Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 649–663.

УДК 517.955 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-649-663

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО РАВНОМЕРНО СТРОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Г. В. Демиденко[1,2,a], **В. С. Нурмахматов**[2,b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[a] *demidenk@math.nsc.ru,* [b] *v.s.nurmuhammad@gmail.com*

Рассматривается класс строго псевдогиперболических операторов четвёртого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входят, в частности, операторы Власова, Гальперна, Рэлея — Бишопа. При некоторых условиях на коэффициенты установлены энергетические оценки.

Ключевые слова: *уравнение, не разрешённое относительно старшей производной, псевдогиперболический оператор, энергетическая оценка, весовое соболевское пространство.*

1. Введение

В работе рассматривается класс псевдогиперболических уравнений [1] четвёртого порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u \equiv (aI + L_0(D_x))\, D_t^2 u + L_1(x; D_x)D_t u + L_2(x; D_x)u = f(t, x), \qquad (1.1)$$

где

$$L_1(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x) D_x^\alpha, \quad L_2(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x) D_x^\alpha, \qquad (1.2)$$

и $L_0(D_x) = \sum\limits_{|\alpha|=2} a_\alpha^0 D_x^\alpha$ — эллиптический оператор. Это уравнение является не разрешённым относительно старшей производной. Впервые систематическое изучение уравнений такого типа проводилось в работах С. Л. Соболева [2]. Поэтому в литературе уравнения вида (1.1) часто называются уравнениями соболевского типа [3; 4].

Класс уравнений (1.1) содержит, в частности, уравнение Гальперна [5], уравнение Власова [6; 7], описывающее крутильные колебания упругого стержня, уравнение Рэлея — Бишопа, возникающего в теории волноводов [8; 9], а также их многомерные аналоги.

Наша цель — получение энергетических оценок для класса строго псевдогиперболических операторов $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$ из (1.1). Работа является продолжением исследований [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370/.

2. Основные результаты

Напомним определение псевдогиперболических операторов с постоянными коэффициентами [1, гл. 2]

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_k^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k. \tag{2.1}$$

Определение 1. Дифференциальный оператор (2.1) называется *псевдогиперболическим*, если его символ $\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$ однороден относительно некоторого вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in N$, т. е. $\mathcal{L}(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi) = c\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$, $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, при этом уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi)(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\},$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi), \ldots, \eta_l(\xi)$. Если корни различные, то оператор называется *строго псевдогиперболическим.*

Для рассматриваемого класса операторов из (1.1)

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = (aI + L_0(D_x))\, D_t^2 + L_1(x; D_x)D_t + L_2(x; D_x) \tag{2.2}$$

мы будем предполагать, что выполнена оценка

$$a_1|\xi|^2 \geqslant L_0(i\xi) \geqslant a_0|\xi|^2, \quad \xi \in R^n, \quad a > 0, \tag{2.3}$$

где $a_1 \geqslant a_0 > 0$ — постоянные, и для любого $x^0 \in R^n$ оператор

$$L_0(D_x)D_t^2 + L_1(x^0; D_x)D_t + L_2(x^0; D_x)$$

является строго псевдогиперболическим, т. е. уравнение

$$L_0(i\xi)(i\eta)^2 + L_1(x^0, i\xi)(i\eta) + L_2(x^0, i\xi) = 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\}, \tag{2.4}$$

имеет только вещественные и различные корни $\eta_1(x^0, \xi), \eta_2(x^0, \xi)$. Это эквивалентно тому, что выполнено неравенство

$$d(x^0, \xi) = \Big(\sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x^0)(\xi)^\alpha \Big)^2 - 4 \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0(\xi)^\alpha \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x^0)(\xi)^\alpha > 0, \quad \xi \in R^n \backslash \{0\}. \tag{2.5}$$

Определение 2. Оператор вида (2.2) называется *равномерно строго псевдогиперболическим*, если: а) при любом $x^0 \in R^n$ выполняется (2.5), и б) найдётся константа $\delta > 0$, такая, что при любом $x^0 \in R^n$ имеет место неравенство

$$|\eta_1(x^0, \xi) - \eta_2(x^0, \xi)| \geqslant \delta|\xi|, \quad \xi \in R^n. \tag{2.6}$$

В работе [10] был рассмотрен оператор вида (2.2), коэффициенты которого достаточно мало отличались от постоянных, при этом их производные до третьего порядка включительно достаточно малы. В этом случае были установлены энергетические оценки. В данной работе мы освободимся от требования малости и докажем аналогичные оценки.

Будем предполагать, что коэффициенты $a_\alpha^k(x) \in C^4(R^n)$, $k = 1, 2$, в дифференциальных операторах (1.2) постоянные вне некоторого шара $G = \{|x| \leqslant r\}$, и существует константа $a_2 > 0$, такая, что имеет место неравенство

$$\sum_{|\beta|=4} a_\beta^2(x)\xi^\beta \geqslant a_2|\xi|^4, \quad \xi \in R^n. \tag{2.7}$$

По определению (2.5) многочлен $d(x^0, \xi)$ при любых x^0 является однородным по ξ шестой степени, поэтому существует константа $p > 0$, такая, что в силу (2.3), (2.5), (2.6) независимо от x^0 справедлива оцека

$$p|\xi|^6 \geqslant d(x^0, \xi) \geqslant 4a_0^2\delta^2|\xi|^6, \quad \xi \in R^n. \tag{2.8}$$

В качестве примера равномерно строго псевдогиперболического уравнения с младшими членами можно рассмотреть многомерные аналоги уравнения Власова [6; 7] и уравнения Релея — Бишопа [8; 9; 11]

$$(aI - a_1\Delta)D_t^2u + a_2\Delta^2u + \sum_{|\beta|\leqslant 3} a_\beta(x)D_x^\beta u = f(t, x),$$

где Δ — оператор Лапласа по $x \in R^n$, a, a_1, $a_2 > 0$.

В дальнейшем символом $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, т. е. $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, если $u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t}u(t, x) \in W_2^{2,4}(R^{n+1})$. По определению положим

$$\|u(t, x),\, W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})\| = \|u_\gamma(t, x),\, W_2^{2,4}(R^{n+1})\|.$$

Символом $\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $u_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1})$.

Отметим, что из [1; 12] вытекает энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора вида (2.2) с постоянными коэффициентами. А именно, справедлива теорема.

Теорема 1. *Для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, такой, что*

$$D_t^2D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \qquad |\beta| = 2, \tag{2.9}$$

имеет место оценка

$$\gamma\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leqslant c\|\mathcal{L}(D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \tag{2.10}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$.

В работе [10] аналогичный результат был доказан для операторов вида (2.2) с переменными коэффициентами, достаточно мало отличающимися от постоянных. В настоящей работе мы снимаем требоваие малости. Будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Существует $\gamma_0 > 0$, такое, что для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, для которой выполнено (2.9), имеет место оценка*

$$\begin{gathered}\gamma\|(|\xi|^2 + a)\,(|\eta| + \gamma + |\xi|)\,\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1})\| \leqslant \\ \leqslant c\|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(R^{n+1})\|\end{gathered} \tag{2.11}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t,x)$.

Оценки (2.10), (2.11) являются аналогами энергетических неравенств для строго гиперболических операторов [13; 14].

Отметим, что энергетические оценки вида (2.11) можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами. В частности, из теоремы 2 вытекает теорема о единственности решения задачи Коши.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда задача Коши для равномерно строго псевдогиперболического уравнения* (1.1)

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{cases}$$

не может иметь более одного решения $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, удовлетворяющего (2.9).

3. Энергетические оценки

Напомним, что для строго псевдогиперболического оператора (2.1) с постоянными коэффициентами в [1, гл. 2; 12] были получены энергетические оценки и доказана однозначная разрешимость задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений. При этом для получения энергетических оценок была использована известная схема Лере, предложенная при изучении задачи Коши для строго гиперболических уравнений [14]. Затем такой подход был развит в работе [10] при получении энергетических оценок для операторов вида (2.2) с переменными коэффициентами, достаточно мало отличающимися от постоянных. Сейчас мы будем применять этот подход для равномерно строго псевдогиперболического оператора с достаточно гладкими коэффициентами без требования малости.

Будем записывать коэффициенты операторов (1.2) в виде

$$a^k_\alpha(x) = a^k_\alpha + a^{k,0}_\alpha(x), \ k = 1, 2,$$

где $a^k_\alpha = \text{const}$, $a^{k,0}_\alpha(x) \in C^4_0(R^n)$, при этом $a^{k,0}_\alpha(x) \equiv 0$, $|x| > r$.

Как и в работе [10], рассмотрим форму

$$\mathcal{M}u = -\mathrm{Im} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-\gamma t}\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t,x)\overline{e^{-\gamma t}\mathcal{L}'(D_t, D_x)u(t,x)}d\bar{x}, \tag{3.1}$$

где $\bar{x} = (t,x)$,

$$\mathcal{L}'(D_t, D_x)u(t,x) = 2i\left(aI + \sum_{|\alpha|=2} a^0_\alpha D^\alpha_x\right) D_t u(t,x) + i\sum_{|\alpha|=3} a^1_\alpha D^\alpha_x u(t,x).$$

Проводя оценки этой формы, мы установим энергетическое неравенство (2.11). В силу плотности $C^\infty_0(R^{n+1})$ в $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1})$ будем рассматривать (3.1) для $u(t,x) \in C^\infty_0(R^{n+1})$.

Напомним, что коэффициенты $a^m_\alpha(x)$, $m = 1, 2$, постоянные вне некоторого шара $G = \{|x| \leqslant r\}$. Зафиксируем некоторое малое число $\sigma > 0$. Степень его малости

мы укажем ниже. Выберем конечное число точек $x^1, x^2, \dots, x^N$ из шара G таким образом, чтобы совокупность окрестностей $B(\sigma, x^k) = \{x \in R^n : |x - x^k| < \sigma\}$ покрывала шар G, т. е. $G \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} B(\sigma, x^k)$, при этом будем считать, что

$$x^{j-1} \in B(\sigma, x^j),\ j = 1, 2, \dots, N,\ |x^0| > r.$$

По теореме о разбиении единицы можно построить систему функций $\varphi_k(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B(\sigma, x^k)$, $0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant 1$, $k = 1, \dots, N$, такую, что

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x) = 1,\ x \in G. \tag{3.2}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi_0(x) = 1 - \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x),\ x \in R^n. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) = 1,\ x \in R^n. \tag{3.4}$$

Используя (3.2)–(3.4), можно представить все коэффициенты в виде

$$a_\alpha^m(x) = \sum_{k=0}^{N} [\varphi_k(x)\big(a_\alpha^m(x) - a_\alpha^m(x^k)\big) + \varphi_k(x) a_\alpha^m(x^k)],\ x \in R^n,$$

$m = 1, 2$, и коэффициенты постоянные при $|x^0| > r$. Тогда

$$\mathcal{M}u = \sum_{k=0}^{N} -\operatorname{Im} \int\limits_{R^{n+1}} [(aI + L_0(D_x))(D_t + \gamma)^2(\varphi_k(x) u_\gamma(t, x)) +$$

$$+ \varphi_k(x)\big(L_1(x^k; D_x)(D_t + \gamma) + L_2(x^k; D_x)\big) u_\gamma(t, x) +$$

$$+ \big(L_1(x, x^k; D_x)(D_t + \gamma) + L_2(x, x^k; D_x)\big) u_\gamma(t, x)] \overline{\mathcal{L}'(D_t + \gamma, D_x) u_\gamma(t, x)} dx dt,$$

где

$$L_m(x, x^k; D_x) = \sum_{|\alpha| = 2+m} \varphi_k(x)\big(a_\alpha^m(x) - a_\alpha^m(x^k)\big) D_x^\alpha,\quad m = 1, 2.$$

Определим дифференциальные операторы $\tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x)$, $m = 1, 2$, такие, что

$$L_m(x^k; D_x)\big(\varphi_k(x) u_\gamma(t, x)\big) =$$

$$= \varphi_k(x) L_m(x^k; D_x)\big(u_\gamma(t, x)\big) + \tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x) u_\gamma(t, x),\ m = 1, 2,$$

т. е. операторы $\tilde{L}_m(x^k, \varphi_k(x); D_x)$ имеют меньшие порядки, чем операторы $L_m(x^k; D_x)$, $m = 1, 2$.

Тогда форму $\mathcal{M}u$ можно записать в виде $\mathcal{M}u = \mathcal{M}_1 u + \mathcal{M}_2 u + \mathcal{M}_3 u$, где

$$\mathcal{M}_1 u = \sum_{k=0}^{N} \Big[- \operatorname{Im} \int\limits_{R^{n+1}} [(aI + L_0(D_x))\,(D_t + \gamma)^2 + L_1(x^k; D_x)(D_t + \gamma) +$$

$$+L_2(x^k;D_x)](\varphi_k(x)u_\gamma(t,x))\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt\Big],$$

$$\mathcal{M}_2u=\sum_{k=0}^{N}\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}[\tilde L_1(x^k,\varphi_k(x);D_x)(D_t+\gamma)+\tilde L_2(x^k,\varphi_k(x);D_x)]u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$\mathcal{M}_3u=\sum_{k=0}^{N}-\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]u_\gamma(t,x)\overline{\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)u_\gamma}dxdt.$$

Тогда для $\mathcal{M}_1u$ справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *При любой фиксированной точке x^k, $k=0,1,\dots,N$, форма $\mathcal{M}_1u$ оценивается снизу*

$$\mathcal{M}_1u\geqslant\gamma\rho(\delta)\int\limits_{R^{n+1}}(a+|\xi|^2)^2(\eta+\gamma+|\xi|)^2|\hat u_\gamma|^2d\eta d\xi,\tag{3.5}$$

где $\rho(\delta)>0$ — константа, не зависящая от выбора точки x^k и γ.

Доказательство. Применяя теорему Планшереля, имеем

$$\mathcal{M}_1u=\sum_{k=0}^{N}-\operatorname{Im}\int\limits_{R^{n+1}}\left((aI+L_0(i\xi))\,(i\eta+\gamma)^2+L_1(x^k,i\xi)(i\eta+\gamma)+\right.$$

$$\left.+L_2(x^k,i\xi)\right)F[\varphi_ku_\gamma](\eta,\xi)\times\overline{\mathcal{L}'(i\eta+\gamma,i\xi)\hat u_\gamma(\eta,\xi)}d\eta d\xi.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}_1u=\sum_{k=0}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}\gamma P(x^k,\eta,\xi,\gamma)F[\varphi_ku_\gamma](\eta,\xi)\overline{\hat u_\gamma(\eta,\xi)}d\eta d\xi,\tag{3.6}$$

где

$$P(x^k,\eta,\xi,\gamma)=2\Big[(\eta^2+\gamma^2)(a-L_0(\xi))^2-$$

$$-(a-L_0(\xi))L_1(\xi)\eta+(a-L_0(\xi))L_2(x^k,\xi)+\frac{1}{2}L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)\Big]=$$

$$=2(-a+L_0(\xi))^2\left[\eta^2+\gamma^2+\frac{L_1(\xi)\eta}{-a+L_0(\xi)}-\frac{L_2(x^k,\xi)}{-a+L_0(\xi)}+\frac{L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)}{2(-a+L_0(\xi))^2}\right].$$

Обозначим

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\eta^2+\gamma^2+\frac{L_1(\xi)\eta}{-a+L_0(\xi)}-\frac{L_2(x^k,\xi)}{-a+L_0(\xi)}+\frac{L_1(\xi)L_1(x^k,\xi)}{2(-a+L_0(\xi))^2}.$$

Тогда $P(x^k,\eta,\xi,\gamma)=2(-a+L_0(\xi))^2Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$. Представим $Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ в виде

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+$$

$$+\frac{d(x^k,\xi)+4aL_2(x^k,\xi)-\big(L_1(x^k,\xi)-L_1(\xi)\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2,$$

где $d(x^k,\xi)=\big(L_1(x^k,\xi)\big)^2-4L_0(\xi)L_2(x^k,\xi)$.

Перепишем теперь $Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+\\ +\frac{L_0^2(\xi)|\eta_1(x^k,\xi)-\eta_2(x^k,\xi)|^2+4aL_2(x^k,\xi)}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2-\\ -\frac{\big(\sum\limits_{|\alpha|=3}\sum\limits_{j=1}^{k}\big(a_\alpha^1(x^j)-a_\alpha^1(x^{j-1})\big)\xi^\alpha\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2},\end{gathered}\tag{3.7}$$

где $\eta_1(x^k,\xi)$, $\eta_2(x^k,\xi)$ — корни уравнения (2.4), $|x^0|>r$.

Обозначим группу из первых трёх слагаемых в (3.7)

$$\begin{gathered}Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\left(\eta+\frac{L_1(\xi)}{2(-a+L_0(\xi))}\right)^2+\\ +\frac{L_0^2(\xi)|\eta_1(x^k,\xi)-\eta_2(x^k,\xi)|^2+4aL_2(x^k,\xi)}{4(a-L_0(\xi))^2}+\gamma^2.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Покажем, что $Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)$ оценивается снизу независимо от выбора точки x^k.

Учитывая определения операторов (1.2), функцию (3.8) можно записать в виде

$$Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=\frac{1}{\sqrt{c}}Q_1(x^k,\eta',\xi',\gamma',a'),\ c>0,$$

где $\alpha'=c^{\frac12}a$, $\eta'=c^{\frac14}\eta$, $\xi'=c^{\frac14}\xi$, $\gamma'=c^{\frac14}\gamma$.

Введём обозначение (η',ξ',γ'), $c=(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2)^{-2}$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $Q_1(\eta',\xi',\gamma',\alpha')$ на компакте $(\eta')^2+(\gamma')^2+(\xi')^2=1$, $\alpha'\in[0,\alpha_0']$, и неравенств (2.6)–(2.8) получим

$$\frac{\rho_1(\delta)}{2}\leqslant Q_1(x^k,\eta',\xi',\gamma',\alpha')\leqslant 2\rho_2,$$

где $\rho_1(\delta)$, $\rho_2>0$ — константы, зависящие от коэффициентов операторов и δ. Из этой оценки вытекает, что существует $\gamma_1>0$, такое, что при всех $(\eta,\xi)\in R^{n+1}$, $\gamma>\gamma_1$, будет выполняться неравенство

$$\frac{\rho_1(\delta)}{2}(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2)\leqslant Q_1(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)\leqslant 2\rho_2(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).\tag{3.9}$$

Проведём теперь оценку последнего слагаемого в (3.7)

$$Q_2(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)=-\frac{\big(\sum\limits_{|\alpha|=3}\sum\limits_{j=1}^{k}\big(a_\alpha^1(x^j)-a_\alpha^1(x^{j-1})\big)\xi^\alpha\big)^2}{4(a-L_0(\xi))^2}.$$

Учитывая гладкость коэффициентов и условие (2.3), будем теперь предполагать, что число $\sigma>0$ нами выбирается таким образом, чтобы

$$\sum_{|\alpha|=3}\big|a_\alpha^1(x)-a_\alpha^1(y)\big|<\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN},\ q\geqslant 1,\tag{3.10}$$

при $|x-y|<\sigma$. Дополнительное условие на $q\geqslant 1$ будет указано ниже.

Напомним, что $x^{j-1}\in B(\sigma,x^j)$, $j=1,2,\dots,N$. Тогда в силу сказанного выше имеем

$$|Q_2(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)|\leqslant\frac{\rho_1(\delta)}{4}|\xi|^2.$$

Отсюда и из (3.7), (3.9) получим

$$Q(x^k,\eta,\xi,\gamma,a)\geqslant\frac{\rho_1(\delta)}{4}(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).$$

Следовательно, в силу определения $P(x^k,\eta,\xi,\gamma)$ имеем

$$P(x^k,\eta,\xi,\gamma)\geqslant\frac{\rho_1(\delta)}{2}(a+a_0|\xi|^2)^2(\eta^2+\gamma^2+|\xi|^2).$$

Поэтому в силу разбиения единицы (3.4) и равенства Парсеваля из (3.6) вытекает оценка (3.5). Лемма доказана. □

Используя неравенство Гёльдера, очевидно $\mathcal{M}_2u$ можно оценить сверху

$$|\mathcal{M}_2u|\leqslant c_1\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2, \tag{3.11}$$

где $c_1>0$ — константа, не зависящая от γ и $u(t,x)$.

Оценим теперь $\mathcal{M}_3u$. Выпишем сопряжённые операторы

$$\big(\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x)\big)^*v(t,x)=2i(D_t-\gamma)(aI+L_0(D_x))v(t,x)+iL_1(D_x)v(t,x),$$

$$(L_1(x,x^k;D_x))^*v(t,x)=-\sum_{|\alpha|=3}D_x^\alpha(\varphi_k(x)(a_\alpha^1(x)-a_\alpha^1(x^k))v(t,x)),$$

$$(L_2(x,x^k;D_x))^*v(t,x)=\sum_{|\alpha|=4}D_x^\alpha(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))v(t,x)).$$

Для функций $u(t,x)\in C_0^\infty(R^{n+1})$ имеем

$$\mathcal{M}_3u=\sum_{k=0}^N\int\limits_{R^{n+1}}\frac{-1}{2i}(\mathcal{L}'^*(D_t+\gamma,D_x)[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]-$$

$$-[L_1(x,x^k;D_x)(D_t+\gamma)+L_2(x,x^k;D_x)]^*\mathcal{L}'(D_t+\gamma,D_x))u_\gamma(t,x)\overline{u_\gamma(t,x)}dxdt.$$

Дифференциальный оператор внутри скобки обозначим $\mathcal{Z}(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$. Очевидно имеем $\mathcal{Z}(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)=\gamma Z(x,x^k;D_x)v(t,x)+z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)$, где

$$Z(x,x^k;D_x)v(t,x)=$$
$$=[(aI+L_0(D_x))\,L_2(x,x^k;D_x)+L_2^*(x,x^k;D_x)\,(aI+L_0(D_x))]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}[L_1(D_x)L_1(x,x^k;D_x)-L_1^*(x,x^k;D_x)L_1(D_x)]v(t,x),$$

$$z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x)=-\big(D_t^2-\gamma^2I\big)[\big(aI+L_0(D_x)\big)L_1(x,x^k;D_x)-$$
$$-\big(L_1(x,x^k;D_x)\big)^*\big(aI+L_0(D_x)\big)]v(t,x)-$$
$$-D_t[\big(aI+L_0(D_x)\big)L_2(x,x^k;D_x)-\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*\big(aI+L_0(D_x)\big)]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}D_t[L_1(D_x)L_1(x,x^k;D_x)+\big(L_1(x,x^k;D_x)\big)^*L_1(D_x)]v(t,x)-$$
$$-\frac{1}{2}[L_1(D_x)L_2(x,x^k;D_x)-\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*L_1(D_x)]v(t,x).$$

По определению дифференциальных операторов из (1.2) и теореме о коммутаторе [15] легко видеть, что операторы $Z(x,x^k;D_x)$ и $z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$ имеют 6-й порядок. Тогда с учётом гладкости коэффициентов оператор $z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)v(t,x) = -\big(D_t^2-\gamma^2 I\big)\sum_{|\beta|=4} b_\beta^0(x,x^k)D_x^\beta v(t,x) - \\ -D_t\sum_{|\beta|=5} b_\beta^1(x,x^k)D_x^\beta v(t,x) - \sum_{|\beta|=6} b_\beta^2(x,x^k)D_x^\beta v(t,x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где гладкие функции $b_\beta^j(x,x^k)$, $j=0,1,2$, постоянные при $|x|\geqslant r+1$.

Оператор $L_2(x,x^k;D_x)$ и его сопряжённый оператор $\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*$ представимы в виде

$$L_2(x,x^k;D_x)v(t,x) = -\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x) -$$

$$-\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} (\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}v(t,x)),$$

$$\big(L_2(x,x^k;D_x)\big)^*v(t,x) = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)v(t,x)) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)v(t,x)) +$$

$$+\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}(\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x_j}v(t,x)).$$

Из сказанного выше и определения $\varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots,N$, форму $\mathcal{M}_3u$ можно переписать в виде $\mathcal{M}_3u = A_1u + A_2u + A_3u + A_4u$, где

$$A_1u = -\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \varphi_k(x) \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} (a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt -$$

$$-\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt -$$

$$-\gamma \int\limits_{R^{n+1}} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}} \varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)\overline{\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_2u=-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}\varphi_k(x)(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k))D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt-$$

$$-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\times$$

$$\times\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}D_{x_j}\varphi_k(x)\big(a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)\big)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt-$$

$$-\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)\overline{\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}\varphi_k(x)D_{x_j}a_\alpha^2(x)D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_3u=\gamma\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}L_1(x,x^k;D_x)u_\gamma(t,x)\overline{L_1(D_x)u_\gamma(t,x)}dxdt,$$

$$A_4u=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}z(x,x^k;D_t,D_x,\gamma)u_\gamma(t,x)\overline{u_\gamma(t,x)}dxdt.$$

Теперь, учитывая финитность функций $\varphi_k(x)$, оценим модуль каждого слагаемого:

$$|A_1u|\leqslant\gamma\int\limits_R\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B(\sigma,x^k)}\sum_{j=1}^{n}\varphi_k(x)\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\times$$

$$\times|\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\int\limits_R\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{B(\sigma,x^k)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x_j}\varphi_k(x)||a_\alpha^2(x)-a_\alpha^2(x^k)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\times$$

$$\times|\overline{\gamma\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|\varphi_k(x)||D_{x_j}a_\alpha^2(x)||D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\overline{\gamma|\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)|}dxdt.$$

Учитывая условия (3.10), получим

$$|A_1u|\leqslant\gamma\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)||\overline{D_{x_j}\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+\frac{c_2a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)||\overline{\gamma\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)}|dxdt+$$

$$+c_3\int\limits_{R^{n+1}}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{|\alpha|=4\\ \alpha_j\geqslant 1}}|D_{x'}^{\alpha'}D_{x_j}^{\alpha_j-1}u_\gamma(t,x)|\overline{\gamma|\left(aI+L_0(D_x)\right)u_\gamma(t,x)|}dxdt,$$

где $c_2=\max\limits_{k,\,x\in R^n}|\nabla\varphi_k(x)|$, $c_3=\max\limits_{x\in R^n}|D_{x_j}a_\alpha^2(x)|$.

Поэтому, используя равенство Парсеваля и неравенство Гёльдера, получим

$$|A_1u|\leqslant\gamma\left(\frac{c_4a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}+\frac{c_2a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{\gamma qN}+\frac{c_3}{\gamma}\right)\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Аналогично имеем

$$|A_2u|\leqslant\gamma\left(\frac{c_5a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}+\frac{c_6a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{\gamma qN}+\frac{c_7}{\gamma}\right)\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2,$$

$$|A_3u|\leqslant\gamma\frac{c_8a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{qN}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2.$$

где константы $c_j>0$, $j=3,4,5,6,7,8$, не зависят от γ.

Оценим теперь A_4u. Используя представление (3.12) и преобразование Фурье по переменной t, имеем

$$|A_4u|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{R^{n+1}}\Bigg[\left(\eta^2+\gamma^2\right)\sum_{|\beta|=4}|b_\beta^0(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+$$

$$+|\eta|\sum_{|\beta|=5}|b_\beta^1(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+\sum_{|\beta|=6}|b_\beta^2(x,x^k)||D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|\Bigg]|\overline{\tilde{u}_\gamma(\eta,x)}|d\eta dx,$$

где $\tilde{u}_\gamma(\eta,x)$ — преобразование Фурье $u_\gamma(t,x)$ по переменной t.

Далее получим

$$|A_4u|\leqslant c_9N\int\limits_{R^{n+1}}\Bigg[\left(\eta^2+\gamma^2\right)\sum_{|\beta|=4}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+$$

$$+|\eta|\sum_{|\beta|=5}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|+\sum_{|\beta|=6}|D_x^\beta\tilde{u}_\gamma(\eta,x)|\Bigg]|\overline{\tilde{u}_\gamma(\eta,x)}|d\eta dx,$$

где $c_9>0$ — константа, не зависящая от γ. Тогда, используя равенство Парсеваля, имеем

$$|A_4u|\leqslant c_9N\int\limits_{R^{n+1}}\left[\left(\eta^2+\gamma^2\right)|\xi|^4+|\eta||\xi|^5+|\xi|^6\right]|\hat{u}_\gamma(\eta,\xi)|^2d\eta d\xi.$$

Отсюда $|A_4u|\leqslant c_{10}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2$, где $c_{10}>0$ — константа, не зависящая от γ. Из проведённых оценок вытекает, что

$$\begin{gathered}|\mathcal{M}_3u|\leqslant|A_1u|+|A_2u|+|A_3u|+|A_4u|\leqslant\\ \leqslant\gamma\left[\frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\left(c_4+c_5+c_8\right)+\frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\right]\times\\ \times\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta,\xi),L_2(R^{n+1})\|^2,\end{gathered}\tag{3.13}$$

где $c_{11}=\dfrac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\left(c_2+c_6\right)$.

В силу неравенств (3.5), (3.11) и (3.13) для любых $u(t,x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ получим оценку

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\biggl(\rho(\delta) - \frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\bigl(c_4+c_5+c_8\bigr) - \frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\biggr)\times$$

$$\times\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Выбираем теперь покрытие $\bigl\{B(x^k,\sigma)\bigr\}$, $k=1,2,\ldots,N$, таким образом, чтобы для числа $q \geqslant 1$ из (3.10) выполнялась оценка

$$\frac{\rho(\delta)}{4} \geqslant \frac{a_0\sqrt{\rho_1(\delta)}}{q}\bigl(c_4+c_5+c_8\bigr).$$

Тогда будем иметь

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\biggl(\frac{3\rho(\delta)}{4} - \frac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\gamma}\biggr)\gamma\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Определим число $\gamma_2 = 4\dfrac{c_3+c_7+c_{10}+c_{11}}{\rho(\delta)}$. Тогда при $\gamma > \max\{\gamma_1,\gamma_2\}$ имеет место оценка

$$\mathcal{M}u \geqslant \gamma\frac{\rho(\delta)}{2}\|(a+|\xi|^2)(|\eta|+\gamma+|\xi|)\hat{u}_\gamma, L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Отсюда в силу определения $\mathcal{M}u$ по неравенству Гёльдера получаем энергетическую оценку (2.11). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из энергетической оценки (2.11) очевидно вытекает теорема 3 о единственности решения задачи Коши для равномерно псевдогиперболического уравнения (1.1).

Список литературы

1. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
2. **Соболев С. Л.** Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы / ред. Г. В. Демиденко, В. Л. Васкевич. Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, филиал "Гео" Изд-ва СО РАН, 2003.
3. **Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln : VSP, 2003.
4. **Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007.
5. **Гальперн С. А.** Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными (автореферат докторской диссертации) // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2 (110). С. 239–249.
6. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.; Л. : Стройиздат, 1940.
7. **Герасимов С. И., Ерофеев В. И.** Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров : ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
8. **Bishop R. E. D.** Longitudional waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. Vol. 3, no. 4. P. 280–293.
9. **Rao J. S.** Advanced Theory of Vibration. New York : John Wiley and Sons, 1992.
10. **Демиденко Г. В.** Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1466–1475.

11. **Fedotov I., Shatalov M., Marais J.** Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations // Acta Mechanica. 2016. Vol. 227, no. 11. P. 3315–3324.
12. **Демиденко Г. В.** Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
13. **Лере Ж.** Гиперболические дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1984.
14. **Петровский И. Г.** Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М. : Наука, 1986.
15. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частным производными. Т. III. М. : Мир, 1987.

Поступила в редакцию 12.09.2025.
После переработки 06.10.2025.

Сведения об авторах

Демиденко Геннадий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: demidenk@math.nsc.ru.

Нурмахматов Вахоббиддин Саидаслон угли, аспирант, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: v.s.nurmuhammad@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 649–663.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-649-663

ENERGY ESTIMATES FOR AN UNIFORMLY STRICTLY PSEUDOHYPERBOLIC OPERATOR

G.V. Demidenko[1,2,a], **V.S. Nurmakhmatov**[2,b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[a] *demidenk@math.nsc.ru,* [b] *v.s.nurmuhammad@gmail.com*

A class of strictly pseudohyperbolic operators of the fourth order with variable coefficients is considered. This class includes, in particular, the Vlasov, Gal'pern, and Rayleigh–Bishop operators. Under certain conditions for the coefficients, energy estimates are established.

Keywords: *equation not solvable with respect to the highest-order derivative, pseudohyperbolic operator, energy estimate, weighted Sobolev space.*

References

1. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York, Marcel Dekker, 2003.
2. **Sobolev S.L.** *Selected Works*. Vol. I. *Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas*. Eds.: G.V. Demidenko , V.L. Vaskevich. New York, Springer, 2006.
3. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003.
4. **Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.** *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear equations of Sobolev type]. Moscow, Fizmatlit, 2007. (In Russ.).
5. **Gal'pern S.A.** Zadacha Koshi dlya obshchikh sistem lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi (avtoreferat doktorskoy dissertatsii) [The Cauchy problem for general systems of linear partial differential equations (summary of a doctor's thesis)]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Achievements of mathematical sciences], 1963, vol. 18, no. 2 (110), pp. 239–249. (In Russ.).
6. **Vlasov V.Z.** *Thin-Walled Elastic Beams*. Washington, National Science Foundation, 1961.
7. **Gerasimov S.I., Erofeev V.I.** Zadachi volnovoy dinamiki elementov konstruktsiy [Problems of wave dynamics for structural elements]. Sarov, Russian Federal Nuclear Center — All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics, 2014. (In Russ.).
8. **Bishop R.E.D.** Longitudional waves in beams. *Aeronautical Quarterly*, 1952, vol. 3, no. 4, pp. 280–293.
9. **Rao J.S.** *Advanced Theory of Vibration*. New York, John Wiley and Sons, 1992.
10. **Demidenko G.V.** Energy estimates for one class of pseudohyperbolic operators with variable coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2024, vol. 64, no. 8, pp. 1755–1764.
11. **Fedotov I., Shatalov M., Marais J.** Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations. *Acta Mechanica*, 2016, vol. 227, no. 11, pp. 3315–3324.

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00370), https://rscf.ru/project/24-21-00370/.

12. **Demidenko G.V.** Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1028–1041.
13. **Leray J.** *Hyperbolic Differential Equations*. Princeton, Institute for Advanced Study, 1953.
14. **Petrovskiy I.G.** *Izbrannye trudy. Sistemy uravneniy s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaya geometriya* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. Moscow, Nauka, 1986. (In Russ.).
15. **Hörmander L.** *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Vol. III. Berlin etc., Springer-Verlag, 1985.

Article received 12.09.2025.
Corrections received 06.10.2025.