Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 4. С. 542–552.

УДК 517.929.4 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-542-552

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Т. Ыскак

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
istima92@mail.ru

Рассматривается некоторый класс систем нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием. Предполагается, что коэффициенты в линейных членах являются T-периодическими, нелинейное слагаемое является непрерывной, липшицевой по части переменных вектор-функцией и имеет порядок малости больше единицы. Такие системы дифференциальных уравнений возникают при моделировании различных процессов, возникающих в биологии, химии, физике, экономике. В работе предложен функционал Ляпунова — Красовского, на основе которого установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения рассматриваемого класса систем, указаны оценки на множество притяжения нулевого решения и оценки на норму решения начальной задачи, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности. Все параметры, участвующие в оценках, указаны в явном виде. Установленные в работе условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения выражены в терминах интегрального неравенства. Также получены условия глобальной экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, бесконечное распределённое запаздывание, экспоненциальная устойчивость, оценки решений, функционал Ляпунова — Красовского.*

Введение

В работе рассматривается система вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s)\,ds + \int\limits_{-\infty}^{t} F(t, s, y(t), y(s))\,ds, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими коэффициентами, $B(t,s)$ — матрица размера $n \times n$ с T-периодическими по первой переменной, непрерывными по первой переменной и кусочно-непрерывными по второй переменной коэффициентами, т. е.

$$A(t) \equiv A(t+T), \quad B(t,s) = B(t+T, s),$$

при этом

$$\int\limits_{0}^{\infty} \|B(t,s)\|\,ds < \infty, \quad t > 0,$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

нелинейное слагаемое $F(t, s, u_1, u_2)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, липшицева по последним двум переменным, для которой

$$\left\| \int_{-\infty}^{t} F(t, s, u, w(s)) ds \right\| \leqslant q\|u\|^{1+\omega}, \quad t > 0, \tag{2}$$

где $q \geqslant 0$, $\omega > 0$, $w(s)$ — ограниченная и непрерывная функция, при этом числа q и ω не зависят от функции $w(s)$. Здесь и далее под нормой матрицы понимается её спектральная норма.

Цель работы заключается в исследовании экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).

Активное изучение уравнений с запаздывающим аргументом началось во второй половине XX века. Это связано с тем, что такие уравнения возникают при моделировании различных процессов в биологии, технике, физике, химии, экономике и др. Одной из важных проблем является вопрос устойчивости решений. Исследованию данного направления посвящено много работ (см., например, [1–11]). Отметим, что наименее изученными являются уравнения с распределённым запаздыванием (см., например, [12–15]). Одним из наиболее распространённых методов исследования устойчивости решений является метод функционалов Ляпунова — Красовского. Данный метод не требует наличия спектральной информации, более того, он позволяет при правильно подобранном функционале получать не только условия устойчивости, но и оценки на решения, а в нелинейном случае — оценки на множество притяжения. Отметим, что с помощью таких функционалов были исследованы уравнения с запаздывающим аргументом в работах [16–21]. В работах [16–19] рассматривались уравнения с сосредоточенным запаздыванием, в [20–21] — с распределённым запаздыванием. При этом в работах [18; 19; 21] исследовались нелинейные уравнения.

Исследования в данной работе будут проводиться с использованием функционала Ляпунова — Красовского следующего вида:

$$v(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{0}^{\infty} \int_{t-\eta}^{t} \langle K(t-s, \eta)y(s), y(s)\rangle \, ds d\eta. \tag{3}$$

Предполагается, что матрицы $H(t)$ и $K(t, \eta)$ являются эрмитовыми и положительно определёнными. Отметим, что данный функционал является аналогом функционалов, введённых в работах [16; 20]. Также отметим, что подобный функционал использовался при исследовании асимптотического поведения решений модели конкуренции видов в хемостате [21], которая описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с бесконечным распределённым запаздыванием.

Основные результаты

Рассмотрим начальную задачу для системы (1) при $t > 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} B(t, t-s)y(s) \, ds + \int_{-\infty}^{t} F(t, s, y(t), y(s)) \, ds, \\ y(s) = \varphi(s), \quad s \in (-\infty, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi \in C(-\infty, 0]$ — заданная ограниченная функция.

Введём обозначения:

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds -$$

$$-\int\limits_0^\infty H(t)B(t,s)K^{-1}(s,s)B^*(t,s)H(t)\,ds, \tag{5}$$

$$\gamma(t) = \min\{p_H(t), k\}, \tag{6}$$

$p_H(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $P_H(t) = H^{-1/2}(t)P(t)H^{-1/2}(t)$, k — положительное число,

$$r = \left(\frac{q\omega \int\limits_0^T \|H(\eta)\|^{1/2} \|H^{-1}(\eta)\|^{1/2+\omega/2} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta}{1 - \exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right)} \right)^{-2/\omega}, \tag{7}$$

$$v(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\eta}^0 \langle K(-s,\eta)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds d\eta. \tag{8}$$

Сформулируем теорему об оценках решения начальной задачи (4).

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *существуют гладкая T-периодическая матрица $H(t) = H^*(t)$ и дифференцируемая по первой переменной матрица $K(t,\eta) = K^*(t,\eta)$, такие, что*

$$H(t) > 0, \quad K(t,\eta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) < 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0,$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{t-\eta}^t \left\| \frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta) \right\| ds d\eta < \infty, \quad t > 0;$$

2) *существует такое число $k > 0$, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,\eta) + kK(t,\eta) \leqslant 0, \quad t > 0, \quad \eta > 0; \tag{9}$$

3) *определена матрица $P(t)$ из (5), при этом*

$$\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds > 0, \tag{10}$$

где $\gamma(t)$ определена в (6).

Тогда для решения начальной задачи (4) с ограниченными начальными данными из множества $\mathbb{E} = \{\varphi \in C(-\infty, 0) :\ v(0,\varphi) < r\}$, где r определён в (7), справедлива оценка

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \|H^{-1}(t)\| \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds\right) v(0,\varphi) \times$$

$$\times\left(1-v^{\omega/2}(0,\varphi)q\omega\int\limits_0^t\|H(\eta)\|^{1/2}\|H^{-1}(\eta)\|^{1/2+\omega/2}\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta\gamma(s)\,ds\right)\,d\eta\right)^{-2/\omega}, \tag{11}$$

где $v(0,\varphi)$ *определён в* (8).

Доказательство. Выпишем производную функционала Ляпунова — Красовского (3) вдоль решения начальной задачи (4):

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=\left\langle\frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle+$$
$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t)+\int\limits_{-\infty}^t B(t,t-s)y(s)\,ds+\int\limits_{-\infty}^t F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right),y(t)\right\rangle+$$
$$+\left\langle H(t)y(t),A(t)y(t)+\int\limits_{-\infty}^t B(t,t-s)y(s)\,ds+\int\limits_{-\infty}^t F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle+$$
$$+\int\limits_0^\infty\langle K(0,s)y(t),y(t)\rangle\,ds-\int\limits_0^\infty\langle K(s,s)y(t-s),y(t-s)\rangle\,ds+$$
$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{t-\eta}^t\left\langle\frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\right\rangle\,dsd\eta.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=\left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)+\int\limits_0^\infty K(0,s)\,ds\right)y(t),y(t)\right\rangle+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^t\langle H(t)B(t,t-s)y(s),y(t)\rangle\,ds+\int\limits_{-\infty}^t\langle H(t)y(t),B(t,t-s)y(s)\rangle\,ds-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^t\langle K(t-s,t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds+2\mathrm{Re}\left\langle H(t)y(t),\int\limits_{-\infty}^t F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle+$$
$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{t-\eta}^t\left\langle\frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\right\rangle\,dsd\eta.$$

Используя представление

$$\langle C_1y_1,y_1\rangle+\langle C_2^*y_1,y_2\rangle+\langle C_2y_2,y_1\rangle+\langle C_3y_2,y_2\rangle=\langle(C_1-C_2C_3^{-1}C_2^*)y_1,y_1\rangle+$$
$$+\langle C_3^{-1}(C_2^*y_1+C_3y_2),C_2^*y_1+C_3y_2\rangle,\quad C_1=C_1^*,\,C_3=C_3^*>0,$$

и определение матрицы $P(t)$ из (5), имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y)=-\langle P(t)y(t),y(t)\rangle-\int\limits_{-\infty}^t\langle K^{-1}(t-s,t-s)z(t-s,t,s),z(t-s,t,s)\rangle\,ds+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(t)y(t), \int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\left\langle \frac{\partial}{\partial t}K(t-s,\eta)y(s),y(s)\right\rangle dsd\eta,$$

где $z(t-s,t,s) = K(t-s,t-s)y(s) - B^*(t,t-s)H(t)y(t)$. В силу определения $p_H(t)$, положительной определённости матрицы $K(t,s)$ и условия (9) получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -p_H(t)\langle H(t)y(t),y(t)\rangle - k\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{t-\eta}^{t}\langle K(t-s,\eta)y(s),y(s)\rangle\,dsd\eta +$$

$$+2\mathrm{Re}\left\langle H(t)y(t), \int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle.$$

Воспользуемся определением $\gamma(t)$ из (6) и функционала (3) и получим

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y) + 2\mathrm{Re}\left\langle H(t)y(t), \int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\rangle. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y) + 2\|H(t)\|^{1/2}\|H^{1/2}(t)y(t)\|\left\|\int\limits_{-\infty}^{t} F(t,s,y(t),y(s))\,ds\right\|.$$

В силу (2), (3) и неравенства $\|H^{-1}(t)\|^{-1}\|y(t)\|^2 \leqslant \langle H(t)y(t),y(t)\rangle$ имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y) + \beta(t)v(t,y)^{1+\omega/2}, \tag{13}$$

где

$$\beta(t) = 2q\|H(t)\|^{1/2}\|H^{-1}(t)\|^{1/2+\omega/2}. \tag{14}$$

Если $v(0,\varphi) = 0$, то в силу определения функционала (3) $\varphi \equiv 0$, следовательно, начальная задача (4) имеет нулевое решение, и оценка (11) выполнена. Считаем, что $v(0,\varphi) \neq 0$ и φ принадлежит множеству $\mathbb{E}$ из условия теоремы. Введём вспомогательную функцию

$$\rho(t) = \beta(t)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_{0}^{t}\gamma(s)\,ds\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)v^{\omega/2}(0,\varphi)} - \frac{\omega}{2}\int\limits_{0}^{t}\beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_{0}^{\eta}\gamma(s)\,ds\right)d\eta\right)^{-1}, \tag{15}$$

где $\varepsilon \in \left(0, \left(\frac{r}{v(0,\varphi)}\right)^{\omega/2} - 1\right)$, число r из (7). Отметим, что из определения множества $\mathbb{E}$ следует, что $\left(\frac{r}{v(0,\varphi)}\right)^{\omega/2} - 1 > 0$. Такой выбор числа ε гарантирует, что выражение в скобках в (15) всегда будет положительным и отделено от нуля. Действительно, с одной стороны, имеем неравенство

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)v^{\omega/2}(0,\varphi)} > r^{-\omega/2}, \tag{16}$$

с другой стороны, из неотрицательности функции $\beta(t)$ из (14) получим

$$\frac{\omega}{2}\int\limits_0^t \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta \leqslant \frac{\omega}{2}\int\limits_0^\infty \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta =$$

$$= \frac{\omega}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_{iT}^{(i+1)T} \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta.$$

В силу T-периодичности функции $\beta(t)$ из (14), T-периодичности функции $\gamma(t)$ из (6) имеем

$$\frac{\omega}{2}\int\limits_0^t \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta \leqslant \frac{\omega}{2}\int\limits_0^\infty \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta =$$

$$= \frac{\omega}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_0^T \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^{iT+\eta} \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta =$$

$$= \frac{\omega}{2}\int\limits_0^T \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta\sum_{i=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{i\omega}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right).$$

Из неравенства (10) следует, что ряд в правой части является суммой убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, в силу определения r из (7) получим

$$\frac{\omega}{2}\int\limits_0^t \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega}{2}\int\limits_0^\infty \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta = r^{-\omega/2}. \tag{17}$$

Из данного неравенства и (16) вытекает то, что выражение в скобках в (15) является положительным при $t > 0$ и отделено от нуля.

Выпишем некоторые свойства вспомогательной функции:

$$\rho(0) = (1+\varepsilon)\beta(0)v^{\omega/2}(0,\varphi), \tag{18}$$

$$\int\limits_0^t \rho(s)\,ds = -\frac{2}{\omega}\ln\left(1 - \frac{\omega(1+\varepsilon)v^{\omega/2}(0,\varphi)}{2}\int\limits_0^t \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta\right). \tag{19}$$

Неравенство (13) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -(\gamma(t)-\rho(t))v(t,y) - v(t,y)(\rho(t)-\beta(t)v(t,y)^{\omega/2}).$$

В силу (18) существует число $t' > 0$, такое, что при $t < t'$ выполнена оценка

$$\rho(t) - \beta(t)v(t,y)^{\omega/2} > 0, \tag{20}$$

следовательно, при $t < t'$ имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -(\gamma(t) - \rho(t))v(t,y).$$

Из данного неравенства вытекает следующая оценка:

$$v(t,y) \leqslant \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds + \int\limits_0^t \rho(s)\,ds\right) v(0,\varphi).$$

Воспользуемся формулой (19) и получим, что

$$v(t,y) \leqslant \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds\right) v(0,\varphi)\times$$

$$\times\left(1 - \frac{\omega(1+\varepsilon)v^{\omega/2}(0,\varphi)}{2}\int\limits_0^t \beta(\eta)\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(s)\,ds\right)\,d\eta\right)^{-2/\omega}. \qquad (21)$$

Докажем, что данное неравенство справедливо при всех $t > 0$. Предположим, что при $t = t'$ неравенство (20) нарушается и имеет место равенство $\rho(t') = \beta(t')v(t',y)^{\omega/2}$. Из (15) и оценки (21) вытекает неравенство $\varepsilon \leqslant 0$. Противоречие. Следовательно, неравенство (20) справедливо при всех $t > 0$. Из этого факта следует справедливость оценки (21) при всех $t > 0$. В силу произвольности ε оценка (21) верна при $\varepsilon = 0$. Из определения функционала Ляпунова — Красовского (3) и обозначения (14) вытекает справедливость неравенства (11). □

Замечание 1. Отметим, что оценка (11) характеризует экспоненциальное убывание решений начальной задачи (4). Следовательно, условия теоремы являются достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1). Множество $\mathbb{E}$ является множеством притяжения нулевого решения.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*, тогда для решения начальной задачи* (4) *с ограниченными начальными данными из множества* $\mathbb{E} = \{\varphi \in C(-\infty,0) : v(0,\varphi) < r\}$*, где* r *определено в* (7)*, справедлива оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant r\|H^{-1}(t)\|\exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(s)\,ds\right) v(0,\varphi)\left(r^{\omega/2} - v^{\omega/2}(0,\varphi)\right)^{-2/\omega}$$

где $\gamma(t)$ *определено в* (6)*,* $v(0,\varphi)$ *определено в* (8)*.*

Доказательство. Справедливость данного следствия вытекает из оценки (11), определения (14) и неравенства (17). □

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*, и для любой ограниченной функции* $z(t) \in C(-\infty,+\infty)$ *выполнено неравенство*

$$Re\left\langle H(t)z(t), \int\limits_{-\infty}^t F(t,s,z(t),z(s))\,ds\right\rangle \leqslant 0, \quad t > 0, \qquad (22)$$

тогда для любого решения начальной задачи (4) *справедлива оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \|H^{-1}(t)\| \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)\,ds\right) v(0,\varphi),$$

где $\gamma(t)$ *определено в* (6), $v(0,\varphi)$ *определено в* (8).

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 1, получим оценку (12). В силу неравенства (22) из оценки (12) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \leqslant -\gamma(t)v(t,y).$$

Из данной оценки получаем требуемое неравенство. □

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко и кандидату физико-математических наук М. А. Скворцовой за внимание к работе.

Заключение

В работе получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1), указаны оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание, и оценки на множество притяжения.

Список литературы

1. **Мышкис А. Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. : Ленанд, 2014.
2. **Красовский Н. Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959.
3. **Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.** Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. : Наука, 1971.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.
5. **Кореневский Д. Г.** Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев : Наукова думка, 1989.
6. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1991.
7. **Долгий Ю. Ф.** Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1996.
8. **Kolmanovskiĭ V. B., Myshkis A. D.** Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 1999.
9. **Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.** Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering. Boston : Birkhäuser, 2003.
10. **Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications. New York : Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M. I.** Stability of Neutral Functional Differential Equations. Paris : Atlantis Press, 2014.
12. **Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.** Некоторые признаки устойчивости линейных автономных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 55–63.
13. **Чудинов К. М.** Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Изв. вузов. Математика. 2014. № 4. С. 52–61.

14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, no. 302. P. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. Vol. 34. P. 747–773.
16. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
17. **Demidenko G. V.** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // Journal of Analysis and Applications. 2009. Vol. 7, no. 3. P. 119–130.
18. **Матвеева И. И.** Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
19. **Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.** Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
20. **Yskak T.** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25, no. 1–2. P. 97–108.
21. **Ыскак Т.** Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.
22. **Скворцова М. А., Ыскак Т.** Оценки решений дифференциальных уравнений с распределённым запаздыванием, описывающих конкуренцию нескольких видов микроорганизмов // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 4. С. 193–205.

Поступила в редакцию 10.07.2023.
После переработки 12.09.2023.

Сведения об авторе

Ыскак Тимур, научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: istima92@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 4. P. 542–552.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-542-552

STABILITY OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DISTRIBUTED DELAY

T. Yskak

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
istima92@mail.ru

The paper considers a certain class of systems of nonlinear differential equations with infinite distributed delay. It is assumed that the coefficients in the linear terms are T-periodic, the nonlinear term is a continuous Lipschitz-like vector function, whose the degree of smallness greater than one. Such systems of differential equations arise when modeling various processes occurring in biology, chemistry, physics, economics. The Lyapunov — Krasovskii functional is proposed, on the basis of which sufficient conditions for exponential stability of the zero solution of the class of systems under consideration are established, estimates for the set of attraction of the zero solution and estimates for the norm of the solution to the initial value problem characterizing exponential decrease at infinity are indicated. All parameters involved in the estimates are specified explicitly. The conditions of exponential stability of the zero solution established in the paper are expressed in terms of integral inequality. The conditions of global exponential stability of the zero solution are also obtained.

Keywords: *nonlinear equation, infinite distributed delay, exponential stability, estimates of solutions, Lyapunov — Krasovskii functional.*

References

1. **Myshkis A.D.** *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with retarded argument]. Moscow, Lenand Publ., 2014. (In Russ.).
2. **Krasovskii N.N.** *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford, Stanford University Press, 1963.
3. **El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.** *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments.* New York, Academic Press, 1973.
4. **Hale J.** *Theory of Functional Differential Equations.* New York, Springer, 1977.
5. **Korenevskiĭ D.G.** *Ustoychivost' dinamicheskikh sistem pri sluchaynykh vozmushcheniyakh parametrov. Algebraicheskiye kriterii* [Stability of dynamical systems under random perturbations of parameters. Algebraic criteria]. Kiev, Naukova Dumka, 1989. (In Russ.).
6. **Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.** *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations.* Atlanta, World Federation Publ., 1995.
7. **Dolgiĭ Yu.F.** *Ustoychivost' periodicheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Stability of periodic differential-difference equations]. Ekaterinburg, Ural State University, 1996. (In Russ.).
8. **Kolmanovskiĭ V.B., Myshkis A.D.** *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations.* Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1999.

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008).

9. **Gu K., Kharitonov V.L., Chen J.** *Stability of Time-Delay Systems. Control Engineering*. Boston, Birkhäuser, 2003.
10. **Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A.** *Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications*. New York, Springer-Verlag, 2012.
11. **Gil' M.I.** *Stability of Neutral Functional Differential Equations*. Paris, Atlantis Press, 2014.
12. **Sabatulina T.L., Malygina V.V.** Several stability tests for linear autonomous differential equations with distributed delay. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 6, pp. 52–60.
13. **Chudinov K.M.** Functional differential inequalities and estimation of the Cauchy function of an equation with aftereffect. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 44–51.
14. **Hatvani L.** Asymptotic stability of non-autonomous functional differential equations with distributed delays. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, no. 302, pp. 1–16.
15. **Faria T.** Stability for nonautonomous linear differential systems with infinite delay. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2022, vol. 34, pp. 747–773.
16. **Demidenko G.V. and Matveeva I.I.** Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 824–836.
17. **Demidenko G.V.,** Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. *Journal of Analysis and Applications*, 2009, vol. 7, no. 3, pp. 119–130.
18. **Matveeva I.I.** Estimates for solutions to one class of nonlinear delay differential equations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 557–566.
19. **Demidenko G.V., Matveeva I.I. and Skvortsova M.A.** Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 5, pp. 828–841.
20. **Yskak T.** Stability of solutions to systems of differential equations with distributed delay. *Functional Differential Equations*, 2018, vol. 25, no. 1–2, pp. 97–108.
21. **Yskak T.** Otsenki resheniy odnogo klassa sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy s raspredelyonnym zapazdyvaniyem [Estimates for solutions of one class to systems of nonlinear differential equations with distributed delay]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 2204–2215. (In Russ.).
22. **Skvortsova M.A., Yskak T.** Estimates of solutions to differential equations with distributed delay describing the competition of several types of microorganisms. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2022, vol. 16, pp. 800–808.

Article received 10.07.2023.
Corrections received 12.09.2023.