Челябинский физико-математический журнал. 2024. Т. 9, вып. 4. С. 561–572.

УДК 517.962.22 DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-561-572

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Г. В. Демиденко[1,2,a], **А. А. Бондарь**[2,b], **М. Ш. Ганжаева**[2,c]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[a] *demidenk@math.nsc.ru*, [b] *anna.alex.bondar@gmail.com*, [c] *m.ganzhaeva@g.nsu.ru*

Рассматривается задача об экспоненциальной дихотомии для систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами. На основе ранее полученного критерия экспоненциальной дихотомии исследован вопрос о допустимых возмущениях на матрицу коэффициентов, при которых сохраняется экспоненциальная дихотомия.

Ключевые слова: *система разностных уравнений с периодическими коэффициентами, система дискретных уравнений Ляпунова, критерий экспоненциальной дихотомии, возмущение коэффициентов.*

Введение

В работе рассматриваются системы линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

а также системы уравнений, содержащие возмущения в коэффициентах

$$z_{n+1} = (A(n) + \hat{A}(n))z_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

где $\{A(n)\}$, $\{\hat{A}(n)\}$ — N-периодические последовательности матриц размера $m \times m$, т. е. $A(n+N) \equiv A(n)$, $\hat{A}(n+N) \equiv \hat{A}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Предполагается, что система (1.1) экспоненциально дихотомична (см. [1]).

Основная цель работы заключается в нахождении условий на коэффициенты матриц возмущений $\hat{A}(n)$, при которых система разностных уравнений (1.2) будет также экспоненциально дихотомичной.

Отметим, что согласно спектральному критерию экспоненциальной дихотомии [1; 2] спектр матрицы монодромии U_N для системы (1.1) не пересекается с единичной окружностью $S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}$. Поэтому цель работы можно сформулировать как нахождение условий на возмущения $\{\hat{A}(n)\}$, при которых спектр матрицы монодромии $\hat{U}_N$ системы (1.2) также не пересекается с единичной окружностью S_1. Поскольку матричный спектр непрерывно зависит от элементов матриц, то на первый взгляд кажется естественным «простой» ответ на поставленную задачу: нужно потребовать, чтобы нормы возмущений $\|\hat{A}(n)\|$ были достаточно малыми. Но какова должна быть числовая характеристика этой малости? При ответе на этот вопрос

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

и возникает основная проблема. Дело в том, что задача о нахождении собственных значений неэрмитовых матриц является плохо обусловленной! И малым возмущениям элементов матриц могут соответствовать очень большие отличия собственных значений (см., например, [2; 3]).

В настоящее время указанная задача о допустимых возмущениях коэффициентов систем разностных уравнений, сохраняющих экспоненциальную дихотомию, изучена для систем с постоянными коэффициентами (см., например, [2–9]). Для систем с переменными коэффициентами известны лишь результаты частного характера (см., например, [10; 11]).

В данной работе мы решаем поставленную задачу для N-периодических коэффициентов $\{A(n)\}$ в случае, когда все матрицы $A(n)$ не вырождены. Решение задачи основано на применении ранее установленного критерия экспоненциальной дихотомии для систем уравнений вида (1.1) (см. [12]), и условия на допустимые возмущения $\{\hat{A}(n)\}$ указаны в явном виде.

1. Некоторые теоремы об экспоненциальной дихотомии

Вначале напомним определение экспоненциальной дихотомии для системы линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами (1.1)

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Определение [1]. Система (1.1) называется *экспоненциально дихотомичной*, если всё пространство C^m распадается в прямую сумму двух подпространств C^-, C^+ и выполнены условия:

а) для решений $\{x^-(n)\}$ системы, таких, что $x^-(0) \in C^-$, справедливы неравенства

$$\|x^-(n)\| \leqslant \mu_1 e^{-\nu_1(n-k)} \|x^-(k)\|, \qquad n \geqslant k,$$

$\mu_1, \nu_1 > 0$ — постоянные;

б) для решений $\{x^+(n)\}$ системы, таких, что $x^+(0) \in C^+$, справедливы оценки

$$\|x^+(n)\| \leqslant \mu_2 e^{-\nu_2(k-n)} \|x^+(k)\|, \qquad n \leqslant k,$$

$\mu_2, \nu_2 > 0$ — постоянные;

в) взаимный наклон $\beta > 0$ «движущихся» подпространств

$$C^-(n) = U(n)\, C^-, \qquad C^+(n) = U(n)\, C^+, \qquad n \in Z,$$

отделён от нуля. Здесь $\{U(n)\}$ — фундаментальная матрица решений системы (1.1).

Постоянные β, ν_k, μ_k, $k = 1, 2$, называются *параметрами дихотомии*. Как следует из определения, они характеризуют асимптотические свойства решений систем (1.1) на бесконечности, и поэтому представляют большой интерес. Однако, за исключением тривиальных случаев, их точное нахождение практически невозможно, поскольку это связано с использованием спектрального критерия экспоненциальной дихотомии, а спектральные задачи линейной алгебры, как уже отмечалось, для неэрмитовых матриц плохо обусловлены. Поэтому при решении конкретных задач обычно получают оценки параметров дихотомии.

При исследовании экспоненциально дихотомичных систем важными являются следующие вопросы: 1) критерии дихотомии; 2) нахождение проекторов P, таких, что $C^- = P\, C^m$, $C^+ = (I - P)C^m$; 3) нахождение оценок параметров дихотомии; 4) теоремы о возмущении.

В настоящее время эти вопросы наиболее изучены для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [1–7; 11] и имеющуюся там библиографию). Для неавтономных систем разностных уравнений задачи по дихотомии изучены недостаточно полно. Но в случае периодических коэффициентов $\{A(n)\}$ с условием $\det A(n) \neq 0$ можно получить ряд важных результатов на основе критерия экспоненциальной дихотомии для систем (1.1), установленного в [12].

Приведём формулировку этого критерия.

Теорема 1. *Пусть* $\{U_n\}$ *— матрицант системы* (1.1) *и эрмитовы неотрицательно определённые матрицы* $C_1, C_2, \dots, C_N$ *удовлетворяют условию*

$$\sum_1^N C_k > 0.$$

Тогда для того, чтобы для системы (1.1) *выполнялось условие экспоненциальной дихотомии, необходимо и достаточно, чтобы существовали эрмитовы матрицы* $H(0)$, $H(1)$, $\dots$, $H(N-1)$ *и матрица* P, *являющиеся решением краевой задачи*

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l)^{-*}P^*C_{l+1}P(U_l)^{-1} \\ -(U_l)^{-*}(I-P)^*C_{l+1}(I-P)(U_l)^{-1}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = (I-P)^*H(0)(I-P) + P^*H(0)P, \\ U_N P = P U_N, \quad P^2 = P. \end{cases} \tag{2.1}$$

Отметим, что этот критерий является аналогом критерия экспоненциальной дихотомии для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами [1], а также аналогом критерия асимптотической устойчивости решений систем вида (1.1) [13].

Из теоремы 1 вытекает следующая очень важная теорема, используя которую, мы решим поставленную задачу.

Теорема 2. *Если система разностных уравнений* (1.1) *экспоненциально дихотомична, то существует единственное эрмитово положительно определённое* N*-периодическое решение системы дискретных уравнений Ляпунова*

$$\begin{gathered} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (U_l^*)^{-1}(P^*U_l^*U_lP- \\ -(I-P)^*U_l^*U_l(I-P))U_l^{-1},\ l \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

такое, что

$$H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*H(0)(I-P). \tag{2.3}$$

Решение $\{H(l)\}$ *представимо в виде*

$$\begin{gathered} H(l) = (U_l^*)^{-1}\Bigg(\sum_{k=0}^\infty \Big(U_N^*\Big)^k P^* \Big(\sum_{i=l}^{N+l-1} U_i^*U_i\Big) P U_N^k \Bigg) U_l^{-1} + \\ +(U_l^*)^{-1}\Bigg(\sum_{k=1}^\infty \Big(U_N^*\Big)^{-k} (I-P)^* \Big(\sum_{i=l}^{N+l-1} U_i^*U_i\Big) (I-P) U_N^{-k} \Bigg) U_l^{-1}, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В дальнейшем первое слагаемое справа в (2.4) будем обозначать $H^-(l)$, а второе — $H^+(l)$, т. е. формула (2.4) имеет вид $H(l) = H^-(l) + H^+(l)$.

В следующей теореме, используя эту формулу, мы приведём оценки решений системы (1.1), указанные в определении, из них вытекают оценки параметров дихотомии (см. [12]).

Теорема 3. *Пусть* $\{H(l)\}$ — N*-периодическое положительно определённое решение системы дискретных уравнений Ляпунова* (2.2), *удовлетворяющее условию* (2.3), *и* $P \neq 0$, $P \neq I$, *положим*

$$h^- = \max\{\|H^-(0)\|, \|H^-(1)\|, \dots, \|H^-(N-1)\|\},$$

$$h^+ = \max\{\|H^+(0)\|, \|H^+(1)\|, \dots, \|H^+(N-1)\|\},$$

$$M^- = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^-(m)\|, \quad M^+ = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^+(m)\|.$$

Тогда для решений системы (1.1) *справедливы оценки*

$$\|x_n^-\| \leqslant \sqrt{M^-}\left(1 - \frac{1}{h^-}\right)^{\frac{n-k}{2}} \|x_k^-\|, \quad n > k, \quad x_n^- = U_n P x_0,$$

$$\|x_n^+\| \leqslant \sqrt{M^+}\left(1 + \frac{1}{h^+}\right)^{\frac{n-k}{2}} \|x_k^+\|, \quad n < k, \quad x_n^+ = U_n (I - P) x_0.$$

Аналогичным образом можно получить оценки

$$\|U_n P\|^2 \leqslant M^-\left(1 - \frac{1}{h^-}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\|U_n (I - P)\|^2 \leqslant M^+\left(1 + \frac{1}{h^+}\right)^n, \quad n = -1, -2, \dots$$

Оценки такого типа мы будем использовать в следующем параграфе при доказательстве теоремы о возмущении.

2. Теорема о возмущении

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений с возмущёнными коэффициентами

$$z_{n+1} = (A(n) + \hat{A}(n)) z_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

где $\{\hat{A}(n)\}$ — N-периодическая матричная последовательность возмущений. Будем предполагать, что невозмущённая система (1.1) является экспоненциально дихотомичной. В этом параграфе мы будем изучать вопрос: при каких возмущениях $\hat{A}(n)$ система (3.1) также будет экспоненциально дихотомична?

Пусть $\{H(l)\}$ — N-периодическое эрмитово положительно определённое решение системы (2.2), удовлетворяющее условию (2.3) и $P \neq 0$, $P \neq I$. Матрицы $H(l)$ имеют вид (2.4). В дальнейшем эту формулу будем записывать в виде

$$H(l) = H^-(l) + H^+(l), \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

где $H^-(l)$ — первое слагаемое и $H^+(l)$ — второе слагаемое в (2.4).

Имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть система* (1.1) *экспоненциально дихотомична,*

$$det(A(n)) \neq 0, \quad A(n+N) = A(n), \quad \hat{A}(n+N) = \hat{A}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и матрицы возмущений $\{\hat{A}(n)\}$ *удовлетворяют условию*

$$\max\{\|\hat{A}(0)\|, \dots, \|\hat{A}(N-1)\|\} < \left(h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\left(\sqrt{M^-}+\sqrt{M^+}\right)\right)^{-1}, \qquad (3.3)$$

где

$$h = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(N-1)\|\},$$

$$M^- = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^-(m)\|, \quad M^+ = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^+(m)\|.$$

Тогда система (3.1) *экспоненциально дихотомична.*

Доказательство. При доказательстве экспоненциальной дихотомии для системы (3.1) будем использовать метод, предложенный в [11].

Для этого заметим, что, как и в случае систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами, нетрудно показать, что экспоненциальная дихотомия для системы с периодическими коэффициентами эквивалентна однозначной разрешимости в $l_2(\mathbb{Z})$ системы уравнений

$$\hat{z}_{n+1} = (A(n) + \hat{A}(n))\hat{z}_n + \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (3.4)$$

при любой правой части $\{\varphi_n\} \in l_2(\mathbb{Z})$. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что при выполнении условия (3.3) система (3.4) имеет единственное решение $\{\hat{z}_n\} \in l_2(\mathbb{Z})$ при любой $\{\varphi_n\} \in l_2(\mathbb{Z})$.

Решение системы (3.4) будем искать в виде

$$\hat{z} = \mathcal{R}\psi, \quad \hat{z} = \{\hat{z}_n\}, \quad \psi = \{\psi_n\} \in l_2(\mathbb{Z}), \qquad (3.5)$$

где линейный непрерывный оператор $\mathcal{R} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ определяется по аналогии с [14; 15] следующим образом:

$$(\mathcal{R}\psi)_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} U_n P (U_{k+1})^{-1}\psi_k - \sum_{k=n}^{+\infty} U_n (I-P)(U_{k+1})^{-1}\psi_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad (3.6)$$

а векторная последовательность $\psi = \{\psi_n\} \in l_2(\mathbb{Z})$ определяется так, чтобы после подстановки (3.5) в (3.4) мы получили $\hat{z}_{n+1} = (A(n) + \hat{A}(n))\hat{z}_n + \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Но из определения (3.6) нетрудно показать, что $(\mathcal{R}\psi)_{n+1} = A(n)(\mathcal{R}\psi)_n + \psi_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому члены последовательности $\psi = \{\psi_n\}$ должны определяться из уравнений

$$\psi_n - \hat{A}(n)(\mathcal{R}\psi)_n = \varphi_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (3.7)$$

Покажем, что при условии (3.3) справедлива оценка

$$\left\|\left\{\hat{A}(n)(\mathcal{R}\psi)_n\right\}, l_2(\mathbb{Z})\right\| \leqslant q\|\{\psi_n\}, l_2(\mathbb{Z})\|, \quad q < 1. \qquad (3.8)$$

Тогда по теореме фон Неймана оператор $(I - \{\hat{A}(n)\}\mathcal{R}) : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ имеет непрерывный обратный, и, следовательно, из уравнения (3.7) находим

$$\psi = (I - \{\hat{A}(n)\}\mathcal{R})^{-1}\varphi \in l_2(\mathbb{Z}).$$

Поэтому в силу (3.5) для любой последовательности $\varphi = \{\varphi_n\} \in l_2(\mathbb{Z})$ мы находим решение системы (3.4) $\hat{z} = \mathcal{R}(I - \{\hat{A}(n)\}\mathcal{R})^{-1}\varphi \in l_2(\mathbb{Z})$. А это означает, что система (3.1) является экспоненциально дихотомичной.

Таким образом, для доказательства теоремы нужно установить неравенство (3.8). Вначале проведём оценки нормы оператора $\mathcal{R}$.

Перепишем (3.6) в следующем виде:

$$(\mathcal{R}\psi)_n = (\mathcal{R}^-\psi)_n + (\mathcal{R}^+\psi)_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.9}$$

где

$$(\mathcal{R}^-\psi)_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} U_n P (U_{k+1})^{-1}\psi_k, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

$$(\mathcal{R}^+\psi)_n = -\sum_{k=n}^{+\infty} U_n (I - P)(U_{k+1})^{-1}\psi_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Оценим нормы каждого оператора $\mathcal{R}^-$, $\mathcal{R}^+$.

По определению l_2-нормы для последовательности $\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}$ из (3.10) имеем

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|(\mathcal{R}^-\psi)_n\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\sum_{k=-\infty}^{n-1} U_n P (U_{k+1})^{-1}\psi_k\|^2\right)^{1/2}.$$

Отсюда, очевидно, следует

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{k+1})^{-1}\psi_k\|\right)^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{k+1})^{-1}\|\|\psi_k\|\right)^2\right)^{1/2}.$$

Теперь, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{l+1})^{-1}\|\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{k+1})^{-1}\|\|\psi_k\|^2\right)\right)^{1/2}.$$

Введём обозначение

$$A_n = \sum_{l=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{l+1})^{-1}\|.$$

Тогда это неравенство принимает вид

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \|U_n P (U_{k+1})^{-1}\|\|\psi_k\|^2\right)\right)^{1/2}. \tag{3.12}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.

$$A_n \leqslant h\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right)\sqrt{M^-}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Запишем A_n в следующем виде:

$$A_n = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=(n-1)-(j+1)N+1}^{(n-1)-jN} \|U_n P(U_{k+1})^{-1}\|\right) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{n,j} \tag{3.14}$$

и оценим каждое слагаемое $A_{n,j}$.

Рассмотрим скалярное произведение $\langle H(n)U_nP(U_{k+1})^{-1}v, U_nP(U_{k+1})^{-1}v\rangle$, где v — произвольный вектор. Поскольку $\{U_n\}$ — матрицант системы разностных уравнений (1.1), последовательность $\{H(l)\}$ является решением системы дискретных уравнений Ляпунова (2.2) и $P^2 = P$, то получим следующие равенства:

$$\langle H(n)U_nP(U_{k+1})^{-1}v, U_nP(U_{k+1})^{-1}v\rangle =$$
$$= \langle A^*(n-1)H(n)A(n-1)U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle =$$
$$= \langle H(n-1)U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle - \langle U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\langle H(n-1)U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle \leqslant \|H(n-1)\|\|U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\|^2$$

имеем

$$\langle H(n)U_nP(U_{k+1})^{-1}v, U_nP(U_{k+1})^{-1}v\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\langle H(n-1)U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{n-1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим

$$\langle H(n)U_nP(U_{k+1})^{-1}v, U_nP(U_{k+1})^{-1}v\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\langle H(k+1)U_{k+1}P(U_{k+1})^{-1}v, U_{k+1}P(U_{k+1})^{-1}v\rangle.$$

Учитывая, что $P^2 = P$, $PU_N = U_NP$, в силу (3.2)

$$\langle H(j)U_jP(U_j)^{-1}v, U_jP(U_j)^{-1}v\rangle = \langle H^-(j)U_jP(U_j)^{-1}v, U_jP(U_j)^{-1}v\rangle = \langle H^-(j)v, v\rangle,$$

поэтому

$$\langle H(n)U_nP(U_{k+1})^{-1}v, U_nP(U_{k+1})^{-1}v\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\langle H^-(k+1)v, v\rangle.$$

А поскольку все матрицы $H(l)$ являются эрмитовыми положительно определёнными, то получаем оценку

$$\|U_nP(U_{k+1})^{-1}v\|^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\|H^{-1}(n)\|\|H^-(k+1)\|\|v\|^2.$$

Отсюда в силу произвольности вектора v следует

$$\|U_nP(U_{k+1})^{-1}\|^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\|H^{-1}(n)\|\|H^-(k+1)\|.$$

Следовательно, учитывая периодичность последовательности $\{H(l)\}$, получим

$$\|U_nP(U_{k+1})^{-1}\| \leqslant \left(1-\frac{1}{h}\right)^{(n-k-1)/2}\sqrt{M^-}, \quad k+1\leqslant n, \tag{3.15}$$

и отсюда

$$A_{n,j} \leqslant \sqrt{M^-}\sum_{k=(n-1)-(j+1)N+1}^{(n-1)-jN}\left(1-\frac{1}{h}\right)^{(n-k-1)/2}.$$

Используя эту оценку, из (3.14) получаем

$$A_n = \sqrt{M^-}\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{h}\right)^{l/2} = \sqrt{M^-}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right).$$

Лемма доказана. □

Учитывая оценки (3.12), (3.13), имеем

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sqrt{M^-}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{n-1}\|U_nP(U_{k+1})^{-1}\|\|\psi_k\|^2\right)\right)^{1/2}.$$

Очевидно, это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sqrt{M^-}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\psi_k\|^2\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\|U_nP(U_{k+1})^{-1}\|\right)\right)^{1/2}.$$

Введём обозначение

$$B_k = \sum_{n=k+1}^{\infty}\|U_nP(U_{k+1})^{-1}\|,$$

тогда это неравенство будет иметь вид

$$\|\{(\mathcal{R}^-\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sqrt{M^-}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\psi_k\|^2B_k\right)^{1/2}. \tag{3.16}$$

Справедлива лемма.

Лемма 2.

$$B_k \leqslant h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\sqrt{M^-}, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Используя неравенство (3.15), очевидно, получим

$$B_k \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{h}\right)^{(n-k-1)/2}\sqrt{M^-} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{h}\right)^{j/2}\sqrt{M^-}.$$

Отсюда вытекает (3.17). Лемма доказана. □

Из оценок (3.16), (3.17) непосредственно следует неравенство

$$\|\{(\mathcal{R}^{-}\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \sqrt{M^{-}}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\|\{\psi_n\}, l_2(\mathbb{Z})\|. \tag{3.18}$$

Учитывая формулу (3.2) и проводя аналогичные рассуждения для последовательности $\{(\mathcal{R}^{+}\psi)_n\}$ из (3.11), можно получить оценку

$$\|\{(\mathcal{R}^{+}\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \sqrt{M^{+}}h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\|\{\psi_n\}, l_2(\mathbb{Z})\|. \tag{3.19}$$

Следовательно, из представления (3.9) и оценок (3.18), (3.19) вытекает неравенство

$$\|\{(\mathcal{R}\psi)_n\}, l_2(\mathbb{Z})\| \leqslant \left(\sqrt{M^{-}}+\sqrt{M^{+}}\right)h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right)\|\{\psi_n\}, l_2(\mathbb{Z})\|, \tag{3.20}$$

т. е. оператор $\mathcal{R}$, определяемый формулами (3.6), является непрерывным в $l_2(\mathbb{Z})$.

В силу N-периодичности матричной последовательности возмущений $\{\hat{A}(n)\}$ из оценки (3.20) вытекает неравенство $\left\|\left\{\hat{A}(n)(\mathcal{R}\psi)_n\right\}, l_2(\mathbb{Z})\right\| \leqslant q\|\left\{\psi_n\right\}, l_2(\mathbb{Z})\|$, где

$$q=\max\{\|\hat{A}(0)\|,\ldots,\|\hat{A}(N-1)\|\}\left(\sqrt{M^{-}}+\sqrt{M^{+}}\right)h\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{h}}\right).$$

Следовательно, учитывая условие (3.3), имеем $q<1$. Таким образом, нужное неравенство (3.8) установлено. Используя его, как уже отмечалось, мы получаем, что система уравнений с возмущением (3.1) экспоненциально дихотомична.

Теорема доказана. □

Замечание. Аналог теоремы 4 в случае $P=I$ или $P=0$ вытекает из результатов [10; 11].

Список литературы

1. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М. : Наука, 1970.
2. **Годунов С. К.** Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск : Науч. кн., 1997.
3. **Bulgak A., Bulgak H.** Linear algebra. Konya : Selcuk University, 2001.
4. **Абрамов А. А.** О граничных условиях в особой точке для систем линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 1. С. 275–278.
5. **Roberts J. D.** Linear model reduction and solution of the algebraic Riccati equation by use of the sign function // International Journal of Control. 1980. Vol. 32, no. 4. P. 677–687.
6. **Balzer L. A.** Accelerated convergence of the matrix sign function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equations // International Journal of Control. 1980. Vol. 32, no. 6. P. 1057–1078.
7. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 59–70.
8. **Bulgak H.** Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability. In book: Error Control and Adaptivity in Scientific Computing. Eds. H. Bulgak, C. Zenger. Dordrecht : Springer, 1999. P. 95–124.

9. **Бондарь А. А.** Об условиях экспоненциальной дихотомии для систем разностных уравнений при возмущении коэффициентов // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 3–13.
10. **Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.** Асимптотическая устойчивость решений возмущённых линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 493–507.
11. **Демиденко Г. В.** Матричные уравнения: учеб. пособие. Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2009.
12. **Демиденко Г. В., Бондарь А. А.** Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1240–1254.
13. **Demidenko G. V.** Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // Journal of Computational Mathematics and Optimization. 2010. Vol. 6, no. 1. P. 1–12.
14. **Демиденко Г. В.** Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 38–46.
15. **Демиденко Г. В.** Об одном классе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 995–1012.

Поступила в редакцию 25.07.2024.
После переработки 15.09.2024.

Сведения об авторах

Демиденко Геннадий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Бондарь Анна Александровна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: anna.alex.bondar@gmail.com

Ганжаева Мардона Шавкат кизи, магистрант, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: m.ganzhaeva@g.nsu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2024. Vol. 9, iss. 4. P. 561–572.

DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-561-572

EXPONENTIAL DICHOTOMY FOR SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS UNDER PERTURBATION OF COEFFICIENTS

G.V. Demidenko[1,2,a], **A.A. Bondar**[2,b], **M.Sh. Ganzhaeva**[2,c]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

[a]*demidenk@math.nsc.ru*, [b]*anna.alex.bondar@gmail.com*,[c]*m.ganzhaeva@g.nsu.ru*

The problem of exponential dichotomy for systems of difference equations with periodic coefficients is considered. Based on the previously obtained exponential dichotomy criterion, the question of permissible perturbations on the coefficient matrix, under which the exponential dichotomy persists, is investigated.

Keywords: *system of difference equations with periodic coefficients, system of discrete Lyapunov equations, exponential dichotomy criterion, perturbation of coefficients.*

References

1. **Daleckii Yu.L., Krein M.G.** *Stability of Solutions to Differential Equations in Banach Space.* Providence, American Mathematical Society, 1974.
2. **Godunov S.K.** *Modern Aspects of Linear Algebra.* Providence, American Mathematical Society, 1998.
3. **Bulgak A., Bulgak H.** *Linear Algebra.* Konya, Selcuk University, 2001.
4. **Abramov A.A.** On the boundary conditions at a singular point for linear ordinary differential equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1971, vol. 11, no. 1, pp. 363–367.
5. **Roberts J.D.** Linear model reduction and solution of the algebraic Riccati equation by use of the sign function. *International Journal of Control*, 1980, vol. 32, no. 4, pp. 677–687.
6. **Balzer L.A.** Accelerated convergence of the matrix sign function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equations. *International Journal of Control*, 1980, vol. 32, no. 6, pp. 1057–1078.
7. **Bulgakov A.Ya., Godunov S.K.** Circular dichotomy of the spectrum of a matrix. *Siberian Mathematical Journal*, 1988, vol. 29, no. 5, pp. 734–744.
8. **Bulgak H.** Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability. *Error Control and Adaptivity in Scientific Computing*, eds. H. Bulgak, C. Zenger. Dordrecht, Springer, 1999. Pp. 95–124.
9. **Bondar A.A.** On conditions for exponential dichotomy for systems of difference equations under perturbation of coefficients. *Mathematical Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 3–13.
10. **Aydin K., Bulgak H., Demidenko G.V.** Asymptotic stability of solutions to perturbed linear difference equations with periodic coefficients. *Siberian Mathematical Journal*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 389–401.
11. **Demidenko G.V.** *Matrichnye Uravneniya* [Matrix Equations]. Textbook. Novosibirsk, Novosibirsk State University, 2009. (In Russ.).

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008).

12. **Demidenko G.V., Bondar A.A.** Exponential dichotomy of systems of linear difference equations with periodic coefficients. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 969–980.
13. **Demidenko G.V.** Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms. *Journal of Computational Mathematics and Optimization*, 2010, vol. 6, no. 1, pp. 1–12.
14. **Demidenko G.V.** Systems of differential equations with periodic coefficients. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 20–27.
15. **Demidenko G.V.** On one class of systems of differential equations with periodic coefficients in linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 5, 805–821.

Article received 25.07.2024.
Corrections received 15.09.2024.