Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 4. С. 516–527.

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-516-527

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов[1,a], **Х. Кенжебай**[2,b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
[a] *kozhanov@math.nsc.ru*, [b] *kanat_1083@mail.ru*

Изучаются новые нелокальные краевые задачи с интегро-дифференциальным граничным условием для нестационарных дифференциальных уравнений соболевского типа четвёртого порядка. Особенностью изучаемых задач является то, что в них в граничном условии содержатся производные как по пространственным переменным, так и по временно́й переменной. Для исследуемых задач доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: *уравнение составного типа, уравнение соболевского типа, интегро-дифференциальные граничные условия, нелокальная задача, регулярное решение, существование решения, единственность решения.*

Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости новых нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Au) + Bu = f(x,t), \tag{1}$$

в которых A и B есть дифференциальные операторы второго порядка, действующие по пространственным переменным. Такие дифференциальные уравнения возникают и используются при математическом моделировании ряда процессов физики плазмы, теории упругости, теории длинных волн [1–3]. Особенностью изучаемых задач является тот факт, что граничное условие в них содержит и производные по пространственным переменным, и производные по временно́й переменной, и интегралы от решения.

Уравнения (1) в литературе называют уравнениями составного типа [4; 5], или же уравнениями соболевского типа [6; 7], или же псевдогиперболическими уравнениями [6–8]. Разрешимость естественных краевых задач для них (таких как первая, вторая или третья начально-краевые задачи, задача Коши), свойства их решений хорошо изучены, см. работы [6–11]. Значительно менее изученными представляются задачи с нелокальными краевыми уравнениями. Известные здесь результаты [12–16] либо соответствуют одномерному случаю, либо же в них изучаются задачи, отличные от тех, которые изучаются в настоящей работе.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Уточним, что в настоящей работе будет установлена разрешимость изучаемых нелокальных задач в классах регулярных решений, т. е. решений, имеющих все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Функциональной основой для нижеприведённых исследований будут пространства Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [17–19].

В работе будут изучены нелокальные задачи для уравнений вида (1) в некоторых модельных случаях. Возможные усиления и обобщения будут обсуждены в конце статьи.

1. Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0, T)$ есть боковая граница Q. Далее пусть $f(x, t)$, $b^{ij}(x, t)$, $b^i(x, t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $b_0(x, t)$, $\alpha^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_0(x)$, $R(x, y)$ есть заданные функции, определённые при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, B и l_0 есть дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенствами

$$Bv = b^{ij}(x, t)v_{x_i x_j} + b^i(x, t)v_{x_i} + b_0(x, t)v(x, t), \quad l_0 v = v_t + \alpha^k(x)v_{x_k} + \alpha_0(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведётся суммирование в пределах от 1 до n). В качестве оператора A в дальнейшем будем использовать модельный оператор $I - \Delta$ с оператором Лапласа Δ, действующим по пространственным переменным $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положим

$$Lu = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Au) + Bu.$$

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{2}$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$l_0 u(x, t) - \int\limits_{\Omega} R(x, y)u(y, t)dy\Big|_S = 0. \tag{4}$$

Нелокальная задача (2)–(4) в случае $R(x, y) \equiv 0$ является локальной краевой задачей с «косой» производной. Ранее в подобной общей постановке краевые задачи для уравнений вида (2) не изучались. С другой стороны, ранее краевые задачи с заданием «косой» производной на боковой поверхности изучались для уравнений составного (соболевского) типа третьего порядка, см. [20]. Именно техника работы [20] будет существенно использоваться в настоящей работе.

Если в условиях (4) $R(x, y)$ есть ненулевая функция, то изучаемая задача будет нелокальной задачей с интегральным условием. Ранее подобные задачи для уравнений вида (1) были исследованы лишь в некоторых частных случаях [12–16].

В исследованиях разрешимости задач с интегральными условиями часто применялся метод, предложенный в работах [21; 22], — метод, основанный на сведении нелокальной задачи с интегральными условиями к задаче для «нагруженного» уравнения [23; 24] с классическими граничными условиями. Метод работ [21; 22] в сочетании с методом работы [20] позволит установить разрешимость задачи (2)–(4) в классе регулярных решений.

2. Вспомогательные результаты

Всюду далее $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ есть вектор внутренней нормали к Γ в текущей точке x.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha^k(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad R(x, y) \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}); \tag{5}$$

$$\alpha^k(x)\nu_k \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \textit{при} \quad x \in \Gamma. \tag{6}$$

Тогда для любой функции $g(x,t)$, такой, что $\frac{\partial^j g(x,t)}{\partial t^j} \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, $j = 0, 1, 2$, $g(x, 0) = 0$ при $x \in \Omega$, краевая задача

$$l_0 u(x, t) - \int\limits_\Omega R(x, y)u(y, t)dy = g(x, t), \tag{7}$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega \tag{8}$$

имеет решение $u(x,t)$, такое, что $\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j} \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$, $j = 0, 1, 2$. Это решение ровно одно, и для него выполняются оценки

$$\int\limits_\Omega u^2(x, t)dx \leqslant C_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2(x, \tau)dx\, d\tau, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x, t)dx + \int\limits_\Omega u_t^2(x, t)dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2(x, \tau)dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{x_i}^2(x, \tau)dx\, d\tau \right], \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x, t)dx + \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x, t)dx \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_\tau^2(x, \tau)dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{x_i \tau}^2(x, \tau)dx\, d\tau \right], \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i tt}^2(x, t)dx \leqslant C_3 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{\tau\tau}^2(x, \tau)dx\, d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{x_i \tau\tau}^2(x, \tau)dx\, d\tau \right], \tag{12}$$

в которых $t \in [0,T]$, *постоянные* C_j, $j = 0,1,2,3$, *определяются лишь функциями* $\alpha^k(x)$, $k = 1,2,\dots,n$, $\alpha_0(x)$, $R(x,y)$, *а также числом* T.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$l_0 u - \varepsilon \Delta u = g(x,t) \tag{13}$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\Big|_S = 0. \tag{15}$$

Как следует из [25], эта задача имеет решение $u(x,t)$, такое, что что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;\, W_2^1(\Omega))$. Более того, из [26] следует, что вследствие наличия у функции $g(x,t)$ производных по переменной t до второго порядка включительно уравнение (13) можно дифференцировать почленно дважды по t.

Умножим уравнение (13) с временно́й переменной τ на функцию $u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру $\Omega \times (0,t)$. Интегрируя по частям, используя условия (5) и (6), затем применяя лемму Гроноулла, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (13)–(15) выполняется оценка

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t)dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau)dx\,d\tau \leqslant C_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2(x,\tau)dx\,d\tau, \tag{16}$$

с постоянной C_0, определяющейся функциями $\alpha^k(x)$, $k = 1,2,\dots,n$, $\alpha_0(x)$ и $R(x,y)$.

Умножая далее уравнение (13) с временно́й переменной τ на функцию $-\Delta u(x,\tau)$ и интегрируя по цилиндру $\Omega \times (0,t)$, дифференцируя по τ, умножая на функции $u_\tau(x,\tau)$ и $-\Delta u_\tau(x,\tau)$, интегрируя и применяя лемму Гроноулла, далее ещё раз дифференцируя по переменной τ, умножая на функции $u_{\tau\tau}(x,\tau)$ и $-\Delta u_{\tau\tau}(x,\tau)$, интегрируя и применяя лемму Гроноулла, получим, что для решений выполняются оценки

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx + \int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\Delta u(x,\tau)]^2 dx\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega g^2(x,\tau)dx\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{x_i}^2(x,\tau)dx\,d\tau \right], \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)dx + \int\limits_\Omega u_{tt}^2(x,t)dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\Delta u_\tau(x,\tau)]^2 dx\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \left[\int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_\tau^2(x,\tau)dx\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega g_{x_i\tau}^2(x,\tau)dx\,d\tau \right], \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_itt}^2(x,t)dx+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[\Delta u_{\tau\tau}(x,\tau)]^2dx\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant C_3\left[\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} g_{\tau\tau}^2(x,\tau)dx\,d\tau+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} g_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)dx\,d\tau\right] \tag{19}$$

с постоянными C_1, C_2, C_3, определяющимися лишь функциями $\alpha^k(x)$, $k=1,2,\dots,n$, $\alpha_0(x)$ и $R(x,y)$.

Оценки (16)–(19) и стандартная процедура выбора последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$, такой, что $\varepsilon_m\to0$ при $m\to\infty$, далее — слабо сходящейся последовательности из семейства $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ решений $u^{\varepsilon_m}(x,t)$ краевой задачи (13)–(15) с $\varepsilon=\varepsilon_m$, и дадут существование предельной функции $u(x,t)$, являющейся решением краевой задачи (7), (8), причём для этого решения будут выполняться оценки (9)–(12).

Единственность решений краевой задачи (7), (8) из требуемого класса очевидна. □

Определим операторы l_1, Φ_0 и Φ_1 равенствами

$$l_1v=l_0v-\int\limits_{\Omega}R(x,y)v(y,t)dy,\quad \Phi_0v=L\,l_0v-l_0\,Lv,\quad \Phi_1v=L\,l_1v-l_1\,Lv$$

($v(x,t)$ — заданная функция; здесь предполагается, что коэффициенты $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $b_0(x,t)$, $\alpha^k(x)$, $R(x,y)$, $i,j,k=1,2,\dots,n$, настолько гладкие, что операторы Φ_0 и Φ_1 корректно определены).

Для операторов A и B имеют место равенства $Al_0=l_0A+A_0$, $Bl_0=l_0B+B_0$, в которых A_0 и B_0 — дифференциальные операторы не выше второго порядка.

Утверждение 2. *Для любой функции $\eta(x,t)$ из пространства $L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{\Omega}A_0v(x,t)\eta(x,t)dx\right|\leqslant a_0\|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))}\cdot\|\eta\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))},$$

в котором число a_0 определяется лишь функциями $\alpha^k(x)$, $k=1,2,\dots,n$, $\alpha_0(x)$.

Доказательство этого утверждения очевидно.

3. Разрешимость краевых задач с интегро-дифференциальным граничным условием

Определим линейные пространства V_j, $j=1,2$:

$$V_j=\left\{v(x,t):\ \frac{\partial^k v(x,t)}{\partial t^k}\in L_\infty(0,T;\ W_2^j(\Omega)),\ \ k=0,1,2\right\}.$$

Снабдим эти пространства нормами:

$$\|v\|_{V_j}=\left(\|v\|^2_{L_\infty(0,T;\,W_2^j(\Omega))}+\|v_{tt}\|^2_{L_\infty(0,T;\,W_2^j(\Omega))}\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что при $j=0,1,2$ V_j с такой нормой будет банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (6), *а также условия*
$\alpha^k(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_0(x) \in C^2(\overline{\Omega})$;
$b^{ij}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $b^i(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $b_0(x,t) \in C(\overline{Q})$;
$R(x,y) = 0$ *при* $y \in \Gamma$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$, *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $l_0 f(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ *при* $x \in \Omega$, *нелокальная задача* (2)–(4) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V_2.

Доказательство. Пусть $g(x,t)$ — заданная функция. Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,t)$ и $\omega(x,t)$, являющиеся решениями в цилиндре Q уравнений

$$l_1 u = \omega(x,t), \tag{20}$$

$$L\omega = g(x,t) + (\Phi_1 u)(x,t) \tag{21}$$

и таких, что для них выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \ \ \omega(x,0) = \omega_t(x,0) = 0, \ \ x \in \Omega; \tag{22}$$

$$\omega(x,t)\Big|_S = 0. \tag{23}$$

Разрешимость краевой задачи (20)–(23) установим с помощью метода продолжения по параметру [25] и априорных оценок.

Пусть λ — число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим семейство задач: найти функции $u(x,t)$ и $\omega(x,t)$, такие, что для них в цилиндре Q выполняются уравнение (20), уравнение

$$L\omega = g(x,t) + \lambda(\Phi_1 u)(x,t), \tag{24}$$

а также условия (22) и (23). Для заданной функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ обозначим через Λ множество всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, таких, что краевая задача (20), (22)–(24) имеет решение $\{u(x,t), \ \omega(x,t)\}$, для которого $u(x,t) \in V_1$, $\omega(x,t) \in V_2$. Покажем, что множество Λ совпадает с отрезком $[0,1]$.

Множество Λ не пусто — число 0 принадлежит ему. Действительно, при $\lambda = 0$ уравнение (24) и условия (22), (23) дают для функции $\omega(x,t)$ краевую задачу, разрешимость которой в пространстве V_2 известна — см. [9]. Разрешимость же краевой задачи для функции $u(x,t)$ в пространстве V_1 следует из утверждения 1.

Покажем, что для всевозможных регулярных решений $\{u(x,t), \omega(x,t)\}$ системы (20), (22)–(24) имеют место нужные для применения теоремы о методе продолжения по параметру априорные оценки.

Пусть $u(x,t)$ из пространства V_1, $\omega(x,t) \in V_2$ — решения уравнений (20) и (24), для которых выполняются краевые условия (22) и (23). Умножим уравнение (24) на функцию $\omega(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Используя краевые условия (22) и (23) для функцию $\omega(x,t)$, далее учитывая вид оператора Φ_1, используя утверждение 2, оценки (9)–(12) и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что для функции $\omega(x,t)$ выполняется оценка

$$\|\omega\|_{V_2} \leqslant K_1 \|g\|_{L_2(Q)}, \tag{25}$$

число K_1 в которой определяется функциями $\alpha^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_0(x)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $b_0(x,t)$ а также областью Ω и числом T.

Утверждение 1, неравенства (9)–(12) и оценка (25) дают неравенство

$$\|u\|_{V_2} \leqslant K_2 \|g\|_{L_2(Q)}, \tag{26}$$

постоянная K_2 в котором вновь определяется функциями $\alpha^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_0(x)$, $b^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $b_0(x,t)$, а также областью Ω и числом T.

Как следует из теоремы о методе продолжения по параметру [25, гл.III, §14], из оценок (25), (26), а также из разрешимости краевой задачи (20), (22)–(24) при $\lambda = 0$ следует, что эта задача будет иметь решение $\{u(x,t), \omega(x,t)\}$, такое, что $u(x,t) \in V_1$, $\omega(x,t) \in V_2$, при всех λ из отрезка $[0,1]$, в том числе и при $\lambda = 1$. Другими словами, краевая задача (20)–(23) будет иметь требуемое решение $\{u(x,t), \omega(x,t)\}$ для любой функции $g(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$.

Покажем, что с помощью решения задачи (20)–(23) можно определить требуемое решение нелокальной задачи (2)–(4).

В краевой задаче (20)–(23) положим $g(x,t) = l_1 f(x,t)$. Такой выбор функции $g(x,t)$ означает, что уравнение (21) имеет вид $l_1(Lu - f) = 0$. Условие $f(x,0) = 0$, а также условие (22) означают, что выполняется равенство $Lu - f\Big|_{t=0} = 0$. Это равенство и утверждение 1, в свою очередь, означают, что в цилиндре Q выполняется равенство $Lu - f = 0$. Другими словами, функция $u(x,t)$, определяющая первую компоненту решения краевой задачи (20)–(23), при указанном выше выборе функции $g(x,t)$ даёт требуемое решение нелокальной задачи (2)–(4).

Единственность в пространстве V_2 решений задачи (2)–(4) очевидна. □

В одномерном случае изучим нелокальную задачу с производными на границе в видоизменённой постановке, а именно, в постановке, допускающей вырождение в граничном условии. Как и ранее, будем изучать модельный случай; возможные обобщения будут представлены в конце работы.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q — прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $\lambda_i(t)$, $R_i(x)$, $i = 0, 1$, $b_i(x,t)$, $i = 0, 1, 2$, заданные функции, определённые при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$; μ_i, $i = 0, 1, 2$, — заданные постоянные, B — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Bv = b_2(x,t)v_{xx} + b_1(x,t)v_x + b_0 v.$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - u_{xx}) + Bu = f(x,t) \tag{27}$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{28}$$

$$u_x(0,t) + \lambda_0(t)u_t(0,t) + \mu_0 u(0,t) - \int\limits_\Omega R_0(y)u(y,t)dy = 0, \;\; t \in (0,T), \tag{29}$$

$$u_x(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) + \mu_1 u(1,t) - \int\limits_\Omega R_1(y)u(y,t)dy = 0, \;\; t \in (0,T). \tag{30}$$

В нелокальной задаче (27)–(30) функции $\lambda_0(t)$ и $\lambda_1(t)$ могут обращаться в нуль при $t \in [0,T]$, именно поэтому данная задача и называется задачей с вырождением.

Доказательство разрешимости нелокальной задачи (27)–(30) будет основано на априорных оценках и методе регуляризации.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$\lambda_0(t) \in C^3([0,T])$, $\lambda_0(t) \leqslant 0$, $\lambda_0''(t) \leqslant 0$, $\lambda_0'''(t) \geqslant 0$,

$\|R_0\|^2_{L_2(\Omega)} < -4\mu_0 - 6\lambda_0'(t)$ *при* $t \in [0,T]$;
$\lambda_1(t) \in C^3([0,T])$, $\lambda_1(t) \geqslant 0$, $\lambda_1''(t) \geqslant 0$, $\lambda_1'''(t) \leqslant 0$,
$\|R_1\|^2_{L_2(\Omega)} < 4\mu_1 + 6\lambda_1'(t)$ *при* $t \in [0,T]$,
$b_i(x,t) \in C(\overline{Q})$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *из пространства* $L_2(Q)$ *нелокальная задача* (27)–(30) *имеет решение* $u(x,t)$*, такое, что* $\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega))$.

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Определим функции $\lambda_{0\varepsilon}(t)$ и $\lambda_{1\varepsilon}(t)$ равенствами

$$\lambda_{0\varepsilon}(t) = \lambda_0(t) - \varepsilon, \;\; \lambda_{1\varepsilon}(t) = \lambda_1(t) + \varepsilon.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (27) и такую, что для неё выполняется (28), а также условия

$$u_x(0,t) + \lambda_{0\varepsilon} u_t(0,t) + \mu_0 u(0,t) - \int\limits_\Omega R_0(y) u(y,t) dy = 0, \;\; t \in (0,T), \tag{31}$$

$$u_x(1,t) + \lambda_{1\varepsilon} u_t(1,t) + \mu_1 u(1,t) - \int\limits_\Omega R_1(y) u(y,t) dy = 0, \;\; t \in (0,T). \tag{32}$$

Пусть сначала $f(x,t)$ — финитная бесконечно дифференцируемая в $\overline{Q}$ функция. Согласно теореме 1 тогда при фиксированном ε краевая задача (27), (28), (31), (32) будет иметь регулярное решение $u_\varepsilon(x,t)$. Покажем, что для семейства $\{u_\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ будут иметь место равномерные по ε априорные оценки.

Умножим уравнение (27) с текущей временно́й переменной τ на функцию $u_{\tau\tau}(x,\tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0,t)$, $0 < t \leqslant T$. Используя формулу интегрирования по частям, краевые условия (31) и (32), применяя неравенства Гёльдера и Юнга и используя условия данной теоремы для чисел μ_i, функций $\lambda_i(t)$ и $b_i(x,t)$, получим, что для функций $u_\varepsilon(x,t)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u^2_{\varepsilon\tau\tau} + u^2_{\varepsilon x\tau\tau}) dx\, d\tau \leqslant K_3 \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (u^2_{\varepsilon xx} + u^2_\varepsilon) dx\, d\tau + \int\limits_Q f^2 dx\, d\tau \right), \tag{33}$$

постоянная K_3 в котором определяется лишь функциями $b_i(x,t)$, $i = 0,1,2$, $\lambda_i(t)$ и $R_i(x)$, $i = 0,1$, а также числами μ_0, μ_1 и T.

На следующем шаге умножим уравнение (27) с текущей временно́й переменной τ на функцию $-u_{\varepsilon xx\tau}(x,\tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0,t)$, $0 < t \leqslant T$. Используя формулу интегрирования по частям, начальные условия (28), неравенство (33), применяя элементарные интегральные оценки для функций $u_\tau(0,\tau)$ и $u_\tau(1,\tau)$, и, наконец, применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u_\varepsilon(x,t)$ краевой задачи (27), (28), (31), (32) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_\Omega (u^2_{\varepsilon x\tau}(x,t) + u^2_{\varepsilon xx\tau}(x,t)) dx \leqslant K_4 \int\limits_Q f^2 dx\, d\tau, \tag{34}$$

с постоянной K_4, определяемой лишь функциями $b_i(x,t)$, $i = 0,1,2$, $\lambda_i(t)$ и $R_i(x)$, $i = 0,1$, а также числами μ_0, μ_1 и T. Из оценки (34) вытекает, что левая часть неравенства (33) конечна (оценивается сверху величиной $c\|f\|^2_{L_2(Q)}$). В свою очередь, из конечности левой части (32) и из неравенства (34) следует равномерная по ε ограниченность в пространстве $L_2(Q)$ функций $u_{\varepsilon xx\tau\tau}$.

Следствием полученных равномерных по ε оценок и теоремы о рефлексивности гильбертова пространства [26] является существование последовательности $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящейся к искомому решению $u(x,t)$ задачи (27)–(30).

Пусть теперь функция $f(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$. Приближая её финитными бесконечно дифференцируемыми в $\overline{Q}$ функциями, применяя установленный выше результат о разрешимости нелокальной задачи (27)–(30) для финитной бесконечно дифференцируемой функции $f(x,t)$ и затем переходя к пределу по параметру приближения, получим, что равномерные по ε оценки решений $u_\varepsilon(x,t)$ будут иметь место и для функций $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$. Вновь используя рефлексивность гильбертова пространства, получим, что существует последовательность $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящаяся к решению нелокальной задачи (27)–(30).

Единственность регулярного решения нелокальной задачи (27)–(30) очевидна. $\square$

Заключение

Полученные в работе результаты являются новыми для изучаемого класса уравнений как при наличии интегрального слагаемого в граничных условиях, так и при его отсутствии.

Полученный в утверждении 1 результат о разрешимости краевой задачи лишь с одним начальным условием для интегро-дифференциального уравнения

$$l_0u(x,t) - \int\limits_{\Omega} R(x,y)u(y,t)dy = g(x,t)$$

имеет, на взгляд авторов, и самостоятельное значение.

Изучаемые в работе задачи вполне можно заменить на более общие. Так, модельный оператор A $(A = I - \Delta)$ можно заменить на общий эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами, зависящими от переменных $x_1, 2, \ldots, x_n$, и от переменной t; функции α^k, α_0 вполне могут зависеть и от переменной t. Суть результатов о разрешимости соответствующих нелокальных задач не изменится, но выкладки и вычисления будут существенно более громоздкими.

Список литературы

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М. : Мир, 1977.
3. **Икези Х.** Экспериментальное исследование солитонов в плазме. В кн.: Солитоны в действии. М. : Мир, 1981. С. 163–184.
4. **Джураев Т. Д.** Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент : Фан, 1979.
5. **Kozhanov A. I.** Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht : VSP, 1999.
6. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
7. **Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007.
8. **Корпусов М. О.** Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М. : URSS, 2010.
9. **Якубов С. Я.** Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку : Элм, 1985.

10. **Замышляева А. А., Юзеева А. В.** Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2010. № 5. С. 23–31.
11. **Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А.** Уравнения с доминирующей частной производной. Казань : Казанский (Приволжский) федер. ун-т, 2014.
12. **Пулькина Л. С.** Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара : Изд-во «Самарский университет», 2012.
13. **Попов Н. С.** О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69–80.
14. **Алсыкова А. А.** О разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач для некоторых аналогов уравнения Буссинеска // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 3–11.
15. **Pulkina L. S., Beylin A. B.** Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electronic Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 2019, no. 29.
16. **Богатов А. В., Гилев А. В., Пулькина Л. С.** Задача с нелокальным условием для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками // Вестн. Российск. ун-тов. Математика. 2022. Т. 27, вып. 139. С. 214–230.
17. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973.
18. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980.
19. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988.
20. **Кожанов А. И.** Задача с косой производной для некоторых псевдопараболических и близких к ним уравнений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1335–1346.
21. **Кожанов А. И., Пулькина Л. С.** О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
22. **Кожанов А. И., Дюжева А. В.** Разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений соболевского типа третьего порядка // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 4. С. 30–42.
23. **Дженалиев М. Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы : Ин-т теорет. и приклад. математики, 1995.
24. **Нахушев А. М.** Нагруженые уравнения и их применение. М. : Наука, 2012.
25. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М. : Наука, 1980.
26. **Ладыженская О. А., Солоников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.

Поступила в редакцию 29.08.2023.
После переработки 29.09.2023.

Сведения об авторах

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Кенжебай Ханат, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан; e-mail: kanat_1083@mail.ru

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 4. P. 516–527.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-516-527

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH AN INTEGRO-DIFFERENTIAL NON-LOCAL CONDITION FOR COMPOSITE TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

A.I. Kozhanov[1,a], **Kh. Kenzhebay**[2,b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
[a]*kozhanov@math.nsc.ru,* [b]*kanat_ 1083@mail.ru*

The paper studies new nonlocal boundary value problems with an integro-differential boundary condition for unsteady differential equations of the Sobolev type of the fourth order. The peculiarity of the studied problems is that they contain derivatives both in spatial variables and derivatives in time variables in the boundary condition. For the problems under study, the existence and uniqueness theorems of regular solutions are proved – solutions having all derivatives generalized by S.L. Sobolev included in the corresponding equations.

Keywords: *composite type equation, Sobolev type equation, integro-differential boundary conditions, nonlocal problem, regular solution, solution existence, solution uniqueness.*

References

1. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. (In Russ.).
2. **Witham G.B.** *Linear and Nonlinear Waves.* London, John Wiley and Sons, 1974.
3. **Ikezi H.** Eksperimental'noye issledovaniye solitonov v plazme [Experimental study of solitons in plasma]. In *Solitony v deystvii* [Solitons in action]. Moscow, Mir Publ., 1981. Pp. 163–184. (In Russ.).
4. **Dzhuraev T.D.** *Krayevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent, Fan Publ., 1979. (In Russ.).
5. **Kozhanov A.I.** *Composite Type Equations and Inverse Problems.* Utrecht, VSP, 1999.
6. **Demidenko G.V., Uspensky S.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York, Basel, Marcel Dekker, Inc., 2003.
7. **Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.** *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear equations of the Sobolev type]. Moscow, Fizamatlit Publ., 2007. (In Russ.).
8. **Korpusov M.O.** *Razrusheniye v neklassicheskikh volnovykh uravneniyakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. Moscow, URSS Publ., 2010. (In Russ.).
9. **Yakubov S.Ya** *Lineynye differentsial'no-operatornye uravneniya i ikh prilozheniya* [Linear differential-operator equations and their applications]. Baku, Elm Publ., 1985. (In Russ.).
10. **Zamyshlyaeva A.A., Yuzeeva A.V.** Nachal'no-konechnaya zadacha dlya uravneniya Bussineska — Lyava [Initial-final problem for the Boussinesq–Love equation]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Ser. Mathematical modeling and programming], 2010, no. 5, pp. 23–31. (In Russ.).

The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00269).

11. **Zhegalov V.I., Mironov A.N., Utkina E.A.** *Uravneniya s dominiruyushchey chastnoy proizvodnoy* [Equations with dominant partial derivative]. Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University, 2014. (In Russ.).
12. **Pulkina L.S.** *Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravneniy* [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations]. Samara, Samara University, 2012. (In Russ.).
13. **Popov N.S.** O razreshimosti krayevykh zadach dlya mnogomernykh psevdogiperbolicheskikh uravneniy s nelokal'nym granichnym usloviyem integral'nogo vida [On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudo-hyperbolic equations with a non-local boundary condition of integral form]. *Mathematical Notes of NEFU*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 69–80. (In Russ.).
14. **Alsykova A.A.** Nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equation. *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 3 —11.
15. **Pulkina L.S., Beylin A.B.** Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, vol. 2019, no. 29.
16. **Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S.** Zadacha s nelokal'nym usloviyem dlya uravneniya chetvyortogo poryadka s kratnymi kharakteristikami [A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika* [Bulletin of Russian universities. Mathematics, 2022, vol. 27, iss. 139, pp. 214–230. (In Russ.).
17. **Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-linear Elliptic Equations.* New York, Academic Press, 1968.
18. **Tribel H.** *Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
19. **Sobolev S.L.** *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* American Mathematical Society, 2008.
20. **Kozhanov A.I.** A problem with oblique derivative for some pseudoparabolic equations and equations close to them. *Siberian Mathematical Journal*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1171–1181.
21. **Kozhanov A.I., Pulkina L.S.** On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246.
22. **Kozhanov A.I., Dyuzheva A.V.** Solvability of a nonlocal problem with integral conditions for third-order Sobolev-type equations. *Mathematical Notes of NEFU*, 2020, vol. 27, no. 4, pp. 30–42.
23. **Dzhenaliev M.T.** *K teorii lineynukh krayevykh zadach dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy* [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]. Almaty, Institute of Theoretical and Applied Mathematics, 1995. (In Russ.).
24. **Nakhushev A.M.** *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their application]. Moscow, Nauka Publ., 2012. (In Russ.).
25. **Trenogin V.A.** *Funktaional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. (In Russ.).
26. **Ladyzhenskaia O.A., Solonikov V.A., Ural'tseva N.N.** *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type.* American Mathematical Society, 1968.

Article received 29.08.2023.
Corrections received 29.09.2023.