МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2025. Т. 10, вып. 4. С. 634–641.

УДК 517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-634-641

ОБРАЩЕНИЕ ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА

Х. Алкади

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

hamsaphd.hassan44@gmail.com

Впервые рассматривается дробно дифференциальный полиномиальный оператор, обобщающий многочлен с целочисленным дифференцированием Эйлера. Исследуется его обратимость в пространствах функций, ограниченных со степенным весом на отрезке. Устанавливается существование ограниченного обратного к рассматриваемому оператору в этих пространствах. Результаты применяются к доказательству корректной разрешимости задачи без начальных условий для неоднородного обобщённого уравнения Эйлера с дробным дифференцированием Маршо. Получены интегральное представление и оценка решения через правую часть.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение Эйлера, сильно непрерывная полугруппа, дробная степень оператора, корректная задача, ортогональные многочлены.*

1. Введение

В [1] для дифференциального уравнения

$$P_n(\mathbb{D}_x^\nu)u = \sum_{m=0}^{n} a_m({}_0\mathbb{D}_x^\nu)^m u(x) = f(x), \qquad x \in (0,\infty), \tag{1}$$

где ${}_0\mathbb{D}_x^\nu$ — дробная производная Капуто порядка $\nu \in (0,1)$, $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция, модуль которой растёт не быстрее экспоненты на $[0,\infty)$, рассматривается однородная задача Коши с условиями

$$u(0) = u^{(1)}(0) = \ \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$$

и показывается, что задача имеет единственное решение и оно представимо в виде

$$u(x) = \int_0^x q(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_0^x q(\xi)f(x-\xi)d\xi,$$

где $q(x)$ — дробная функция Грина, найденная из характеристического полинома $P_n(p) = \sum_{m=0}^{n} a_m p^m$ с помощью обратного преобразования Лапласа. Заметим, что при этом не обсуждается устойчивость к погрешности решения $u(x)$ в зависимости от погрешности задания $f(x)$, что необходимо при численной реализации задачи для обоснования корректной разрешимости по Адамару.

В [2] для исследования задач без начальных условий рассматриваются уравнения на $(-\infty,\infty)$ вида

$$P_n(\overline{a},\overline{\nu})u(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^{\nu_m}}{dx^{\nu_m}}u(x) = f(x), \qquad x \in (-\infty,\infty), \tag{2}$$

где $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_m \geqslant 0$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_m \in (0,1)$, $\frac{d^{\nu_m}}{dx^{\nu_m}}$ — производная Маршо. Для этой задачи в [2] показано, что если f принадлежит пространству $C_\mu[-\infty, \infty]$ с нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} e^{-\mu x}|f(x)|, \quad \mu \geqslant 0,$$

то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in C_\mu[-\infty, \infty]$ и оно имеет вид

$$u = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n U(s, A_m)U(s, A)f ds = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n \int_0^\infty h_{\alpha_m, a_m s}(\xi_m) f(t-\xi) d\xi ds,$$

где $h_{\alpha_m, a_m s}(\xi_m)$ — функция Иосиды. При этом для решения справедлива оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{\sum\limits_{m=0}^n a_m \mu^{\nu_m}}.$$

1.1. Постановка задачи и формулировка результата

С целью продолжения исследования задач без начальных условий для уравнений с дробными производными с применением операторных методов функционального анализа в настоящей заметке изучается корректная разрешимость по Адамару задачи без начальных условий для дробно-полиномиального уравнения Эйлера

$$L_n u(x) = \sum_{m=0}^n a_m (\mathbb{D}^\nu)^m u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

где $\mathbb{D}^\nu$ — дробная степень порядка $\nu \in (0,1)$ оператора $\mathbb{D}$, заданного выражением $x\frac{d}{dx}$ и областью определения $D(\mathbb{D}) = \{u \in C_\mu[0,1] : x\frac{du}{dx} \in C_\mu[0,1]\}$, где $C_\mu[0,1]$ — банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $[0,1]$ функций с нормой

$$\|u\|_\mu = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|u(x)|}{x^\mu}, \quad \mu \geqslant 0.$$

Как известно, корректная разрешимость по Адамару эквивалентна существованию ограниченного обратного оператора L_n^{-1} в $C_\mu[0,1]$.

В данной работе доказано, что справедлива следующая теорема корректности.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_\mu[0,1]$ и корни $\{p_k\}_{k=1}^n$ характеристического полинома $L_n(p) = \Sigma_{m=0}^n a_m p^m$ удовлетворяют условию*

$$p_k < \mu^\nu, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) *имеет единственное решение $u \in C_\mu$, и для него справедлива оценка*

$$\|u\|_\mu \leqslant M \sum_{k=1}^n \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k)|P_n'(p_k)|}. \tag{5}$$

2. Предварительные сведения

2.1. C_0-полугруппы операторов

При исследовании корректной разрешимости задач для уравнений в банаховых пространствах важную роль играют методы теории сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных преобразований.

Напомним, что семейство $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ линейных ограниченных преобразований в банаховом пространстве E называется C_0-полугруппой операторов, действующей в E, если оно удовлетворяет условиям

1) $U(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$;

2) $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$, $\varphi \in E$, $s, t \geqslant 0$;

3) $\lim\limits_{t\to 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0$, $\varphi \in E$.

Для C_0-полугруппы операторов существуют такие $M \geqslant 0$ и $w \in \mathbb{R}$, что

$$\|U(t)\varphi\| \leqslant Me^{wt}\|\varphi\|.$$

Если $\{U(t) : t \geqslant 0\}$ — C_0-полугруппа операторов, то существует оператор

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[U(t)\varphi - \varphi] := A\varphi,$$

определённый на векторах $\varphi \in E$, при которых указанный предел существует. Этот оператор A называется генератором полугруппы $U(t)$. Как известно, область определения $D(A)$ генератора A C_0-полугруппы операторов плотна в E.

Известно также [3], что если оператор $-A$ является генератором C_0-полугруппы операторов $U(t, -A)$ с оценкой

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leqslant me^{-wt}\|\varphi\|, \quad w > 0,\ t \geqslant 0,$$

то для A определены дробные степени, определяемые формулой Балакришнана

$$A^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-1-\alpha}[U(t, -A) - I]\varphi dt, \ \ \alpha \in (0, 1).$$

Связь дробной степени оператора A, заданного выражением $A = \frac{d}{dx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, с дробными производными Маршо обсуждается в [2].

2.2. Ортогональные многочлены

Важным классом многочленов, имеющих простую кратность, являются ортогональные многочлены, определённые на интервале (a, b), конечном или бесконечном, согласно следующему правилу. Пусть

$$\{P_k(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

есть последовательность многочленов одинаковой степени. Если для некоторого $h(x) > 0$, такого, что $\int_a^b h(x)dx < \infty$, для любых $n, m = 0, 1, \ldots$

$$\int_a^b h(x)P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

то многочлены (6) называются ортогональными. При этом интервал (a, b) называется интервалом ортогональности.

Фундаментальным свойством ортогональных многочленов является тот факт, что все нули ортогональных многочленов $P_n(x)$ действительны, различны и расположены в интервале (a, b).

2.3. Оператор Эйлера и его дробные степени в $C[0,1]$

Пусть $E = C[0,1]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$, и действие операторов $U(t)\varphi(x)$ задано равенством

$$U(t)\varphi(x) = \varphi[xe^{-t}], \quad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при $\varphi \in C[0,1]$ выполняются следующие соотношения:

$$\|U(t)\varphi\| \leqslant \|\varphi\|, \quad U(0)\varphi = \varphi, \tag{8}$$

$$U(t)U(s)\varphi(x) = U(t)\varphi(xe^{-s}) = \varphi(xe^{-(s+t)}) = U(t+s)\varphi(x).$$

Если $\varphi(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$, то справедливо равенство $U(t)(x^n) = (xe^{-t})^n = x^n e^{-nt}$, поэтому

$$\lim_{t\to 0+} U(t)(x^n) = x^n. \tag{9}$$

Так как функции x^n, $n = 0, 1, \ldots$, образуют плотное в $C[0,1]$ множество, то из (8) и (9) по теореме Банаха — Штейнгауза [3] следует сходимость

$$\lim_{t\to 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0, \quad \varphi \in C[0,1].$$

Таким образом, определяемое формулой (7) семейство операторов $U(t)$ является (C_0)-полугруппой линейных операторов в $C[0,1]$ с генератором

$$\frac{d}{dt}(U(t)\varphi(x))\bigg|_{t=0} = -x\frac{d\varphi}{dx} = -A\varphi.$$

Следовательно, для оператора $A\varphi = x\frac{d\varphi}{dx}$ определены дробные степени $A^\alpha\varphi$, $\alpha \in (0,1)$.

Замечание 1. Замена $xe^{-t} = \tau$ и равенство $x^{-\mu}U(t)\varphi(x) = e^{-\mu t}\tau^{-\mu}\varphi(\tau)$ дают оценку $\|U(t)\varphi\|_\mu \leqslant e^{-\mu t}\|\varphi\|_\mu$, где $\|\varphi\|_\mu = \|x^{-\mu}\varphi\|_{C[0,1]}$.

3. Доказательство теоремы корректности

Из предыдущего следует, что в силу теоремы Балакришнана [3, с. 358] определена дробная степень $(x\frac{d}{dx})^\nu = L^\nu$, $\nu \in (0,1)$

$$L^\nu\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty \frac{U(t,-L)\varphi - \varphi}{t^{1+\varphi}}dt.$$

При этом оператор $-L^\nu$ является производящим оператором C_0-полугруппы

$$U(s,-L^\nu)\varphi = \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)U(\xi,-L)\varphi d\xi, \tag{10}$$

где $h_{s,\nu}(\xi)$ — функция Иосиды, обладающая свойствами

$$h_{s,\nu}(\xi) > 0, \quad \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)e^{-a\xi}d\xi = e^{-a^\nu s}.$$

Пользуясь неравенством

$$x^{-\mu}|U(s,-L^\nu)f(x)| = x^{-\mu}|f(xe^{-s})| = (\tau e^s)^{-\mu}|f(\tau)| \leqslant e^{-\mu s}\|f\|_\mu,$$

получаем оценку $\|U(s,-L)f\|_\mu \leqslant e^{-\mu s}\|f\|_\mu$ Отсюда и из (10) для $f \in C_\mu[0,1]$ получаем

$$\begin{aligned}\|U(s,-L^\nu)f\|_\mu &\leqslant \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)\|U(\xi,-L)f\|_\mu d\xi \leqslant \\ &\leqslant \int_0^\infty h_{s,\nu}(\xi)e^{-\mu\xi}d\xi\|f\|_\mu = e^{-\mu^\nu s}\|f\|_\mu.\end{aligned} \tag{11}$$

Теперь для доказательства теоремы можно воспользоваться теоремой Маслова — Хевисайда [4] для операторного уравнения

$$P_n(A)u = \sum_{m=0}^{n} a_m A^m u = f, \tag{12}$$

где $a_m \in \mathbb{C}$, $(-A)$ — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t,-A)$, действующей в банаховом пространстве E с оценкой $\|U(t,-A)\| \leqslant Me^{-wt}$, $w \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Тогда для любого $f \in E$ уравнение (12) имеет единственное решение, принадлежащее $D(A^n)$, если корни скалярного многочлена $P_n(\lambda)$ удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_j < w$. Это решение имеет вид

$$u = \int_0^\infty q(t)U(t,-A)f dt, \tag{13}$$

где функция $q(t)$ является решением задачи Коши

$$\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t) = \delta(t), \tag{14}$$

$$q(0) = \ldots = q^{(n-1)}(0) = 0, \tag{15}$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (14) с учётом условий (15) даёт представление функции $q(t)$ в образах Лапласа:

$$L\left(\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t)\right)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t)dt = \sum_{m=0}^{n} a_m p^m \tilde{q}(p) = P_n(p)\tilde{q}(p) = 1.$$

Отсюда $\tilde{q}(p) = 1/P_n(p)$ и применение обратного преобразования Лапласа в соответствии с [5, с. 47] даёт решение задачи (14), (15)

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{w-i\infty}^{w+i\infty}\frac{e^{pt}dp}{P_n(p)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\frac{(p-p_k)^{n_k}e^{pt}}{P_n(p_k)}, \tag{16}$$

где p_k — корни многочлена $P_n(p)$ кратностей n_k, $k = 1,2,\ldots,m \leqslant n$.

В частности, если все корни многочлена $P_n(p)$ простые, т. е. $n_k = 1$, $k = 1,2,\ldots,m = n$, то формула (16) имеет вид

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{p_k t}}{P_n'(p_k)}, \quad P_n'(p_k) = \left.\frac{P_n(p)}{p-p_k}\right|_{p=p_k}.$$

Применяя формулу (13) к уравнению (3), где $A = L^\nu$, $E = C_\mu$, а $P_n(p)$ — ортогональный полином, корни которого p_k все действительные и различные, для решения уравнения (3) получаем представление

$$u = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} U(t, -L^\nu) f}{P_n'(p_k)} dt, \tag{17}$$

отсюда, в силу (11), следует оценка

$$\|u\|_\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} \|U(t, -L^\nu)\|_\mu \|f\|_\mu}{|P_n'(p_k)|} dt \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \frac{e^{p_k t} e^{-\mu^\nu t}}{|P_n'(p_k)|} dt \|f\|_\mu =$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{(\mu^\nu - p_k)|P_n'(p_k)|}. \tag{18}$$

Тем самым получены неравенство (5) и доказательство теоремы корректности.

Полученный результат показывает, что задача без начальных условий для уравнения (1) корректно поставлена. При этом оценка корректности (18) и решение (17) позволяют численно реализовать решение для широкого класса уравнений, включающих классические ортогональные многочлены.

Особый интерес представляет случай многочленов Чебышёва первого рода $T_n(x)$, представление которых в виде

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 0, 1, \ldots,$$

позволяет получить явный вид их корней

$$x_k^n = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Подставив (19) в (17), в силу равенств [6, с. 40]

$$\acute{T}_n(x_k^n) = \frac{(-1)^{k-1} n}{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

получаем решение уравнения (1) с характерическим многочленом Чебышёва первого рода

$$u(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \int_0^\infty e^{p_k t} U(t, -L^\nu) dt f(x).$$

Отсюда следует оценка корректности в предположении (4)

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{p_k t} \|U(t, -L^\nu) f\| dt \leqslant \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty e^{-(\mu^\nu - p_k)t} dt \|f\|_\mu =$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{\mu^\nu - \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

В случае $\mu = 1$ эта оценка имеет вид

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{M}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\mu}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}.$$

Список литературы

1. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008.
2. **Костин В. А., Костин Д. В., Алкади Х.** Задача без начальных условий для уравнения с дробной производной и «промежуточные асимптотики»// Челяб. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 78–88.
3. **Иосида К.** Функциональный анализ. М. : Мир, 1967.
4. **Костин В. А., Костин А. В., Костин Д. В.** Операторный метод Маслова — Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля // Докл. Академии наук. 2013. Т. 452, № 4. С. 367–370.
5. **Диткин В. А., Прудников А. П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. : Наука, 1974.
6. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М. : Наука, 1983.

Поступила в редакцию 03.02.2025.
После переработки 09.08.2025.

Сведения об авторе

Алкади Хамса, аспирантка кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2025. Vol. 10, iss. 4. P. 634–641.

DOI: 10.47475/2500-0101-2025-10-4-634-641

THE INVERSION OF THE FRACTIONAL POLYNOMIAL EULER OPERATOR

H. Alkadi

Voronezh State University, Voronezh, Russia
hamsaphd.hassan44@gmail.com

We consider, for the first time, a fractional differential polynomial operator generalizing a polynomial with the integer Euler differentiation. We study its invertibility in spaces of functions bounded with a power weight on a segment. We establish the existence of a bounded inverse to the operator under consideration in these spaces. The results are applied to prove the correct solvability of the problem without initial conditions for the inhomogeneous generalized Euler equation with fractional differentiation of the Marchaud. We provide an integral representation and an estimate for the solution in terms of the right-hand side.

Keywords: *Euler differential equation, strongly continuous semigroups, fractional powers of operators, well-posed problems, orthogonal polynomials.*

References

1. **Uchaikin V.V.** *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. (In Russ.).
2. **Kostin V.A., Kostin D.V., Alkadi H.** Problem without initial conditions for equation with fractional derivatives and intermediate asymptotics. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, vol. 8, no. 1, pp. 78–88. (In Russ.).
3. **Yosida K.** *Functional Analysis*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
4. **Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V.** Maslov–Heaviside operator method and C_0-operator Duhamel integral. *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 13, no. 2, pp. 552–555.
5. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Integral Transforms and Operational Calculus*. Oxford, Pergamon Press, 1965.
6. **Pashkovskii S.** *Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational applications of Chebyshev polynomials and series]. Moscow, Nauka, 1983. (In Russ.).

Article received 03.02.2025.
Corrections received 09.08.2025.