e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta\alpha^{\frac{t-\tau}{2\tau}} \left\| \varphi\left(t-\tau-\left\lfloor\frac{t}{\tau}\right\rfloor\tau\right) \right\|, \tag{22}$$

где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть числа s,

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau)), (\varphi(0) + D(0)\varphi(-\tau))\rangle +$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \langle M(-s,s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds + \int_0^\infty \int_{-\eta}^0 \langle K(-s,\eta)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds d\eta.$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — непродолжаемое решение начальной задачи (1), (4), начальные данные которой из множества $\mathbf{E}$. Будем предполагать, что данное решение определено при $t \in (-\infty, t_0)$, где $t_0 > 0$. Продифференцируем функционал Ляпунова — Красовского (3) вдоль решения $y(t)$:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) = -\langle Q_{11}(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), y(t) + D(t)y(t-\tau)\rangle -$$

$$-\langle Q_{12}(t)y(t-\tau),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle-\langle y(t)+D(t)y(t-\tau),Q_{12}(t)y(t-\tau)\rangle-$$

$$-\langle Q_{22}(t)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle y(t)+D(t)y(t-\tau),Q_{13}(t,t-s)y(s)\rangle ds-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle Q_{13}(t,t-s)y(s),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle ds-\int\limits_{-\infty}^{t}\langle Q_{33}(t-s)y(s),y(s)\rangle ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}M(t-s,s)y(s),y(s)\right\rangle ds+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle,$$

где $Q_{11}(t)$, $Q_{12}(t)$, $Q_{22}(t)$, $Q_{13}(t,s)$, $Q_{33}(s)$ определены в (5). Учитывая обозначение (6), получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=-\langle P(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),y(t)+D(t)y(t-\tau)\rangle-$$

$$-\langle Q_{22}(t)z_1(t),z_1(t)\rangle-\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle Q_{33}(t-s)z_2(t,s),z_2(t,s)\rangle\,ds+$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle\frac{d}{dt}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\rangle dsd\eta+\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle\frac{d}{dt}M(t-s,s)y(s),y(s)\rangle ds+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle,\qquad(23)$$

где $z_1(t)$ определено в (18),

$$z_2(t,s)=Q_{33}^{-1}(t-s)Q_{13}^{*}(t,t-s)(y(t)+D(t)y(t-\tau))+y(s).$$

Оценим последнее выражение, используя (2):

$$I=2\mathrm{Re}\left\langle H(t)(y(t)+D(t)y(t-\tau)),\int\limits_{-\infty}^{t}F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle\leqslant$$

$$\leqslant 2q\|H(t)\|\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|\|y(t)\|^{1+\omega}.$$

Следовательно,

$$I\leqslant 2q\|H(t)\|\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|\left(\|y(t)+D(t)y(t-\tau)\|+\|D(t)\|\|y(t-\tau)\|\right)^{1+\omega}.$$

Используя неравенство

$$(a+b)^{1+\omega}\leqslant 2^{\omega}a^{1+\omega}+2^{\omega}b^{1+\omega},\quad a,b\geqslant 0,\quad \omega>0,$$

получим

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \left(\|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^{1+\omega} + \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{1+\omega} \right) \times$$

$$\times \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|.$$

Из определения $z_1(t)$ в (18) имеем

$$\|y(t-\tau)\| \leqslant \|z_1(t)\| + \|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|.$$

Следовательно,

$$\|y(t-\tau)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\|^2.$$

Тогда справедливо неравенство

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^{2+\omega} + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|y(t) + D(t)y(t-\tau)\|^2 + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

В силу определения $v(t,y)$ из (3) получаем

$$I \leqslant 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

Учитывая данную оценку и положительную определённость матрицы $Q_{33}(s)$, из (23) получим

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leqslant -\langle P(t)(y(t) + D(t)y(t-\tau)), y(t) + D(t)y(t-\tau) \rangle - \langle Q_{22}(t)z_1(t), z_1(t) \rangle +$$

$$+ \int_0^{\infty} \int_{t-\eta}^{t} \langle \frac{d}{dt} K(t-s,\eta)y(s), y(s) \rangle ds d\eta + \int_{t-\tau}^{t} \langle \frac{d}{dt} M(t-s,s)y(s), y(s) \rangle ds +$$

$$+ 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) + \|z_1(t)\|^2 \right).$$

В силу обозначений (3) и (10) имеем

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y) - \|z_1(t)\|^2 \left(\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \right) +$$

$$+ 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{1+\frac{\omega}{2}}(t,y) + 2^{1+\omega} q\|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \times$$

$$\times \left(\left(\|Q_{22}^{-1}(t)Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4} \right) \|H^{-1}(t)\| v(t,y) \right). \qquad (24)$$

Так как начальные данные из множества $\mathbf{E}$, то в силу двух первых неравенств в определении множества $\mathbf{E}$ существует $t' \in (0, t_0)$, такое, что при $t \in (0, t')$

$$\|Q_{22}^{-1}(t)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} > 0, \tag{25}$$

$$2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| v^{\frac{\omega}{2}}(t, y) +$$

$$+2^{1+\omega} q \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\| \|D(t)\|^{1+\omega} \|y(t-\tau)\|^{\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(t) Q_{12}^{*}(t)\| + \frac{1}{4} \right) < \frac{\delta}{2}. \tag{26}$$

В силу данных неравенств из (24) вытекает следующая оценка:

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leqslant -(\gamma(t) - \frac{\delta}{2}) v(t, y).$$

Следовательно, используя неравенство Гронуолла, получим

$$v(t, y) \leqslant e^{\frac{\delta t}{2} - \int\limits_0^t \gamma(s) ds} v(0, \varphi).$$

Учитывая обозначение (17), имеем

$$v(t, y) \leqslant \frac{c^2}{\max\limits_{\xi \in [0, T]} \|H^{-1}(\xi)\|} e^{-\frac{\delta t}{2}} v(0, \varphi). \tag{27}$$

В силу (3) получим

$$\|y(t) + D(t) y(t-\tau)\| \leqslant c e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi), \quad t > 0. \tag{28}$$

Пусть $t \in ((i-1)\tau, i\tau]$, $i \in \mathbb{N}$, тогда, используя неравенство треугольника, получим

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(t) + D(t) y(t-\tau)\| + \|D(t) y(t-\tau)\|.$$

Повторяя данный приём несколько раз, имеем

$$\|y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \|G_j(t)\| \|y(t - j\tau) + D(t - j\tau) y(t - (j+1)\tau)\| + \|G_i(t)\| \|\varphi(t - i\tau)\|,$$

где $G_i(t)$ определён в (13). Воспользуемся неравенствами (12) и (28):

$$\|y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{i-1} \beta \alpha^{\frac{j-1}{2}} c e^{-\frac{\delta(t - j\tau)}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi) + \beta \alpha^{\frac{i-1}{2}} \|\varphi(t - i\tau)\| =$$

$$= \beta c \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta t}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0, \varphi) \sum_{j=0}^{i-1} \left(\sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta \tau}{4}} \right)^j + \beta \alpha^{\frac{i-1}{2}} \|\varphi(t - i\tau)\|.$$

В силу (16) и формулы суммы убывающей геометрической прогрессии получим справедливость оценки (22) при $t \in (0, t')$. Покажем от противного, что оценка (22) выполняется при всех $t \in (0, t_0)$. Пусть $t^* > t'$ является первым значением, при котором нарушается неравенство (25) или (26).

Рассмотрим случай нарушения неравенства (25) в точке t^*. Предположим, что неравенство (25) выполнено при всех $t \in (0, t^*)$, при этом

$$\|Q_{22}^{-1}(t^*)\|^{-1} - 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \|y(t^* - \tau)\|^{\omega} \leqslant 0. \tag{29}$$

Тогда, повторив рассуждения после (25), в силу непрерывности получим, что оценка (22) справедлива при $t \in (0, t^*]$. Использовав оценки (29) и (22), имеем

$$\|Q_{22}^{-1}(t^*)\|^{-1} \leqslant 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \left(\frac{\beta c e^{-\frac{\delta t^*}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta \alpha^{\frac{t^*-\tau}{2\tau}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^{\omega}.$$

Получаем противоречие с третьим неравенством множества **E**.

Рассмотрим случай нарушения неравенства (26) в точке t^*. Предположим, что неравенство (26) выполнено при всех $t \in (0, t^*)$, при этом

$$2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|H^{-1}(t^*)\| v^{\frac{\omega}{2}}(t^*, y) +$$

$$+ 2^{1+\omega} q \|H(t^*)\| \|H^{-1}(t^*)\| \|D(t^*)\|^{1+\omega} \|y(t^*-\tau)\|^{\omega} \left(\|Q_{22}^{-1}(t^*) Q_{12}^*(t^*)\| + \frac{1}{4} \right) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, в силу обозначений (20), (21) имеем

$$q r_2 v^{\frac{\omega}{2}}(t^*, y) + q r_3 \|y(t^*-\tau)\|^{\omega} \geqslant \frac{\delta}{2}. \tag{30}$$

Повторив рассуждения после (25), в силу непрерывности получим, что оценки (22) и (27) справедливы при $t \in (0, t^*]$. Использовав оценки (30), (22) и (27), имеем

$$\frac{q r_2 c^{\omega} e^{-\frac{\omega\delta t^*}{4}} v^{\frac{\omega}{2}}(0,\varphi)}{\max\limits_{\xi\in[0,T]} \|H^{-1}(\xi)\|^{\frac{1}{2}}} + q r_3 \left(\frac{\beta c e^{-\frac{\delta t^*}{4}} v^{\frac{1}{2}}(0,\varphi)}{\alpha^{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}\right)} + \beta \alpha^{\frac{t^*-\tau}{2\tau}} \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\| \right)^{\omega} \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Противоречие с четвёртым неравенством множества **E**. Тем самым было установлено, что оценка (22) справедлива на всей положительной области определения непродолжаемого решения $y(t)$ начальной задачи (1), (4), т. е. при $t \in (0, t_0)$.

Покажем, что решение $y(t)$ определено при всех $t > 0$. Тогда оценка (22) справедлива при $t > 0$. В силу справедливости неравенства (22) при $t \in (0, t_0)$ по непрерывности можно определить значение $y(t)$ в точке t_0. Можно рассмотреть начальную задачу вида (1), (4):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(z(t) + D(t)z(t-\tau)) = A(t)z(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} B(t, t-s)z(s)ds + \\ + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} F(t, s, z(t), z(s))\, ds, \quad t > t_0, \\ z(s) = y(s),\ s \in (-\infty, t_0], \\ z(t_0 + 0) = y(t_0). \end{cases}$$

Данная начальная задача однозначно разрешима на интервале $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, следовательно, решение начальной задачи (1), (4) можно продолжить. Противоречие. Значит, решение начальной задачи (1), (4) определено при всех $t > 0$. Тогда оценка (22) справедлива при всех $t > 0$.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Отметим, что множество **E** является множеством притяжения нулевого решения системы (1).

Замечание 2. Выражение $1 - \sqrt{\alpha} e^{\frac{\delta\tau}{4}}$, которое присутствует в знаменателе в определении множества **E** и оценке (22), положительно в силу неравенства (16).

Заключение

Исследована экспоненциальная устойчивость нулевого решения класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части. Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения данной системы в терминах матричных и интегральных неравенств, установлены оценки норм решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности, установлена оценка на множество притяжения нулевого решения. Все параметры в оценках указаны в явном виде.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г. В. Демиденко, д. ф.-м. н. И. И. Матвеевой и к. ф.-м. н. М. А. Скворцовой за внимание к данной работе и ценные советы.

Список литературы

1. **Мышкис А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.; Л. : 1951.
2. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959.
3. **Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.
5. **Кореневский Д. Г.** Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев : Наукова думка, 1989.
6. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1991.
7. **Долгий Ю. Ф.** Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1996.
8. **Kolmanovskiĭ V. B., Myshkis A. D.** Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. **Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.** Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering. Boston : Birkhauser, 2003.
10. **Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. New York : Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M. I.** Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris : Atlantis Press, 2014.
12. **Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.** Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 55–63.
13. **Чудинов К. М.** Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 52–61.
14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, no. 302. P. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. Vol. 34. P. 747–773.
16. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

17. **Demidenko G. V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. Vol. 7, no. 3. P. 119–130.
18. **Матвеева И. И.** Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
19. **Yskak T. [Iskakov T. K.]** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25, no. 1–2. P. 97–108.
20. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.** Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
21. **Ыскак Т. [Искаков Т. К.]** Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределённым запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.
22. **Матвеева И. И.** Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1689–1697.
23. **Ыскак Т. [Искаков Т. К.]** Устойчивость решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием // Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 442–452.
24. **Искаков Т. К.** Устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с бесконечным распределённым запаздыванием // Челяб. физ.-мат. журн. 2024. Т. 9, № 4. С. 573–584.

Поступила в редакцию 01.07.2025.
После переработки 16.09.2025.

Сведения об авторе

Искаков Тимур Кайратович, старший научный сотрудник, доцент, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: istima92@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 664–676.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-664-676

ESTIMATES OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE WITH INFINITE DISTRIBUTED DELAY

T.K. Iskakov

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
istima92@mail.ru

A class of systems of nonlinear differential equations of neutral type with infinite distributed delay and periodic coefficients in the linear part is considered. Using the Lyapunov–Krasovskii functional, sufficient conditions for exponential stability of the zero solution are obtained, estimates of solutions characterizing exponential decrease at infinity are established, estimates of the attraction set of the zero solution are established.

Keywords: *differential equations with distributed delay, neutral type equation, periodic coefficients, stability, Lyapunov–Krasovskii functional.*

References

1. **Myshkis A.D.** *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow, *Leningrad, Gostekhizdat Publ.*, 1951. (In Russ.).
2. **Krasovskii N.N.** *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford, Stanford University Press, 1963.
3. **El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments.* New York, Academic Press, 1973.
4. **Hale J.** *Theory of Functional Differential Equations.* New York, Springer, 1977.
5. **Korenevskiĭ D.G.** *Ustoychivost' dinamicheskikh sistem pri sluchaynykh vozmushcheniyakh parametrov. Algebraicheskiye kriterii* [Stability of dynamical systems under random perturbations of parameters. Algebraic criteria]. Kiev, *Naukova Dumka*, 1989. (In Russ.).
6. **Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.** *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations.* Atlanta, World Federation Publ., 1995.
7. **Dolgiĭ Yu.F.** *Ustoychivost' periodicheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Stability of periodic differential-difference equations] Yekaterinburg, Ural State University, 1996. (In Russ.).
8. **Kolmanovskiĭ V.B., Myshkis A.D.** *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations.* Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999.
9. **Gu K., Kharitonov V.L., Chen J.** *Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering.* Boston, Birkhauser, 2003.
10. **Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Epplications.* New York, Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M.I.** *Stability of Neutral Functional Differential Equations.* Paris, Atlantis Press, 2014.

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00367), https://rscf.ru/project/24-21-00367/.

12. **Sabatulina T.L., Malygina V.V.** Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 52–60.
13. **Chudinov K.M.** Functional differential inequalities and estimation of the Cauchy function of an equation with aftereffect. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 44–51.
14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, no. 302, pp. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2022, vol. 34, pp. 747–773.
16. **Demidenko G.V., Matveeva I.I.** Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 824–836.
17. **Demidenko G.V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 119–130.
18. **Matveeva I.I.** Estimates for solutions to one class of nonlinear delay differential equations. *Journal of Applied Industrial Mathematics*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 557–566.
19. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Functional Differential Equations*, 2018, vol. 25, no. 1–2, pp. 97–108.
20. **Demidenko G.V., Matveeva I.I., Skvortsova M.A.** Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 828–841.
21. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Estimates for solutions of one class of systems of equations of neutral type with distributed delay. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 416–427. (In Russ.).
22. **Matveeva I.I.** Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 1689–1697.
23. **Yskak T. [Iskakov T.K.]** Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with infinite distributed delay. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, no. 4, pp. 442–452.
24. **Iskakov T.K.** Stability of solutions to systems of linear differential equations of neutral type with infinite distributed delay. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2024, vol. 9, no. 4, pp. 573–584.

Article received 01.07.2025.
Corrections received 16.09.2025.