Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 642–648.

УДК 517.968.23 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-642-648

ОБ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ ОБОБЩЁННЫХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. А. Гальмукова[1,a], **К. М. Расулов**[2,b]

[1] *ВА ВПО ВС РФ имени маршала Советского Союза А.М.Василевского, Смоленск, Россия*
[2] *Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия*
[a] *irina.galmuckova@yandex.ru,* [b] *kahrimanr@yandex.ru*

Построен эффективный алгоритм явного метода решения одной модельной краевой задачи типа задачи Карлемана для обобщённых метааналитических функций в произвольных односвязных областях. Основная суть полученного алгоритма состоит в том, что явное решение исследуемой задачи можно получить, решая последовательно две классические задачи типа Карлемана в классах аналитических функций комплексного переменного.

Ключевые слова: *обобщённая метааналитическая функция, краевая задача типа Карлемана, алгоритм явного решения.*

Введение

Предположим, что L — произвольная простая замкнутая кривая Ляпунова на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а T^+ — конечная область, ограниченная L, причём точка $z = 0$ принадлежит T^+.

Напомним [1–3], что функция $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ называется *обобщённой метааналитической функцией* в области T^+, если она является регулярным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + q_1(z)\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + q_0(z)F(z) = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ дифференциальный оператор Коши — Римана, а $q_0(z), q_1(z)$ — заданные аналитические в области T^+ функции.

Всевозможные регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области T^+ представляются в виде (см. [1–3])

$$F(z) = \left[\varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z)\right] e^{\lambda_0(z)\bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) = \lambda_1(z), \tag{2}$$

или

$$F(z) = \varphi_0^+(z)e^{\lambda_0(z)\bar{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_1(z)\bar{z}}, \text{ если } \lambda_0(z) \neq \lambda_1(z), \tag{3}$$

причём $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$ являются аналитическими в T^+ функциями, называемыми *аналитическими компонентами* обобщённой метааналитической функции $F(z)$, а $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ — корни уравнения $\lambda^2 + q_1(z)\lambda + q_0(z) = 0$.

В дальнейшем *обобщёнными метааналитическими функциями первого типа* назовём функции, задаваемые формулой (2), а *обобщёнными метааналитическими функциями второго типа* — функции, задаваемые формулой (3).

Далее через $M_2(T^+) \cap H(L)$ будем обозначать класс функций $F(z)$ вида (2) или (3), у которых аналитические компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$, а также функции $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжаются на контур L.

Сформулируем постановку задачи, которая является объектом исследования настоящей работы: *требуется найти все обобщённые метааналитические в области T^+ функции $F(z)$ класса $M_2(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L условиям:*

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t)\overline{F^+(t)} + g_0(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial \bar{t}} - \lambda(t)F^+[\alpha(t)] = G_1(t)\overline{\left(\frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} - \lambda(t)F^+(t)\right)} + g_1(t), \tag{5}$$

где

$$F^+(t) = \lim_{z \to t \in L} F(z), \quad \frac{\partial F^+(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \to t \in L} \frac{\partial F^+(z)}{\partial \bar{z}};$$

$\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура L, для которого выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{6}$$

$\lambda(t)$ — граничное значение некоторого корня характеристического уравнения $\lambda^2 + q_1(z)\lambda + q_0(z) = 0$, а $G_k(t)$ и $g_k(t)$ $(k = 0, 1)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера (т. е. $G_k(t), g_k(t) \in H(L)$), причём $G_k(t) \neq 0$ $(k = 0, 1)$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Ради краткости сформулированную краевую задачу будем называть задачей GK_M. Частный случай, когда $q_0(z) = \text{const}$, $q_1(z) = \text{const}$, краевой задачи GK_M впервые был сформулирован и исследован в работе [4].

Главной целью настоящей статьи является разработка эффективного алгоритма явного метода решения задачи GK_M. При этом ради краткости изложения здесь мы ограничиваемся разработкой подробного алгоритма решения задачи GK_M для функций, задаваемых формулой (3), т. е. в классе обобщённых метааналитических функций второго типа.

Алгоритм решения задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа

Пусть в соотношении (5) $\lambda(t) = \lambda_0(t)$. Тогда, учитывая формулу (3) и условие $\lambda_0(t) \neq \lambda_1(t)$, краевые условия (4) и (5) можно записать, соответственно, следующим образом:

$$\varphi_0^+[\alpha(t)] = G_{10}(t)\overline{\varphi_0^+(t)} + Q_0(t), \tag{7}$$

$$\varphi_1^+[\alpha(t)] = G_{11}(t)\overline{\varphi_1^+(t)} + Q_1(t), \tag{8}$$

где приняты обозначения

$$G_{10}(t) = G_0(t)e^{\overline{\lambda_0(t)}t - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}, \; G_{11}(t) = G_1(t)\frac{\overline{\lambda_1(t)} - \overline{\lambda_0(t)}}{\overline{\lambda_1[\alpha(t)]} - \overline{\lambda_0[\alpha(t)]}}e^{\overline{\lambda_1(t)}t - \lambda_1[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}},$$

$$Q_0(t) = g_0(t)e^{-\lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}} - \varphi_1^+[\alpha(t)]\, e^{\lambda_1[\alpha(t)] - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}} + G_0(t)\overline{\varphi_1^+(t)}e^{\overline{\lambda_1(t)}t - \lambda_0[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}, \tag{9}$$

$$Q_1(t) = \frac{g_1(t)e^{-\lambda_1[\alpha(t)]\overline{\alpha(t)}}}{\lambda_1[\alpha(t)] - \lambda_0[\alpha(t)]}.$$

Заметим, что равенство (8) является краевым условием классической задачи типа Карлемана относительно аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ (см., например, [5, с. 172]). Поэтому с учётом (6), краевое условие (8) можно привести к виду

$$\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]\varphi_1^+(t) = G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right], \quad t \in L. \tag{10}$$

Ясно, что в силу соотношения (10) для решения задачи типа Карлемана (8) (а значит, и для решения задачи GK_M) целесообразно отдельно рассматривать следующие 4 возможных случая:

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \equiv 0, G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right] \neq 0, \quad t \in L; \tag{11}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \neq 0, \quad t \in L; \tag{12}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} \equiv 0, G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right] \equiv 0, \quad t \in L; \tag{13}$$

$$1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)} = 0 \text{ в отдельных точках контура } L. \tag{14}$$

Предположим, что выполняются условия (11). Из соотношения (10) следует, что если выполняются условия (11), то задача типа Карлемана (8) не имеет решений (неразрешима), а значит, в этом случае не будет иметь решений и исходная задача GK_M, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (11)*, то задача* GK_M *в классе обобщённых метааналитических функций второго типа неразрешима.*

Пусть теперь выполняется условие (12). Тогда, как видно из (10), решение задачи типа Карлемана (8) сводится к решению следующей задачи об аналитическом продолжении функции $\varphi_1^+(z)$:

$$\varphi_1^+(t) = \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]}, \quad t \in L. \tag{15}$$

Хорошо известно (см., например, [6, с. 420]), что для разрешимости задачи об аналитическом продолжении (15) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]} t^k dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

При выполнении условий (16) единственное решение задачи об аналитическом продолжении (15) можно задать в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_{11}\left[\alpha(t)\right]Q_1(t) + Q_1\left[\alpha(t)\right]}{\left[1 - G_{11}\left[\alpha(t)\right]\overline{G_{11}(t)}\right]} \frac{dt}{t - z}. \tag{17}$$

Далее, подставляя граничные значения найденной по формуле (17) аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ в правую часть равенства (9), сначала находим значения функции $Q_0(t)$, а затем решаем классическую задачу типа Карлемана (7) относительно аналитической функции $\varphi_0^+(z)$, например методом, изложенным в монографии [5, с. 186–188].

Таким образом, при выполнении условия (12) получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие* (12)*, то решение задачи* GK_M *в классе обобщённых метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению задачи об аналитическом продолжении* (15) *относительно функции* $\varphi_1^+(z)$ *и классической задачи типа Карлемана* (7) *относительно функции* $\varphi_0^+(z)$*.*

Далее подробно остановимся на построении алгоритма решения задачи GK_M в случае, когда выполняются условия (13). Пусть при этом $\chi_1 = \mathrm{Ind}G_{11}(t)$ — индекс задачи типа Карлемана (8). Тогда хорошо известен следующий результат (см., например, [5, с. 186]):

если $\chi_1 \geqslant 0$, то задача типа Карлемана (8) безусловно разрешима и её общее решение задаётся формулой

$$\varphi_1^+(z) = z^{m_1} X_{11}^+(z) \left[\sum_{j=1}^{\chi_1} \beta_{j1} W_{j1}(z) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau \right], \tag{18}$$

где $m_1 = \chi_1/2$, а $\psi_1(t)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$(K\psi_1)(t) \equiv \psi_1(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{\overline{(\tau')^2}}{\bar{\tau} - \bar{t}} \psi_1(\tau) \right] d\tau = \frac{Q_1(t)}{[\alpha(t)]^m X_0^+[\alpha(t)]};$$

если $\chi_1 < 0$, то для разрешимости задачи типа Карлемана (8) необходимо и достаточно выполнение следующих $-\chi_1 - 1$ условий разрешимости:

$$\mathrm{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau} d\tau = 0, \quad \mathrm{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau^{j+1}} d\tau = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau^{j+1}} d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\frac{\chi_1}{2} - 1. \tag{20}$$

Если условия, заданные формулами (19), (20), выполняются, то решение задачи типа Карлемана (8) определяется формулой

$$\varphi_1^+(z) = z^{m_1} X_{11}^+(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi_1[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + c_0 \right], \tag{21}$$

где c_0 — определённая действительная постоянная.

Пусть задача типа Карлемана (8) является разрешимой и аналитическая функция $\varphi_1^+(z)$ найдена по формуле (18) или (21). Тогда, подставляя в выражение функции $Q_0(t)$, задаваемой по формуле (9), вместо $\varphi_1^+(t)$ граничные значения найденной аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, а затем решая задачу типа Карлемана (7) относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_0^+(z)$, получим решение исходной краевой задачи GK_M по формуле (3), где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ — решения классических краевых задач типа Карлемана (7) и (8) соответственно.

Приведённые выше рассуждения позволяют сформулировать следующий *алгоритм* решения задачи GK_M для функций, задаваемых формулой (3) в случае выполнения условий (13).

1-й шаг. С учётом представления (3) переписываем краевые условия (4) и (5) в виде (7) и (8) соответственно.

2-й шаг. Решаем краевую задачу типа Карлемана (8) относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi_1^+(z)$. В случае разрешимости задачи (8) находим

значения аналитической функции $\varphi_1^+(z)$ по формуле (18) или (21), а затем переходим к шагу 3. Если же задача типа Карлемана (8) неразрешима, то и исходная задача GK_M неразрешима, и на этом завершается алгоритм.

3-й шаг. Подставляем в выражение функции $Q_0(t)$, задаваемой формулой (9), граничные значения аналитической функции $\varphi_1^+(z)$, являющейся решением краевой задачи (8), а затем решаем обычную задачу типа Карлемана (7). Если данная задача (7) является разрешимой, то она позволяет отыскать значения аналитической функции $\varphi_0^+(z)$ и перейти к шагу 4. Если же задача (7) является неразрешимой, то и исходная краевая задача GK_M также неразрешима. И, соответственно, алгоритм завершается.

4 шаг. Подставляя в правую часть формулы (3) вместо $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ решения задач типа Карлемана (8) и (7) соответственно, получаем общее решение исходной краевой задачи GK_M. На этом заканчивается алгоритм.

Ясно, что установленный выше алгоритм решения краевой задачи GK_M в краткой форме можно выразить в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (13)*, то решение задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа сводится к последовательному решению двух классических краевых задач типа задачи Карлемана* (8) *и* (7) *относительно аналитических функций $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ соответственно. При этом задача GK_M разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи типа Карлемана* (8) *и* (7)*.*

В заключение отметим, что, поскольку до сих пор задача типа Карлемана (8) для аналитических функций не исследована при выполнении условий (14), остаётся неисследованной и задача GK_M при выполнении указанных условий.

Нетрудно проверить, что построенный выше алгоритм явного метода решения рассматриваемой задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций второго типа вполне применим и для построения аналогичного алгоритма для решения задачи GK_M в классе обобщённых метааналитических функций первого типа.

Список литературы

1. **Балк М. Б., Зуев М. Ф.** О метааналитических функциях // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 5. С. 203–226.
2. **Балк М. Б.** Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы матемематики. Фундамент. направления. 1991. Т. 85. С. 187–246.
3. **Balk M. B.** Polyanalytic Functions. Berlin : Akademie Verlag, 1991.
4. **Осипян К. В., Расулов К. М.** Модельная краевая задача типа задачи Карлемана в классах метааналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы междунар. конф. Вып. 19. Смоленск : СмолГУ, 2018. С. 299–305.
5. **Литвинчук Г. С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977.
6. **Галузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966.

Поступила в редакцию 08.11.2024.
После переработки 11.01.2025.

Сведения об авторах

Гальмукова Ирина Аркадьевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры естественно-научных дисциплин, Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации, Смоленск, Россия; e-mail: irina.galmuckova@yandex.ru.

Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия; e-mail: kahrimanr@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 642–648.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-642-648

ON ALGORITHM FOR SOLVING A MODEL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE CARLEMAN TYPE IN THE CLASSES OF GENERALIZED META-ANALYTIC FUNCTIONS

I.A. Galmukova[1,a], **K.M. Rasulov**[2,b]

[1] *Military Academy named after Marshal of the Soviet Union A.M. Vasilevsky, Smolensk, Russia*
[2] *Smolensk State University, Smolensk, Russia*
[a] *irina.galmuckova@yandex.ru,* [b] *kahrimanr@yandex.ru*

The paper is devoted to the construction of an efficient algorithm for an explicit method for solving a model boundary value problem of the Carleman type for generalized metaanalytic functions in arbitrary simply connected domains. The main essence of the algorithm obtained in the article is that an explicit solution of the problem can be obtained by successively solving two classical Carleman-type boundary value problems in classes of analytic functions of a complex variable.

Keywords: *generalized metaanalytic function, Carleman type boundary value problem, explicit solution algorithm.*

References

1. **Balk M.B., Zuev M.F.** On polyanalytic functions. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no.5, pp. 201–223.
2. **Balk M.B.** Polianaliticheskiye funktsii i ikh obobshcheniya [Polyanalytic functions and their generalizations]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Ser. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1991, vol. 85, pp. 187–246.
3. **Balk M.B.** *Polyanalytic Functions*. Berlin, Akademie Verlag, 1991.
4. **Osipyan K.V., Rasulov K.M.** Model'naya krayevaya zadacha tipa zadachi Karlemana v klassakh metaanaliticheskikh funktsiy [Model boundary value problem of the Carleman type in classes of meta-analytic functions]. *Systemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer Mathematics Systems and Their Applications], Proceedings of the International Conference, iss. 19. Smolensk, Smolensk State University, 2018. Pp. 299–305.
5. **Litvinchuk G.S.** *Krayevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* [Boundary value problems and singular integral equations with a shift]. Moscow, Nauka, 1977.
6. **Goluzin G.M.** *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1966.

Article received 08.11.2024.
Corrections received 11.01.2025.