Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 4. С. 528–541.

УДК 517.95:517.97 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-528-541

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ БОКОВОЙ И ЛИЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Н. П. Лазарев[a], Д. Я. Никифоров[b], Н. А. Романова[c]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия
[a]nyurgun@ngs.ru, [b]dju92@mail.ru, [c]romnatan@mail.ru

Обоснована новая модель пластины Тимошенко, которая может контактировать боковой поверхностью или нижней кромкой лицевой поверхности (относительно выбранной системы координат) с жёстким препятствием заданной конфигурации. Недеформируемое препятствие задаётся цилиндрической поверхностью, образующие которой перпендикулярны срединной плоскости пластины, а также частью плоскости, которая параллельна срединной плоскости. Соответствующая вариационная задача формулируется в виде минимизации функционала энергии над невыпуклым множеством допустимых перемещений. Множество допустимых перемещений задаётся с учётом условия закрепления и условия непроникания. Условие непроникания задаётся в виде системы неравенств, описывающих два случая возможных контактов пластины и жёсткого препятствия. Именно эти два случая соответствуют разным типам контакта: боковым краем пластины и нижней кромкой пластины. Доказано существование решения задачи. В частном случае, когда зоны контакта заранее известны, получена эквивалентная дифференциальная постановка в предположении дополнительной регулярности решения вариационной задачи.

Ключевые слова: *контактная задача, невыпуклое множество, вариационное неравенство, условие непроникания.*

Введение

Контактные задачи для деформируемых твёрдых тел с условиями типа неравенств привлекают внимание учёных с середины XX века [1–3]. Задачи такого типа связаны с использованием граничных условий для перемещений, которые описывают непроникание. В частности, для подхода Синьорини предполагается, что заранее известны свойства перемещений для точек на внешней границе деформируемого твёрдого тела, где тело соприкасается в исходном состоянии с недеформируемым препятствием [4–6] или с другим деформируемым телом [7–11]. Следует отметить, что с помощью метода фиктивных областей [12–15] было установлено, что определённый класс контактных задач имеет качественную связь с задачами теории трещин с односторонними ограничениями на берегах трещины [16–25]. Новый класс контактных задач с невыпуклым множеством допустимых перемещений, описывающий точечный контакт, исследован в [26; 27].

В отличие от предыдущих работ (см. [13; 28; 29]), рассмотрена специальная конфигурация пластины Тимошенко и недеформируемого препятствия в исходном со-

Результаты первого раздела получены при поддержке государственного задания Минобрнауки России (НИР № FSRG-2023-0025). Результаты второго раздела получены Д. Я. Никифоровым при поддержке Минобрнауки России (соглашение от 16.02.2023 г., проект № 075-02-2023-947).

стоянии, которая предполагает, что пластина может контактировать с препятствием либо боковой частью, либо кромкой днища пластины (относительно выбранной вертикальной ориентации пластины). В этом случае мы накладываем условие, соответствующее двум возможным типам перемещений: первый тип соответствует неравенству для функции прогибов (вертикальных перемещений), второй тип ограничивает заданными неравенствами перемещения для прогибов, горизонтальных перемещений и углов поворота нормальных волокон. Соответствующая контактная задача формулируется в вариационном виде — ищется функция, доставляющая минимум функционала энергии над невыпуклым множеством. Установлена разрешимость нелинейной задачи о равновесии пластины, находящейся под воздействием внешних объёмных нагрузок. В частном случае, когда заранее известны типы контактных зон, т. е. когда на заданных двух кривых выполнены соответствующие соотношения, найдена эквивалентная дифференциальная постановка в предположении дополнительной регулярности решения вариационной задачи.

1. Контактная задача

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ, которая состоит из двух кривых $\Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1$, $\mathrm{mes}(\Gamma_0) > 0$. Для удобства предположим, что $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = g(x_2),\ x_2 \in [a, b]\}$, где g — заданная функция, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичную внешнюю нормаль к Γ. Для простоты предположим, что пластина имеет постоянную толщину $2h$. Соотнесём трёхмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$ с множеством $\{\Omega\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, соответствующим срединной плоскости пластины.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (U, u)$ вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $U = (u_1, u_2)$ и u горизонтальные (вдоль плоскости (x_1, x_2)) и вертикальные перемещения соответственно. Углы поворота нормальных сечений обозначим через $\phi = \phi(x) = (\phi_1, \phi_2)$. Тензоры, описывающие деформацию пластины, $\varepsilon(\phi) = \{\varepsilon_{ij}(\phi)\}$, $\varepsilon(U) = \{\varepsilon_{ij}(U)\}$, $i, j = 1, 2$, выражаются следующими формулами [30]:

$$\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\Big), \quad \varepsilon_{ij}(U) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big),\ i, j = 1, 2.$$

Для моментов $m(\phi) = \{m_{ij}(\phi)\}$ и усилий $\sigma(U) = \{\sigma_{ij}(U)\}$, $i, j = 1, 2$, имеют место равенства $m_{ij}(\phi) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi)$, $\sigma_{ij}(U) = 3h^{-2}c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(U)$, где ненулевые коэффициенты тензора c_{ijkl} определяются соотношениями:

$$c_{iiii} = D,\ c_{iijj} = D\kappa,\ c_{ijij} = c_{ijji} = D(1-\kappa)/2,\ i, j = 1, 2,\ i \neq j.$$

Здесь D — цилиндрическая жёсткость пластины, $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ — коэффициент Пуассона [30]. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Поперечные силы находятся по формулам $q_i = q_i(u, \phi) = \Lambda(u_{,i} + \phi_i)$, $i = 1, 2$, где $\Lambda = 2k'Gh$, k' — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины [30]; $v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$. Считаем, что D, κ, Λ — постоянные. Определим билинейную форму $B(\cdot,\cdot)$ с помощью интеграла:

$$B(\xi, \eta) = \int\limits_{\Omega} b(\xi, \eta)dx, \quad \text{где} \quad \xi = (U, u, \phi), \quad \eta = (W, w, \psi),$$

$$b(\xi, \eta) = \big\{\sigma_{ij}(U)\,\varepsilon_{ij}(W) + m_{ij}(\phi)\,\varepsilon_{ij}(\psi) + q_i(u, \phi)(w_{,i} + \psi_i)\big\}.$$

Функционал потенциальной энергии деформированной пластины, занимающей область Ω, имеет следующий вид:

$$\Pi(\Omega, \eta) = \frac{1}{2} B(\eta, \eta) - \int_{\Omega} F\eta dx\,, \quad \eta = (W, w, \psi),$$

где $F\eta = f_i w_i + f_3 w + f_{3+i}\psi_i$, вектор $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in L^2(\Omega)^5$ описывает воздействие на пластину заданных внешних нагрузок [30].

Считаем, что на части внешней границы Γ_0 выполнены следующие краевые условия:

$$w = 0, \quad \psi = W = (0, 0) \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{1}$$

В соответствии с условиями закрепления (1) введём пространство Соболева $H^1(\Omega)$ и его подпространство $H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)$, состоящее из всех функций, след которых обращается в нуль на части внешней границы Γ_0. Примем следующие обозначения: $H(\Omega) = H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)^5$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H(\Omega)}$. Гладкость границы области Ω и условие (1) обеспечивают возможность применения неравенства Корна и обобщённого неравенства Пуанкаре [4], с помощью которых можно вывести оценку $B(\eta, \eta) \geqslant c\|\eta\|^2$, где постоянная $c > 0$ не зависит от $\eta \in H(\Omega)$ [31].

Перейдём к описанию недеформируемого препятствия. Препятствие имеет специальную форму, такую, что пластина может контактировать с ним либо по боковой части, либо нижней поверхностью пластины (краем днища) — в зависимости от значений функции прогибов w. С помощью цилиндрической поверхности

$$\{(x_1, x_2, z) \mid (x_1, x_2) \in \Gamma_1,\ z \in (-\infty, -h]\}$$

будем задавать ту часть препятствия, где пластина может контактировать своей внешней боковой частью, а поверхность

$$\{(x_1, x_2, z) \mid x_1 \leqslant \psi(x_2),\ x_2 \in [a, b],\ z = -h\,\},$$

лежащая на плоскости $z = -h$, ограничивает вертикальные перемещения пластины (прогибы). Кроме того, мы предполагаем, что в исходном состоянии упругая пластина касается препятствия частью боковой границы, которая соответствует кривой Γ_1, как это показано на рис. 1, a.

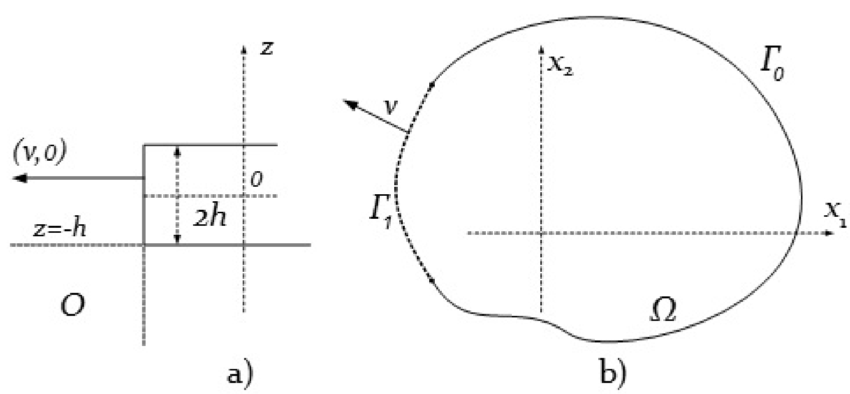

Рис. 1. a) поперечное сечение пластины и препятствия O;
б) срединная плоскость пластины

На Γ_1 зададим следующее условие, описывающее непроникание точек пластины в неподвижное препятствие. Потребуем, чтобы было выполнено хотя бы одно из соотношений

$$w \geqslant 0 \quad \text{или} \quad w \leqslant 0 \quad \text{одновременно с} \quad W\nu - h\psi\nu \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{2}$$

где $W\nu = w_i\nu_i$, $\psi\nu = \psi_i\nu_i$. Стоит отметить, что согласно (2) функция $\eta = (W, w, \psi)$ либо удовлетворяет $w \geqslant 0$ на Γ_1, либо двум последним неравенствам в (2) или же всем трём неравенствам (2) одновременно.

Теперь мы можем ввести следующее множество допустимых функций:

$$K = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \,|\, \eta \text{ удовлетворяет } (2)\}.$$

Заметим, что K не является выпуклым множеством, так как для некоторого $\alpha > 0$ мы можем построить функции $\tilde{\eta} = (\tilde{W}, \tilde{w}, \tilde{\psi}) \in K$ и $\hat{\eta} = (\hat{W}, \hat{w}, \hat{\psi}) \in K$ со свойствами

$$\tilde{w} < -\alpha, \quad -\frac{\alpha}{2} < \tilde{W}\nu - h\tilde{\psi}\nu \leqslant 0, \quad \frac{\alpha}{2} > \hat{w} > 0, \quad \hat{W}\nu - h\hat{\psi}\nu > \alpha \quad \text{на} \quad \gamma \subset \Gamma_1,$$

где $\mathrm{mes}(\gamma) > 0$. Очевидно, что функция $\eta_s = \frac{1}{2}(\tilde{\eta} + \hat{\eta})$, $\eta_s = (W_s, w_s, \psi_s)$ не принадлежит множеству K, поскольку $w_s \leqslant 0$ и $W_s\nu - h\psi_s\nu > 0$ на γ. Сформулируем вариационную постановку задачи о равновесии пластины. Требуется найти функцию $\xi = (U, u, \phi) \in K$, такую, что

$$\Pi(\xi) = \inf_{\eta \in K} \Pi(\eta). \tag{3}$$

Теорема 1. *Задача* (3) *имеет решение.*

Доказательство. Установим существование решения задачи в соответствии с теоремой Вейерштрасса [32]. Хорошо известно, что функционал энергии обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу на $H(\Omega)$ [31]. Сначала докажем, что множество K слабо замкнуто. Пусть произвольная последовательность $\{\eta_n\} \subset K$ имеет свойство слабой сходимости $\eta_n \to \eta$ в $H(\Omega)$, где η — некоторая функция пространства $H(\Omega)$. На основе слабой сходимости $\eta_n \to \eta$ в $H(\Omega)$, в силу теорем вложения, теоремы о следах, а также теоремы о выделении из последовательности, сходящейся в $L^2(\Gamma)$, подпоследовательности, которая сходится почти всюду на Γ, отсюда следует, что существует подпоследовательность $\{\eta_n\}$, обозначаемая прежним образом, которая сходится к η п. в. на Γ. Докажем, что предельная функция η также принадлежит K. Действительно, для $\eta_n = (W_n, w_n, \psi_n)$ имеем следующие соотношения:

$$w_n \geqslant 0 \quad \text{или} \quad w_n \leqslant 0 \quad \text{одновременно с} \quad W_n\nu - h\psi_n\nu \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \backslash B,$$

выполняющиеся в каждой точке $\Gamma_1 \backslash B$, $\mathrm{mes}(B) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для каждого фиксированного $x \in \Gamma_1 \backslash B$ получим, что

$$w_n(x) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad w_n(x) \leqslant 0 \quad \text{одновременно с} \quad W_n(x)\nu - h\psi_n\nu \leqslant 0.$$

Должна существовать либо подпоследовательность $\{\eta_{n_k}\} \subset \eta_n$, для которой имеем $w_{n_k}(x) \geqslant 0$, либо существует подпоследовательность $\{\eta_{n_m}\}$ со следующим свойством:

$$w_{n_m}(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad W_{n_m}(x)\nu - h\psi_{n_m}(x)\nu \leqslant 0.$$

В обоих случаях можно перейти к пределу в соответствующих неравенствах. В результате получаем для предельной функции η следующие соотношения: $w(x) \geqslant 0$ для случая подпоследовательности $\{\eta_{n_k}\}$ и

$$w(x) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad W(x)\nu - h\psi(x)\nu \leqslant 0$$

для случая подпоследовательности $\{\eta_{n_m}\}$. Заметим: существование обеих подпоследовательностей $\{\eta_{n_m}\}$ и $\{\eta_{n_k}\}$ с указанными свойствами означает, что

$$w(x) = 0 \quad \text{и} \quad W(x)\nu - h\psi\nu \leqslant 0.$$

Поскольку точка $x \in \Gamma_1 \backslash B$ является произвольной, получаем, что для предельной функции η выполняется условие (2). Следовательно, множество K слабо замкнуто в $H(\Omega)$. Наконец, для задачи (3) выполняются условия теоремы Вейерштрасса как для функционала $\Pi(\eta)$, так и для множества допустимых функций K. Это означает, что задача (3) имеет хотя бы одно решение. □

2. Дифференциальная постановка для частного случая известных зон контакта

В этом разделе мы рассмотрим частный случай, когда заранее известны типы контактных зон. Предположим, что кривая Γ_1 состоит из непересекающихся кривых Γ_1^e и Γ_1^b. Мы предполагаем, что на Γ_1^e выполнены неравенства

$$w \leqslant 0 \quad \text{и} \quad W\nu - h\psi\nu \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1^e, \tag{4}$$

описывающие контакт бокового края пластины, а на остальной части Γ_1^b кривой Γ_1 справедливо условие

$$w \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1^b, \tag{5}$$

что соответствует контакту кромки днища пластины с жёстким препятствием. Введём новое множество допустимых функций:

$$K_2 = \{\eta = (W, w, \psi) \in H(\Omega) \,|\, \eta \text{ удовлетворяет } (4), (5)\}.$$

Очевидно, что множество K_2 выпукло и замкнуто. Выпуклость множества K_2 позволяет представить задачу минимизации

$$\Pi(\xi) = \inf_{\eta \in K_2} \Pi(\eta) \tag{6}$$

в виде эквивалентного вариационного неравенства [4]

$$\xi \in K_2, \quad B(\xi, \eta - \xi) \geqslant \int\limits_{\Omega} F(\eta - \xi) dx \quad \forall\, \eta \in K_2. \tag{7}$$

Предположим, что решение $\xi = (U, u, \phi) \in K_2$ достаточно гладкое. Далее применим формулы Грина [4]

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U)\, \varepsilon_{ij}(W) dx = -\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij,j}(U) w_i \, dx + \int\limits_{\Gamma} \Big(\sigma_\nu(U) W\nu + \sigma_\tau(U) W\tau \Big) d\Gamma$$

для функций $\eta = (W, w, \psi) \in K_2$, где

$$W\nu = w_i \nu_i, \quad \sigma_\nu(U) = \sigma_{ij}(U)\nu_i\nu_j,$$

$$\tau = (-\nu_2, \nu_1), \quad \sigma_\tau(U) = (\sigma_\tau^1(U), \sigma_\tau^2(U)) = (\sigma_{1j}(U)\nu_j, \sigma_{2j}(U)\nu_j) - \sigma_\nu(U)\nu,$$
$$W\tau = (W_\tau^1, W_\tau^2), \quad w_i = (W\nu)\nu_i + W_\tau^i, \quad i = 1, 2.$$

Аналогично для произвольных $\psi \in H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)^2$, $w \in H^{1,0}_{\Gamma_0}(\Omega)$ справедливы формулы

$$\int\limits_{\Omega} m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx = -\int\limits_{\Omega} m_{ij,j}(\phi)\psi_i dx + \int\limits_{\Gamma}\big(m_\nu(\phi)\psi_\nu + m_{\tau i}(\phi)\psi_{\tau i}\big)d\Gamma,$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla w dx = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot w d\Gamma - \int\limits_{\Omega} w \triangle u dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \phi \nabla w dx = \int\limits_{\Gamma} \phi_\nu \cdot w d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \phi_{i,i} w dx, \tag{8}$$

где величины $m_\nu(\phi)$, $m_{\tau i}(\phi)$, $i = 1, 2$, определяются аналогично предыдущим формулам, записанным для $\sigma_\nu(W)$, $\sigma_{\tau i}(W)$, $i = 1, 2$, см. формулу (10). Наряду с вариационной постановкой задача (6) допускает соответствующую дифференциальную постановку, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если предположить, что решение $\xi = (U, u, \phi)$ достаточно гладкое, то вариационная задача* (6) *эквивалентна следующей краевой задаче:*

$$-m_{ij,j}(\phi) + q_i(u, \phi) = f_{3+i} \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{9}$$

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{10}$$

$$-q_{i,i}(u, \phi) = f_3 \text{ в } \Omega, \tag{11}$$

$$\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) \leqslant 0,\ u \leqslant 0,\ \sigma_\nu(U) \leqslant 0,\ \sigma_\nu(U) + \frac{1}{h} m_\nu(\phi) = 0 \text{ на } \Gamma_1^e, \tag{12}$$

$$m_\tau(\phi) = \sigma_\tau(U) = (0, 0),\ U\nu - h\phi\nu \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^e, \tag{13}$$

$$m_\tau(\phi) = \sigma_\tau(U) = (0, 0),\, \sigma_\nu(U) = m_\nu(\phi) = 0,\, \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) \geqslant 0,\, u \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^b, \tag{14}$$

$$\sigma_\nu(U)U\nu + m_\nu(\phi)\phi\nu + \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) u = 0 \text{ на } \Gamma_1^e,\ \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) u = 0 \text{ на } \Gamma_1^b, \tag{15}$$

$$u = 0,\ U = \phi = (0, 0) \text{ на } \Gamma_0. \tag{16}$$

Доказательство. Подставляя тестовую функцию $\bar\eta = \xi \pm \eta$, такую, что $\eta = (W, w, \psi) \in C_0^\infty(\Omega)^5$, в (7), получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega}\Big(m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi)dx + \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) + q_i(u, \phi)(w_{,i} + \psi_i)\Big)dx = \int\limits_{\Omega} F\eta dx.$$

Это означает, что уравнения равновесия

$$-m_{ij,j}(\phi) + q_i(u, \phi) = f_{3+i} \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{17}$$

$$-\sigma_{ij,j}(U) = f_i \text{ в } \Omega,\ i = 1, 2, \tag{18}$$

$$-q_{i,i}(u, \phi) = f_3 \text{ в } \Omega, \tag{19}$$

выполняются в смысле распределений.

Применяя формулы Грина в (7) и используя (17)–(19), можно показать, что

$$\int\limits_{\Gamma}\Big(\sigma_\nu(U)(W - U)\nu + \sigma_\tau(U)(W - U)\tau + m_\nu(\phi)(\psi - \phi)\nu +$$

$$+m_\tau(\phi)(\psi-\phi)\tau+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu)(w-u)\right)d\Gamma\geqslant 0\ \forall\,\eta=(W,w,\psi)\in K_2. \tag{20}$$

Поскольку K — выпуклый конус в $H(\Omega)$, можно заменить $\eta=\lambda\xi$ в (20) и сделать вывод о том, что имеют место соотношения

$$\int\limits_\Gamma\left(\sigma_\nu(U)U\nu+\sigma_\tau(U)U\tau+m_\nu(\phi)\phi\nu+m_\tau(\phi)\phi\tau+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)u\right)d\Gamma=0, \tag{21}$$

$$\int\limits_\Gamma\left(\sigma_\nu(U)W\nu+\sigma_\tau(U)W\tau+m_\nu(\phi)\psi\nu+m_\tau(\phi)\psi\tau+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)w\right)d\Gamma\geqslant 0 \tag{22}$$

для всех $\eta=(W,w,\psi)\in K_2$.

Предположим, что $\eta=(W,w,\psi)\in K_2$ и $\eta=0$ (здесь и далее для удобства нулевой пятикомпонентный вектор $(0,0,0,0,0)$ записываем через 0) на Γ_1^b. В этом случае мы можем переписать (22) следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\sigma_\nu(U)W\nu+\sigma_\tau(U)W\tau+m_\nu(\phi)\psi\nu+m_\tau(\phi)\psi\tau+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)w\right)d\Gamma\geqslant 0. \tag{23}$$

Поскольку значения $W\tau$ и $\psi\tau$ не входят в неравенство (4), в силу произвольности $W\tau$ и $\psi\tau$ на Γ_1^e заключаем, что $m_\tau(\phi)=\sigma_\tau(U)=(0,0)$ на Γ_1^e. Следовательно, мы можем привести (23) к виду

$$\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\sigma_\nu(U)W\nu+m_\nu(\phi)\psi\nu+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)w\right)d\Gamma\geqslant 0 \tag{24}$$

для всех $\eta=(W,w,\psi)\in K_2$ и $\eta=0$ на Γ_1^b. Выбирая в неравенстве (24) функции $\eta=(W,w,\psi)$, такие, что $W=0$, $\psi\nu=0$ на Γ_1^e, получаем

$$\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)\leqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^e.$$

Рассматривая (24) с тестовыми функциями, удовлетворяющими равенствам $w=0$, $W\nu-h\psi\nu=0$ на Γ_1^e, находим

$$\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\sigma_\nu(U)W\nu+\frac{1}{h}m_\nu(\phi)W\nu\right)d\Gamma\geqslant 0.$$

Отсюда, поскольку значение $W\nu$ может быть произвольным, получаем

$$\sigma_\nu(U)+\frac{1}{h}m_\nu(\phi)=0 \text{ на } \Gamma_1^e.$$

Последнее равенство позволяет представить (24) для функций $\eta=(W,w,\psi)$ со свойством $w=0$ на Γ_1^e в виде

$$\int\limits_{\Gamma_1^e}\sigma_\nu(U)\Big(W\nu-h\psi\nu\Big)\,d\Gamma\geqslant 0.$$

Отсюда в силу условной произвольности разности $(W\nu - h\psi\nu)$ следует, что

$$\sigma_\nu(U) \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^e.$$

На Γ_1^b также можно получить дополнительные соотношения. Для этого рассмотрим неравенство (22) для $\eta \in K_2$, удовлетворяющих равенству $\eta = 0$ на Γ_1^e. В этом случае имеем $w \geqslant 0$ на Γ_1^b и

$$\int\limits_{\Gamma_1^b} \left(\sigma_\nu(U) W\nu + \sigma_\tau(U) W\tau + m_\nu(\phi)\psi\nu + m_\tau(\phi)\psi\tau + \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) w \right) d\Gamma \geqslant 0 \quad (25)$$

для всех $\eta = (W, w, \psi) \in K_2$, $\eta = 0$ на Γ_1^e. Откуда ввиду произвольности значений W, ψ на Γ_1^b получаем равенства $\sigma_\tau(U) = m_\tau(\phi) = (0,0)$, $\sigma_\nu(U) = m_\nu(\phi) = 0$ на Γ_1^b. С учётом этих соотношений упростим неравенство (25) к виду

$$\int\limits_{\Gamma_1^b} \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) w \, d\Gamma \geqslant 0,$$

отсюда

$$\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^b.$$

Вернёмся теперь к рассмотрению равенства (21). Заметим, что в силу того, что $\xi = (U, u, \phi) \in K_2$, и выявленных соотношений

$$\sigma_\nu(U) \leqslant 0, \; \sigma_\nu(U) + \frac{1}{h} m_\nu(\phi) = 0, \quad \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) \leqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^e,$$

а также с учётом соотношений

$$\sigma_\tau(U) = m_\tau(\phi) = (0,0), \; \sigma_\nu(U) = m_\nu(\phi) = 0, \quad \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_1^b$$

получаем, что соответствующее подынтегральное выражение (21) неотрицательно п.в. на Γ. Таким образом, мы получаем равенства

$$\sigma_\nu(U) U\nu + m_\nu(\phi)\phi\nu + \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) u = 0 \text{ на } \Gamma_1^e, \quad \Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \phi\nu\right) u = 0 \text{ на } \Gamma_1^b.$$

Обратно, чтобы получить из (9)–(16) вариационное неравенство (7), умножим равенства (9) для каждого $i = 1, 2$ на соответствующие разности $\psi_i - \phi_i$, равенства (10) — на соответствующие разности $u_i - w_i$, а также (11) — на $w - u$, где $W = (w_1, w_2)$, w, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такие, что $\eta = (W, w, \psi) \in K_2$. Затем после интегрирования полученных равенств по Ω и суммирования находим

$$-\int\limits_\Omega \Big(\sigma_{ij,j}(U)(w_i - u_i) + m_{ij,j}(\phi)(\psi_i - \phi_i) - q_i(u,\phi)(\psi_i - \phi_i) + q_{i,i}(w - u) \Big) dx = \int\limits_\Omega F(\eta - \xi) dx.$$

Применяя далее формулы Грина, получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\sigma_{ij}(U)\,\varepsilon_{ij}(W-U)dx+m_{ij}(\phi)\varepsilon_{ij}(\psi-\phi)+q_i\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}+\psi_i-\frac{\partial u}{\partial x_i}-\phi_i\right)\right)dx-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\Big(\sigma_\nu(U)(W\nu-U\nu)-\sigma_\tau(U)(W\tau-U\tau)\Big)d\Gamma-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\Big(m_\nu(\phi)(\psi\nu-\phi\nu)-m_\tau(\phi)(\psi\tau-\phi\tau)\Big)d\Gamma-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\left(\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)(w-u)\right)d\Gamma=\int\limits_{\Omega}F(\eta-\xi)dx. \tag{26}$$

Учитывая, что $\sigma_\tau(U)=m_\tau(\phi)=(0,0)$ на Γ_1, $\xi=\eta=0$ на Γ_0, можно представить сумму интегралов по Γ в левой части (26) следующим образом:

$$I=-\int\limits_{\Gamma_1}\left(\sigma_\nu(U)(W\nu-U\nu)+m_\nu(\phi)(\psi\nu-\phi\nu)+\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)(w-u)\right)d\Gamma. \tag{27}$$

Затем, учитывая равенства $\sigma_\nu(U)=m_\nu(\phi)=0$ на Γ_1^b, мы можем переписать (27) в виде суммы

$$I=-\int\limits_{\Gamma_1^b}\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)(w-u)d\Gamma-$$
$$-\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)(w-u)+m_\nu(\phi)(\psi-\phi)+\sigma_\nu(U)(W\nu-U\nu)\right)d\Gamma=$$
$$=-\int\limits_{\Gamma_1^b}\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)wd\Gamma-\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)w+\sigma_\nu(U)\big(W\nu-h\psi\nu\big)\right)d\Gamma+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_1^e}\left(\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)u+\sigma_\nu(U)U\nu+m_\nu(\phi)\phi\right)d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_1^b}\Lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+\phi\nu\right)ud\Gamma\,.$$

Заметим, что каждый член последней суммы неположителен ввиду принадлежности η множеству K_2 и соотношений (12)–(15). Остаётся заметить, что поскольку $I\geqslant 0$, равенство (26) даёт вариационное неравенство (7). Теорема доказана.

□

Список литературы

1. **Signorini A.** Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. 1959. Vol. 18, no. 5. P. 95–139.
2. **Fichera G.** Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In: Handbook der Physik, Band 6a/2. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1972.
3. **Dal Maso G., Paderni G.** Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1988. Vol. 153. P. 203–227.
4. **Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.** Analysis of Cracks in Solids. Southampton, Boston : WIT-Press, 2000.

5. **Rademacher A., Rosin K.** Adaptive optimal control of Signorini's problem // Computational Optimization and Applications. 2018. Vol. 70. P. 531–569.
6. **Lazarev N., Rudoy E.** Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 403. P. 113710.
7. **Хлуднев А. М., Хоффман К., Боткин Н. Д.** Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 707–717.
8. **Рудой Е. М., Хлуднев А. М.** Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. XII, № 2. С. 120–130.
9. **Фурцев А. И.** О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111.
10. **Фурцев А. И.** Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 364–379.
11. **Pyatkina E. V.** A Contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Vol. 17. P. 1797–1815.
12. **Степанов В. Д., Хлуднев А. М.** Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 707–717.
13. **Lazarev N. P., Itou H., Neustroeva N. V.** Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2016. Vol. 33, no. 1. P. 63–80.
14. **Николаева Н. А.** Метод фиктивных областей в задаче Синьорини о равновесии пластины Кирхгофа — Лява // Вестн. НГУ: Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 3. Р. 78–90.
15. **Лазарев Н. П., Эверстов В. В., Романова Н. А.** Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Кирхгофа — Лява с условиями непроникания для известной конфигурации изгиба // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер.: Математика и физика. 2019. Т. 12, № 6. С. 674–686.
16. **Knees D., Schroder A.** Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2012. Vol. 35. P. 1859–1884.
17. **Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.** Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Vol. 13. P. 395–410.
18. **Itou H., Kovtunenko V. A., Rajagopal K. R.** Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration // Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. Vol. 22, no. 6. P. 1334–1346.
19. **Itou H., Kovtunenko V. A., Rajagopal K. R.** Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress // International Journal of Engineering Science. 2019. Vol. 136. P. 17–25.
20. **Furtsev A., Itou H., Rudoy E.** Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 182–183. P. 100–111.
21. **Лазарев Н. П., Семенова Г. М.** Задача о равновесии пластины Тимошенко с геометрически нелинейным условием непроникания для вертикальной трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 65–76.
22. **Khludnev A.** T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2021. Vol. 393. P. 113540.
23. **Khludnev A., Fankina I.** Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2021. Vol. 72, no. 3. P. 121.

24. **Kovtunenko V. A.** Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 405. P. 113953.
25. **Kovtunenko V. A., Itou H., Khludnev A. M., et al.** Non-smooth variational problems and applications // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2022. Vol. 380. P. 20210364.
26. **Лазарев Н. П., Федотов Е. Д.** Трёхмерная задача типа Синьорини для композитных тел, контактирующих острыми гранями жёстких включений // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 412–423.
27. **Lazarev N. P., Kovtunenko V. A.** Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 2. P. 250.
28. **Лазарев Н. П.** Метод фиктивных областей в задаче о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с жёстким препятствием // Вестн. НГУ: Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 1. P. 91–104.
29. **Лазарев Н. П.** Задача о равновесии пластины Тимошенко, контактирующей с наклонным препятствием // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 3. С. 68–75.
30. **Пелех Б. Л.** Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев : Наукова думка, 1973.
31. **Лазарев Н. П.** Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 32–43.
32. **Baiocchi C., Capello A.** Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems. New York : Wiley, 1984.

Поступила в редакцию 29.05.2023.
После переработки 05.08.2023.

Сведения об авторах

Лазарев Нюргун Петрович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института математики, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: nyurgun@ngs.ru.

Никифоров Дьулустан Яковлевич, младший научный сотрудник Якутского отделения Регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований», Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: dju92@mail.ru.

Романова Наталья Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Алгебра, геометрия, математический анализ и дифференциальные уравнения», Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; e-mail: romnatan@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 4. P. 528–541.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-528-541

EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A TIMOSHENKO PLATE CONTACTING BY THE SIDE AND FACE SURFACES

N.P. Lazarev[a], **D.Y. Nikiforov**[b], **N.A. Romanova**[c]

North Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
[a]*nyurgun@ngs.ru*, [b]*dju92@mail.ru* [c]*romnatan@mail.ru*

A new model for a Timoshenko plate contacting by the side surface or the edge of the bottom surface (with respect to the chosen coordinate system) with a rigid obstacle of a given configuration is justified. The non-deformable obstacle is defined by a cylindrical surface, the generators of which are perpendicular to the middle plane of the plate, as well as by a part of the plane that is parallel to the middle plane of the plate. A corresponding variational problem is formulated as a minimization of an energy functional over a non-convex set of admissible displacements. The set of admissible displacements is defined taking into account a condition of fixing and a nonpenetration condition. The nonpenetration condition is given as a system of inequalities describing two cases of possible contacts of the plate and the rigid obstacle. Namely, these two cases correspond to different types of contacts by the plate side edge and by the edge of the plate bottom surface. The solvability of the problem is established. In particular case, when contact zones is previously known, an equivalent differential statement is found under the assumption of additional regularity for the solution to the variational problem.

Keywords: *contact problem, non-convex set, variational inequality, nonpenetration condition.*

References

1. **Signorini A.** Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, 1959, vol. 18, no. 5, pp. 95–139. (In Italian).
2. **Fichera G.** Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In: *Handbook der Physik*, Band 6a/2. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972.
3. **Dal Maso G., Paderni G.** Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1988, vol. 153, pp. 203–227.
4. **Khludnev A.M., Kovtunenko V.A.** *Analysis of Cracks in Solids.* Southampton, Boston, WIT-Press, 2000.
5. **Rademacher A., Rosin K.** Adaptive optimal control of Signorini's problem. *Computational Optimization and Applications*, 2018, vol. 70, pp. 531–569.
6. **Lazarev N., Rudoy E.** Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 403, p. 113710.
7. **Khludnev A.M., Hoffmann K., Botkin N.D.** The variational contact problem for elastic objects of different dimensions. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, pp. 584–593.
8. **Rudoi E.M., Khludnev A.M.** Unilateral contact of a plate with a thin elastic obstacle. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2010, vol. 4, no. 3, pp. 389–398.
9. **Furtsev A.I.** On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 237, no. 4, pp. 530–545.

The results of the first section were obtained with the support of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia (Research No. FSRG-2023-0025). The results of the second section were obtained by D. Y. Nikiforov with the support of the Ministry of Education and Science of Russia (agreement dated 02/16/2023, project No. 075-02-2023-947).

10. **Furtsev A.I.** The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 364–379.
11. **Pyatkina E.V.** A Contact of two elastic plates connected along a thin rigid inclusion. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 1797–1815.
12. **Stepanov V.D., Khludnev A.M.** The method of fictitious domains in the Signorini problem. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, no. 6, pp. 1061–1074.
13. **Lazarev N.P., Itou H., Neustroeva N.V.** Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2016, vol. 33, no. 1, pp. 63–80.
14. **Nikolaeva N.A.** Method of fictitious domains for Signorini's problem in Kirchhoff–Love theory of plates. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 221, no. 6, pp. 872–882.
15. **Lazarev N.P., Everstov V.V., Romanova N.A.** Fictitious domain method for equilibrium problems of the Kirchhoff-Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of plate edges. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2019, vol. 12, no. 6, pp. 674–686.
16. **Knees D., Schroder A.** Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2012, vol. 35, pp. 1859–1884.
17. **Rudoy E.M., Shcherbakov V.V.** Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 395–410.
18. **Itou H., Kovtunenko V.A., Rajagopal K.R.** Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1334–1346.
19. **Itou H., Kovtunenko V.A., Rajagopal K.R.** Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 136, pp. 17–25.
20. **Furtsev A., Itou H., Rudoy E.** Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical Analysis and Numerical Simulation. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 182–183, pp. 100–111.
21. **Lazarev N.P., Semenova G.M.** Equilibrium problem for a Timoshenko plate with a geometrically nonlinear condition of nonpenetration for a vertical crack. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2020, vol. 14, no. 3, pp. 532–540.
22. **Khludnev A.** T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 393, pp. 113540.
23. **Khludnev A., Fankina I.** Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2021, vol. 72, no. 3, p. 121.
24. **Kovtunenko V.A.** Poroelastic medium with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture: Variational inequality and its semidiscretization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2022, vol. 405, p. 113953.
25. **Kovtunenko V.A., Itou H., Khludnev A.M., et al.** Non-smooth variational problems and applications. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, vol. 380, p. 20210364.
26. **Lazarev N.P., Fedotov E.D.** Three-dimensional Signorini-type problem for composite bodies contacting with sharp edges of rigid inclusions. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2022, vol. 7, iss. 4. pp. 412–423.
27. **Lazarev N.P., Kovtunenko V.A.** Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, p. 250.
28. **Lazarev N.P.** Equilibrium problem for a Timoshenko plate contacting with an inclined obstacle // Mathematical Notes of NEFU, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 68–75.

29. **Lazarev N.P.** Fictitious domain method in the equilibrium problem for a Timoshenko-type plate contacting with a rigid obstacle. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 203, no. 4, pp. 527–539.
30. **Pelekh B.L.** *Teoriya obolochek s konechnoy sdvigovoy zhestkost'yu* [Theory of shells with finite shear modulus]. Kiev, Naukova Dumka, 1973. (In Russ.).
31. **Lazarev N.P.** An equilibrium problem for a Timoshenko plate with a through crack *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 32–43.
32. **Baiocchi C., Capello A.** *Variational and Quasivariational Inequalities: Application to Free Boundary Problems.* New York, Wiley, 1984.

Article received 29.05.2023.
Corrections received 05.08.2023.