Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 4. С. 483–501.

УДК 517.925.54:517.929.8 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-483-501

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

В. А. Денисюк[1,a], **И. И. Матвеева**[1,2,b]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[a]*v.denisyuk@g.nsu.ru*, [b]*i.matveeva@g.nsu.ru*

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности с параметром. Исследованы асимптотические свойства решений этой системы в зависимости от роста количества уравнений или параметра. Доказано, что при достаточно большом числе дифференциальных уравнений последняя компонента решения задачи Коши является приближённым решением начальной задачи для одного дифференциального уравнения с запаздыванием. При фиксированном количестве уравнений и достаточно большом параметре решение задачи Коши для исходной системы является приближённым решением задачи Коши для системы более простого вида.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, асимптотические свойства решений, дифференциальное уравнение с запаздыванием.*

1. Предварительные сведения

В работе рассматриваются системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widetilde{z}}{dt} = \widetilde{B}_n\widetilde{z} + F(t,\widetilde{z}), \tag{1}$$

где $\widetilde{z}(t) = (\widetilde{z}_1(t), \widetilde{z}_2(t), \ldots, \widetilde{z}_n(t))^{\mathrm{T}}$, $F(t,\widetilde{z}) = (g(t,\widetilde{z}_n), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$\widetilde{B}_n = \begin{pmatrix} -a_1 & c_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_2 & c_3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & a_{n-3} & b_{n-2} & c_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-2} & -\theta \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$a_j = \frac{n-1}{\tau_1\alpha_j(n)}, \quad b_j = -\left(\frac{n-1}{\tau_1} + \frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{1}{\alpha_j(n)}, \quad c_j = \frac{n-1}{\tau_2\alpha_j(n)},$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

$\tau_2 > \tau_1 > 0$, $\theta > 0$, $\alpha_j(n) = 1 + \rho_j(n-1)^{-\gamma_j}$, $0 \leqslant \rho_j \leqslant \rho$, $\gamma_j \geqslant \gamma > 1$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Предполагается, что функция $g(t, z)$ непрерывна, ограничена и липшицева по z:

$$|g(t,z)| \leqslant G, \quad |g(t,z^1) - g(t,z^2)| \leqslant L|z^1 - z^2|, \; z^1, z^2 \in \mathbb{R}, \; t \geqslant 0. \tag{3}$$

Системы такого вида возникают во многих задачах биологии и химии (см., например, [1–4] и указанную в этих работах литературу). В частности, их используют при моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [2; 4]). Количество уравнений n в системе (1) определяется числом стадий, $\widetilde{z}_j(t)$ — концентрация вещества на j-й стадии, параметры τ_j, ρ_j, γ_j характеризуют время и скорость протекания процесса. В настоящее время системы такого типа активно исследуются математиками и биологами, поскольку их решение позволяет получать новую информацию о функционировании генных сетей. Отличительной особенностью изучаемой системы является тот факт, что она возникает при описании процесса с непостоянными скоростями протекания промежуточных стадий (различные ρ_j, γ_j) и при наличии обратимости процесса ($\tau_2 > 0$). Более того, количество стадий n может быть настолько большим, что нахождение решения системы с помощью современных компьютеров может представлять очень серьезную проблему. Поэтому на этапе нахождения численных значений концентрации конечного продукта $\widetilde{z}_n(t)$ исследователи сталкиваются с «проблемой большой размерности».

В 2002 г. «проблема большой размерности» была успешно решена Г. В. Демиденко для системы вида (1), возникающей при описании процесса с постоянными скоростями протекания промежуточных стадий ($\rho_j = 0$) в предположении необратимости процесса ($\tau_2 = \infty$):

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \tag{4}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$, $F(t,x) = (g(t, x_n), 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\theta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Были установлены связи между решениями этой системы и решениями уравнения с запаздыванием. Ниже мы сформулируем результат, полученный Г. В. Демиденко [2] (см. теоремы 1–4) для системы (4). Предполагается, что функция $g(t, z)$ непрерывна, ограничена и липшицева по z. Будем при каждом фиксированном n рассматривать задачу Коши для системы (4) с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Каждая задача Коши имеет единственное решение при $t \geqslant 0$, которое обозначим через $x^n(t)$. Составим последовательность $\{x_n^n(t)\}$ из последних компонент решений $x^n(t)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. (Г. В. Демиденко). *Последовательность* $\{x_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0,T]$: $x_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$. *Предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau_1, y(t-\tau_1)), \quad t > \tau_1, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ y(\tau_1 + 0) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

при этом

$$\max_{t\in[0,T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leqslant c\, n^{-1/2}, \quad n \gg 1, \tag{7}$$

где $c > 0$ *не зависит от* n.

Отметим, что полученный результат даёт строгое обоснование эффективного метода для численного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздыванием. Действительно, для нахождения значений $x_n(t)$ достаточно решить начальную задачу (6). Более того, с использованием (7) можно оценить погрешность аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ при $n \gg 1$. Из (7), очевидно, следует, что чем большее количество стадий n требуется для получения конечного продукта синтеза, тем точнее можно получить результат, следуя указанному методу.

Теорема 1 послужила основой для получения аналогичных утверждений для различных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Г. В. Демиденко предложил ряд методов для доказательства предельных теорем, которые были развиты в его работах и работах его учеников (см., например, [5–15]). Отметим, что в работе [16] рассмотрен также вопрос о стремительном протекании процесса, описываемого системой (4), что соответствует случаю $\tau_1 \to 0$.

В работах [8; 11] рассматривалась система вида (1), описывающая процесс с постоянными скоростями протекания промежуточных стадий ($\rho_j = 0$) при наличии обратимости процесса ($\tau_2 > 0$):

$$\frac{dz}{dt} = B_n z + F(t,z),$$

$$B_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\theta \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Исследовалась задача Коши с нулевыми начальными данными

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = B_n z + F(t,z), \quad t > 0, \\ z|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В [8; 11] была установлена предельная теорема, являющаяся аналогом теоремы 1. Будем неограниченно увеличивать размерность системы (8) и при каждом n рассматривать для неё задачу Коши вида (9). Каждая из задач Коши имеет единственное решение $z^n(t)$ при $t \geqslant 0$. Составим последовательность функций $\{z_n^n(t)\}$, состоящую из последних компонент решений $z^n(t)$ каждой из задач. Имеет место следующий результат.

Теорема 2. [8, 11]. *Пусть*

$$\tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad T > \tau, \quad \frac{L(1 - e^{-\theta T})}{\theta} \frac{\tau}{\tau_1} < 1. \tag{10}$$

Тогда последовательность $\{z_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0, T]$: $z_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$. *Предельная функция* $y(t)$ *является решением следующей начальной задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ y(\tau + 0) = 0. \end{cases}$$

Естественно возникает вопрос о предельных теоремах, являющихся аналогами теорем 1 и 2 для систем общего вида (1), в том числе при рассмотрении задачи Коши с ненулевыми начальными данными. В следующем параграфе мы исследуем свойства решений задачи Коши для системы (1) при $n \gg 1$, в третьем параграфе — при $\tau_2 \gg 1$. В качестве следствия полученных результатов установлено совпадение повторных пределов при $n \to \infty$ и $\tau_2 \to \infty$.

2. Предельные свойства решения задачи Коши при $n \gg 1$

В этом параграфе мы исследуем предельные свойства решения системы (1) при фиксированном τ_2 и $n \to \infty$. Будем неограниченно увеличивать размерность системы (1) и при каждом n рассматривать следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{z}}{dt} = \widetilde{B}_n \widetilde{z} + F(t, \widetilde{z}), \quad t > 0, \\ \widetilde{z}|_{t=0} = (0, \dots, 0, b)^T, \end{cases} \tag{11}$$

где матрица $\widetilde{B}_n$ определена в (2), $b \in \mathbb{R}$. Каждая задача Коши имеет единственное решение, которое мы будем обозначать $z^n(t)$. Рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач, получим последовательность функций $\{\widetilde{z}_n^n(t)\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены соотношения* (10). *Тогда последовательность* $\{\widetilde{z}_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0, T]$: $\widetilde{z}_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$. *Предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv b e^{-\theta t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ y(\tau + 0) = b e^{-\theta \tau}. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Вначале исследуем случай $\rho_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z), \quad t > 0, \\ z|_{t=0} = (0, \ldots, 0, b)^T, \end{cases} \tag{13}$$

где матрица B_n определена в (8). Будем неограниченно увеличивать число уравнений n и рассматривать только последнюю компоненту $z_n^n(t)$ решения задачи Коши (13). Составим из этих компонент последовательность $\{z_n^n(t)\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены соотношения* (10). *Тогда последовательность* $\{z_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0, T]$: $z_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$, *причём предельная функция* $y(t)$ *является решением начальной задачи* (12).

Доказательство. Очевидно, что имеет место тождество

$$z_n^n(t) \equiv b e^{-\theta t} + \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-1}^n(s) ds.$$

Рассмотрим следующую последовательность вектор-функций

$$w^n(t) = \begin{pmatrix} w_1^n(t) \\ \vdots \\ w_n^n(t) \end{pmatrix},$$

где

$$w_i^n(t) = z_i^n(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad w_n^n(t) = \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} \frac{n-1}{\tau_1} z_{n-1}^n(s) ds.$$

Нетрудно проверить, что для каждого n вектор-функция $w^n(t)$ является решением следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dw^n}{dt} = B_n w^n + R(t, w^n), \quad t > 0, \\ w^n|_{t=0} = (0, \ldots, 0)^T, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$R(t, w^n) = \begin{pmatrix} g(t, b e^{-\theta t} + w_n^n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{g}(t, w_n^n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что функция $\widetilde{g}(t, w_n^n)$ также удовлетворяет условиям (3) с теми же константами G и L, и для задачи Коши (14) применима теорема 2. Следовательно, имеет место равномерная сходимость: $w_n^n(t) \to \widehat{y}(t)$, $n \to \infty$, при этом функция $\widehat{y}(t)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{y}(t)}{dt} = -\theta \widehat{y}(t) + g(t-\tau, b e^{-\theta(t-\tau)} + \widehat{y}(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ \widehat{y}(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad \tau = \dfrac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \\ \widehat{y}(\tau + 0) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y(t) = be^{-\theta t} + \widehat{y}(t)$. Она является решением начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv be^{-\theta t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ y(\tau + 0) = be^{-\theta\tau}, \end{cases}$$

причём имеет место равномерная сходимость $z_n^n(t) \to y(t)$, $n \to \infty$. Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 3 будем проводить с помощью метода сравнения и схемы, описанной в [11]. Введём вектор-функцию $u^n(t) = \widetilde{z}^n(t) - z^n(t)$, где $\widetilde{z}^n(t)$ — решение задачи Коши (11), а $z^n(t)$ — решение задачи Коши (13). Обозначим через $u_j^n(t)$ компоненты вектор-функции $u^n(t)$. Нетрудно заметить, что $u^n(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = B_n u + H_1(t) + H_2(t), \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где

$$H_1(t) = \begin{pmatrix} g(t, \widetilde{z}_n^n(t)) - g(t, z_n^n(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2(t) = (n-1) \begin{pmatrix} \widetilde{z}_1^n(t) \frac{\rho_1 (n-1)^{-\gamma_1}}{\tau_1 \alpha_1(n)} - \widetilde{z}_2^n(t) \frac{\rho_2 (n-1)^{-\gamma_2}}{\tau_2 \alpha_2(n)} \\ -\widetilde{z}_1^n(t) \frac{\rho_1 (n-1)^{-\gamma_1}}{\tau_1 \alpha_1(n)} + \widetilde{z}_2^n(t) \frac{\rho_2 (n-1)^{-\gamma_2}}{\alpha_2(n)} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) - \widetilde{z}_3^n(t) \frac{\rho_3 (n-1)^{-\gamma_3}}{\tau_2 \alpha_3(n)} \\ \vdots \\ -\widetilde{z}_{n-2}^n(t) \frac{\rho_{n-2} (n-1)^{-\gamma_{n-2}}}{\tau_1 \alpha_{n-2}(n)} + \widetilde{z}_{n-1}^n(t) \frac{\rho_{n-1} (n-1)^{-\gamma_{n-1}}}{\alpha_{n-1}(n)} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \\ -\widetilde{z}_{n-1}^n(t) \frac{\rho_{n-1} (n-1)^{-\gamma_{n-1}}}{\tau_1 \alpha_{n-1}(n)} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_j(n) = 1 + \rho_j (n-1)^{-\gamma_j}.$$

Лемма 2. *Для компонент $\widetilde{z}_j^n(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$, имеет место оценка*

$$|\widetilde{z}_j^n(t)| < \frac{G\tau\alpha_j(n)}{n-1}, \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

Доказательство. В силу непрерывности оценка (16) выполнена при малых $t > 0$. Покажем, что оценка верна для всех $t > 0$. От противного, пусть найдутся номер k и точка t_*, такие, что

$$|\widetilde{z}_j^n(t)| < \frac{G\tau\alpha_j(n)}{n-1}, \quad t \in [0, t_*), \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

$$|\widetilde{z}_k^n(t_*)| = \frac{G\tau\alpha_k(n)}{n-1}. \tag{18}$$

Пусть k — максимальный номер, для которого выполнено (18). Рассмотрим возможные варианты значения k.

Предположим, что $k = n-1$. Тогда

$$\widetilde{z}^n_{n-1}(t_*) = \frac{G\tau\alpha_{n-1}(n)}{n-1} \tag{19}$$

или

$$\widetilde{z}^n_{n-1}(t_*) = -\frac{G\tau\alpha_{n-1}(n)}{n-1}. \tag{20}$$

Пусть верно (19), тогда в силу системы (1) получаем

$$0 \leqslant \frac{d\widetilde{z}^n_{n-1}}{dt}|_{t=t_*} = \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-2}(n)}\widetilde{z}^n_{n-2}(t_*) - \left(\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)} + \frac{n-1}{\tau_2\alpha_{n-1}(n)}\right)\widetilde{z}^n_{n-1}(t_*) <$$

$$< \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-2}(n)}\widetilde{z}^n_{n-2}(t_*) - \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\widetilde{z}^n_{n-1}(t_*).$$

Отсюда

$$\frac{\widetilde{z}^n_{n-1}(t_*)}{\alpha_{n-1}(n)} = \frac{G\tau}{n-1} < \frac{\widetilde{z}^n_{n-2}(t_*)}{\alpha_{n-2}(n)}.$$

В силу предположения (17) и непрерывности $\widetilde{z}^n_{n-2}(t)$ имеем

$$\widetilde{z}^n_{n-2}(t_*) \leqslant |\widetilde{z}^n_{n-2}(t_*)| \leqslant \frac{G\tau\alpha_{n-1}(n)}{n-1}.$$

Приходим к противоречию. Аналогичные рассуждения проводятся в случае (20).

Пусть $1 < k < n-1$. Тогда возможны два случая:

$$\widetilde{z}^n_k(t_*) = \frac{G\tau\alpha_k(n)}{n-1} \tag{21}$$

или

$$\widetilde{z}^n_k(t_*) = -\frac{G\tau\alpha_k(n)}{n-1}. \tag{22}$$

Пусть выполнено (22). В силу предположения о максимальности k получаем

$$\frac{|\widetilde{z}^n_{k+1}(t_*)|}{\alpha_{k+1}(n)} < \frac{G\tau}{n-1} = -\frac{\widetilde{z}^n_k(t_*)}{\alpha_k(n)}.$$

В силу системы имеем

$$0 \geqslant \frac{d\widetilde{z}^n_k}{dt}|_{t=t_*} = \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*)}{\alpha_{k-1}(n)} - \frac{\widetilde{z}^n_k(t_*)}{\alpha_k(n)}\right) - \frac{n-1}{\tau_2}\left(\frac{\widetilde{z}^n_k(t_*)}{\alpha_k(n)} - \frac{\widetilde{z}^n_{k+1}(t_*)}{\alpha_{k+1}(n)}\right) >$$

$$> \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*)}{\alpha_{k-1}(n)} - \frac{\widetilde{z}^n_k(t_*)}{\alpha_k(n)}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\widetilde{z}^n_k(t_*)}{\alpha_k(n)} = -\frac{G\tau}{n-1} > \frac{\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*)}{\alpha_{k-1}(n)}.$$

В силу (17) и непрерывности $\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*)$ получаем

$$\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*) \geqslant -|\widetilde{z}^n_{k-1}(t_*)| > -\frac{G\tau\alpha_{k-1}(n)}{n-1}.$$

Проводя аналогичные рассуждения для случая (21), также приходим к противоречию. Следовательно, $k \notin \overline{2, n-2}$.

Остаётся рассмотреть случай $k = 1$. Как ранее, возможны два варианта:

$$\widetilde{z}_1^n(t_*) = \frac{G\tau\alpha_1(n)}{n-1} \tag{23}$$

или

$$\widetilde{z}_1^n(t_*) = -\frac{G\tau\alpha_1(n)}{n-1}. \tag{24}$$

Пусть выполнено (23). В силу максимальности k справедливы соотношения

$$\frac{|\widetilde{z}_2^n(t_*)|}{\alpha_2(n)} < \frac{G\tau}{n-1} = \frac{\widetilde{z}_1^n(t_*)}{\alpha_1(n)}.$$

Учитывая первое уравнение системы (1) и ограниченность функции $g(t,z)$, имеем

$$0 \leqslant \frac{d\widetilde{z}_1^n}{dt}|_{t=t_*} = g(t_*, \widetilde{z}_n^n(t_*)) - \frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{z}_1^n(t_*) + \frac{n-1}{\tau_2\alpha_2(n)}\widetilde{z}_2^n(t_*) \leqslant$$

$$\leqslant g(t_*, \widetilde{z}_n^n(t_*)) - \frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{z}_1^n(t_*) + \frac{n-1}{\tau_2\alpha_2(n)}|\widetilde{z}_2^n(t_*)| <$$

$$< g(t_*, \widetilde{z}_n^n(t_*)) - \frac{\widetilde{z}_1^n(t_*)}{\alpha_1(n)}\left(\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2}\right) \leqslant G - G\tau\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right) = 0.$$

Опять приходим к противоречию. Аналогичные рассуждения проводятся, если выполнено (24). Лемма 2 доказана. □

Рассмотрим решение $u^n(t)$ задачи Коши (15). Для его компонент $u_j^n(t)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для функций $u_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, имеет место оценка*

$$|u_j^n(t)| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \quad t \geqslant 0, \tag{25}$$

где $C = 2\dfrac{(\tau_2+\tau_1)G(1+\rho)\rho}{(\tau_2-\tau_1)}$.

Доказательство. В силу непрерывности функций $|u_j^n(t)|$ оценка выполнена при малых $t > 0$. Покажем, что оценка выполнена при $t > 0$. Доказательство будем проводить от противного. Пусть существует k и $t^* > 0$, такие, что при $j = 1, 2, \dots, n-1$, $t \in [0, t^*)$,

$$|u_j^n(t)| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \tag{26}$$

$$|u_k^n(t^*)| = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(k + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{27}$$

Пусть k — наибольший номер, для которого верно (27).

Предположим, что $k = 1$. Возможны два случая:

$$u_1^n(t^*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{28}$$

или

$$u_1^n(t^*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{29}$$

Пусть выполнено (28). Тогда в силу системы имеем

$$0 \leqslant \frac{du_1^n}{dt}|_{t=t^*} = -\frac{n-1}{\tau_1}u_1^n(t^*) + \frac{n-1}{\tau_2}u_n^2(t^*) + (g(t^*, \widetilde{z}_n^n(t^*)) - g(t^*, z_n^n(t^*))) + H_{2,1}(t^*),$$

где $H_{2,1}(t)$ — первая компонента вектор-функции $H_2(t)$. Используя лемму 2, для компонент $H_{2,j}(t)$ имеем неравенство

$$|H_{2,j}(t)| < \frac{C}{(n-1)^\gamma}, \quad C = 2\frac{(\tau_2+\tau_1)G(1+\rho)\rho}{(\tau_2-\tau_1)}.$$

В силу предположения о максимальности k для $|u_2^n(t)|$ выполнена оценка (26). Следовательно,

$$0 \leqslant \frac{du_1^n}{dt}|_{t=t^*} < -\frac{\tau}{\tau_1}\left(L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) +$$

$$+\frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(2+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) + L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma} = 0.$$

Получили противоречие. Аналогично рассматривается случай (29).

По этой же схеме проводятся рассуждения при $2 \leqslant k \leqslant n-2$. Остановимся на последнем случае $k = n-1$. Возможны два варианта:

$$u_{n-1}^n(t^*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{30}$$

или

$$u_{n-1}^n(t^*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{31}$$

Пусть выполнено (30). Тогда в силу системы

$$0 \leqslant \frac{du_{n-1}^n}{dt}|_{t=t^*} = \frac{n-1}{\tau_1}(u_{n-2}^n(t^*) - u_{n-1}^n(t^*)) - \frac{n-1}{\tau_2}u_{n-1}^n(t^*) + H_{2,n-1}(t^*) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\tau}{\tau_1}\frac{C}{(n-1)^\gamma} - \frac{\tau}{\tau_2}\frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right) - \frac{\tau}{\tau_2}L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + H_{2,n-1}(t^*) <$$

$$< -\frac{\tau}{\tau_1}\frac{C}{(n-1)^\gamma} - \frac{\tau}{\tau_2}\frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right) - \frac{\tau}{\tau_2}L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma} =$$

$$= -\frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{t\in[0,T]}|u_n^n(t)| + \frac{C}{(n-1)^\gamma}\left(n+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) < 0.$$

Получаем противоречие. Аналогично рассматривается случай (31).

Следовательно, оценка (25) выполнена на всей полуоси $\{t \geqslant 0\}$. Лемма 3 доказана. □

Рассмотрим последнее уравнение системы в задаче Коши (15). Очевидно, для $u_n^n(t)$ имеет место тождество

$$\frac{du_n^n(t)}{dt} \equiv -\theta u_n^n(t) + \frac{n-1}{\tau_1}u_{n-1}^n(t) + H_{2,n}(t).$$

С учётом начальных данных получаем

$$u_n^n(t) = \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} \left(\frac{n-1}{\tau_1} u_{n-1}^n(s) + H_{2,n}(s) \right) ds.$$

Воспользуемся оценками, полученными в леммах 2 и 3. Из них вытекает неравенство

$$|u_n^n(t)| \leqslant \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta} \left(\frac{\tau}{\tau_1} L \max_{t\in[0,T]} |u_n^n(t)| \right) +$$
$$+ \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta} \left(\frac{\tau}{\tau_1} \frac{C}{(n-1)^\gamma} \left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2} \right) + \frac{C}{(n-1)^\gamma} \right).$$

Учитывая условие на T, получаем

$$\max_{t\in[0,T]} |u_n^n(t)| \leqslant \left(1 - \frac{L(1-e^{-\theta T})}{\theta} \frac{\tau}{\tau_1} \right)^{-1} \left(\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta} \right) \frac{\tau C}{\tau_1 (n-1)^\gamma} \left(n + \frac{\tau-\tau_1}{\tau_2} \right). \quad (32)$$

Поскольку $\gamma > 1$, выражение в правой части (32) стремится к 0 при $n \to \infty$. Напомним, что $u_n^n(t) = \widetilde{z}_n^n(t) - z_n^n(t)$. Следовательно, принимая во внимание лемму 1, получаем

$$\max_{t\in[0,T]} |\widetilde{z}_n^n(t) - y(t)| \leqslant \max_{t\in[0,T]} |\widetilde{z}_n^n(t) - z_n^n(t)| + \max_{t\in[0,T]} |z_n^n(t) - y(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема 3 доказана. □

3. Предельные свойства решения задачи Коши при $\tau_2 \gg 1$

В этом параграфе мы изучим предельные свойства решения задачи Коши для системы (1) при фиксированном n и $\tau_2 \to \infty$. При каждом $\tau_2 > 0$ будем рассматривать задачу Коши для системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{z}}{dt} = \widetilde{B}_n \widetilde{z} + F(t, \widetilde{z}), \\ \widetilde{z}|_{t=0} = (0, \dots, 0, b)^T, \end{cases} \quad (33)$$

где матрица $\widetilde{B}_n$ определена в (2), $b \in \mathbb{R}$. Как отмечалось в предыдущем параграфе, эта задача имеет единственное решение, и мы будем обозначать его через $\widetilde{z}(t, \tau_2)$. Через $\widetilde{x}(t)$ обозначим решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{A}_n \widetilde{x} + F(t, \widetilde{x}), \\ \widetilde{x}|_{t=0} = (0, \dots, 0, b)^T, \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\widetilde{A}_n = \begin{pmatrix} -\dfrac{n-1}{\tau_1 \alpha_1(n)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{n-1}{\tau_1 \alpha_1(n)} & -\dfrac{n-1}{\tau_1 \alpha_2(n)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\dfrac{n-1}{\tau_1 \alpha_{n-1}(n)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n-1}{\tau_1 \alpha_{n-1}(n)} & -\theta \end{pmatrix},$$

$\alpha_j(n) = 1 + \rho_j(n-1)^{-\gamma_j}$. Отметим, что при $\rho_j = 0$ матрица $\widetilde{A}_n$ совпадает с матрицей A_n, определённой в (5). Очевидно, при $\tau_2 \to \infty$ задача Коши (33) формально переходит в задачу (34). Ниже мы исследуем близость решений этих задач.

Рассмотрим вектор-функцию $\widetilde{u}(t,\tau_2) = \widetilde{z}(t,\tau_2) - \widetilde{x}(t)$. Очевидно, что она является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{u}}{dt} = \widetilde{A}_n \widetilde{u} + Q_1(t) + Q_2(t), \\ \widetilde{u}|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{35}$$

где

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} g(t,\widetilde{z}_n(t,\tau_2)) - g(t,\widetilde{x}_n(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{n-1}{\tau_2\alpha_2(n)}\widetilde{z}_2(t,\tau_2) \\ \dfrac{n-1}{\tau_2\alpha_3(n)}\widetilde{z}_3(t,\tau_2) - \dfrac{n-1}{\tau_2\alpha_2(n)}\widetilde{z}_2(t,\tau_2) \\ \vdots \\ -\dfrac{n-1}{\tau_2\alpha_2(n-1)}\widetilde{z}_{n-1}(t,\tau_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ниже для компонент $\widetilde{u}_j(t,\tau_2)$, $j = 1,2,\ldots,n$, вектор-функции $\widetilde{u}(t,\tau_2)$ мы установим ряд оценок.

Теорема 4. *Для $\widetilde{u}_j(t,\tau_2)$ на любом отрезке $[0,R]$ выполнена следующая оценка:*

$$|\widetilde{u}_j(t,\tau_2)| \leqslant \frac{\tau_1\alpha_j(n)}{(n-1)}\left(\frac{2jG\tau}{\tau_2} + L\max_{t\in[0,R]}|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)|\right), \quad j = 1,2,\ldots,n-1, \tag{36}$$

где $\alpha_j(n) = 1 + \rho_j(n-1)^{-\gamma_j}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \max\limits_{t\in[0,R]}|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)|$. Поскольку вектор-функция $\widetilde{u}(t,\tau_2)$ является решением задачи Коши (35), то для её первой компоненты $\widetilde{u}_1(t,\tau_2)$ имеет место тождество

$$\frac{d\widetilde{u}_1(t,\tau_2)}{dt} \equiv -\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{u}_1(t,\tau_2) + Q_{1,1}(t) + Q_{2,1}(t),$$

где $Q_{1,1}(t)$, $Q_{2,1}(t)$ — первые компоненты вектор-функций $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ соответственно. Интегрируя это тождество от 0 до t, с учётом начальных данных получаем

$$\widetilde{u}_1(t,\tau_2) \equiv \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}(t-s)\right)(Q_{1,1}(s) + Q_{2,1}(s))ds.$$

Из условий на $g(t,z)$ вытекает оценка $|Q_{1,1}(t)| \leqslant L\max\limits_{t\in[0,R]}|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| = L\mathcal{M}$. В силу леммы 2 для компонент вектор-функции $Q_2(t)$ справедливо неравенство

$$|Q_{2,j}(t)| \leqslant 2\frac{G\tau}{\tau_2}, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{37}$$

Следовательно, для $\widetilde{u}_1(t,\tau_2)$ имеет место оценка

$$|\widetilde{u}_1(t,\tau_2)| \leqslant \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}(t-s)\right)\left(L\mathcal{M}+2\frac{G\tau}{\tau_2}\right)ds \leqslant \frac{\tau_1\alpha_1(n)}{(n-1)}\left(2\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}\right),$$

т. е. оценка (36) выполнена для $\widetilde{u}_1(t,\tau_2)$.

Рассмотрим $\widetilde{u}_2(t,\tau_2)$. В силу системы в (35) имеет место тождество

$$\frac{d\widetilde{u}_2(t,\tau_2)}{dt} \equiv -\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}\widetilde{u}_2(t,\tau_2)+\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{u}_1(t,\tau_2)+Q_{2,2}(t).$$

Интегрируя от 0 до t, получаем

$$\widetilde{u}_2(t,\tau_2) \equiv \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}(t-s)\right)\left(\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{u}_1(s,\tau_2)+Q_{2,2}(s)\right)ds.$$

Учитывая оценку на $\widetilde{u}_1(t,\tau_2)$, имеем

$$|\widetilde{u}_2(t,\tau_2)| \leqslant \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}(t-s)\right)\left(2\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}+2\frac{G\tau}{\tau_2}\right)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_1\alpha_2(n)}{(n-1)}\left(4\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}\right).$$

Следовательно, для $\widetilde{u}_2(t,\tau_2)$ оценка (36) доказана.

Покажем теперь, что если для $\widetilde{u}_{k-1}(t,\tau_2)$ неравенство (36) выполнено, то оно будет справедливо для $\widetilde{u}_k(t,\tau_2)$, $k<n$. В силу (36) имеем

$$|\widetilde{u}_{k-1}(t,\tau_2)| \leqslant \frac{\tau_1\alpha_{k-1}(n)}{(n-1)}\left(2(k-1)\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}\right).$$

Используя k-е уравнение системы в (35), для $\widetilde{u}_k(t,\tau_2)$ получим тождество

$$\widetilde{u}_k(t,\tau_2) \equiv \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_k(n)}(t-s)\right)\left(\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{k-1}(n)}\widetilde{u}_{k-1}(s,\tau_2)+Q_{2,k}(s)\right)ds.$$

С учётом оценки на $Q_{2,k}(t)$ и $\widetilde{u}_{k-1}(t,\tau_2)$ получаем

$$|\widetilde{u}_k(t,\tau_2)| \leqslant \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_k(n)}(t-s)\right)\left(2(k-1)\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}+2\frac{G\tau}{\tau_2}\right)ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_1\alpha_k(n)}{(n-1)}\left(2k\frac{G\tau}{\tau_2}+L\mathcal{M}\right).$$

Следовательно, для $\widetilde{u}_k(t,\tau_2)$ оценка (36) выполнена. В силу принципа индукции неравенство (36) справедливо для всех $\widetilde{u}_j(t,\tau_2)$, $j=1,2,\dots,n-1$.

Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Для* $\widetilde{u}_n(t,\tau_2)$ *на любом отрезке* $[0,R]$ *выполнена оценка*

$$|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| \leqslant \frac{2(n-1)G\tau}{\theta\tau_2}e^{LR}.$$

Доказательство. Отметим, что из определения $Q_{1,1}(t)$ в силу условия Липшица на $g(t,z)$ имеем $|Q_{1,1}(t)| \leqslant L|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)|$. Тогда можно получить следующие оценки для компонент вектор-функции $\widetilde{u}(t,\tau_2)$:

$$|\widetilde{u}_j(t,\tau_2)| \leqslant 2j\frac{G\tau\tau_1\alpha_j(n)}{\tau_2(n-1)} + L\int\limits_0^t \psi_j(t-s)|\widetilde{u}_n(s,\tau_2)|ds, \quad j=1,2,\dots,n-1, \tag{38}$$

где

$$\psi_1(t) = \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}t\right),$$

$$\psi_j(t) = \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{j-1}(n)}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_j(n)}(t-\xi)\right)\psi_{j-1}(\xi)d\xi, \quad j=2,3,\dots,n-1.$$

Действительно, используя первое уравнение системы в (35) и применяя полученные выше оценки для $Q_{1,1}(t)$, $Q_{2,1}(t)$, мы получаем неравенство

$$|\widetilde{u}_1(t,\tau_2)| \leqslant \frac{2G\tau\tau_1\alpha_1(n)}{\tau_2(n-1)} + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}(t-s)\right)|Q_{1,1}(s)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2G\tau\tau_1\alpha_1(n)}{\tau_2(n-1)} + L\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}(t-s)\right)|\widetilde{u}_n(s,\tau_2)|ds.$$

Рассмотрим $\widetilde{u}_2(t,\tau_2)$. В силу второго уравнения системы в (35) имеем тождество

$$\widetilde{u}_2(t,\tau_2) \equiv \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}(t-s)\right)\left(\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\widetilde{u}_1(s,\tau_2) + Q_{2,2}(s)\right)ds.$$

Используя неравенство (37) для $Q_{2,2}(t)$, получаем

$$|\widetilde{u}_2(t,\tau_2)| \leqslant \frac{2G\tau\tau_1\alpha_2(n)}{\tau_2(n-1)} + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}(t-s)\right)\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}|\widetilde{u}_1(s,\tau_2)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4G\tau\tau_1\alpha_2(n)}{\tau_2(n-1)} + L\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}\int\limits_0^t\int\limits_0^s \exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_2(n)}(t-s)\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}(s-\xi)\right)|\widetilde{u}_n(\xi,\tau_2)|d\xi ds.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая определение $\psi_2(t)$, получаем оценку вида (38) для $\widetilde{u}_2(t,\tau_2)$:

$$|\widetilde{u}_2(t,\tau_2)| \leqslant \frac{4G\tau\tau_1\alpha_2(n)}{\tau_2(n-1)} + L\int\limits_0^t \psi_2(t-s)|\widetilde{u}_n(s,\tau_2)|ds.$$

Аналогично, используя оценку, установленную на $(j-1)$-м шаге, получаем (38) на j-м шаге, $j=3,\dots,n-1$. В силу системы для $\widetilde{u}_n(t,\tau_2)$ справедливо тождество

$$\frac{d\widetilde{u}_n(t,\tau_2)}{dt} \equiv -\theta\widetilde{u}_n(t,\tau_2) + \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\widetilde{u}_{n-1}(t,\tau_2).$$

С учётом начальных данных и оценки на $\widetilde{u}_{n-1}(t,\tau_2)$ получаем

$$|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| \leqslant \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}|\widetilde{u}_{n-1}(s,\tau_2)|ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}\left(2(n-1)\frac{G\tau}{\tau_2} + L\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\int\limits_0^s \psi_{n-1}(s-\xi)|\widetilde{u}_n(\xi,\tau_2)|d\xi\right)ds \leqslant$$

$$\leqslant 2(n-1)\frac{G\tau}{\theta\tau_2} + L\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}\int\limits_0^s \psi_{n-1}(s-\xi)|\widetilde{u}_n(\xi,\tau_2)|d\xi ds.$$

Меняя порядок интегрирования и делая замену в интеграле, получаем

$$|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| \leqslant 2(n-1)\frac{G\tau}{\theta\tau_2} + L\int\limits_0^t \Phi(t-\xi)|\widetilde{u}_n(\xi,\tau_2)|d\xi, \tag{39}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}\psi_{n-1}(s)ds.$$

Нетрудно проверить, что $0 \leqslant \Phi(t) \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$. Действительно, заметим, что

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{n-1}{\tau_1\alpha_k(n)}\psi\left(t,-\theta,-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)},\dots,-\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\right),$$

где

$$\psi(t,\lambda_1) = e^{\lambda_1 t},$$

$$\psi\left(t,\lambda_1,\dots,\lambda_j\right) = \int\limits_0^t \exp\left(\lambda_j(t-s)\right)\psi\left(s,\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1}\right)ds, \quad j=2,3,\dots,n, \quad \lambda_j<0.$$

Очевидно, что каждая функция $\psi\left(t,\lambda_1,\dots,\lambda_j\right)$ неотрицательна. Следовательно, $\Phi(t) \geqslant 0$. По определению $\psi(t,\lambda_1) = \psi(t,-\theta) = e^{-\theta t} \leqslant 1$. Тогда имеют место соотношения

$$\psi(t,-\theta,\lambda_2) = \int\limits_0^t \exp\left(\lambda_2(t-s)\right)\psi(s,-\theta)ds \leqslant \int\limits_0^t \exp\left(\lambda_2(t-s)\right)ds \leqslant -\frac{1}{\lambda_2}.$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\psi\left(t,-\theta,\lambda_2,\dots,\lambda_j\right) \leqslant \prod_{k=2}^{j}\frac{1}{(-\lambda_k)}.$$

Следовательно,

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n-1}{\tau_1 \alpha_k(n)} \psi\left(t, -\theta, -\frac{n-1}{\tau_1\alpha_1(n)}, \ldots, -\frac{n-1}{\tau_1\alpha_{n-1}(n)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n-1}{\tau_1\alpha_k(n)} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tau_1\alpha_j(n)}{n-1} = 1.$$

Тогда из (39) имеем неравенство

$$|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| \leqslant 2(n-1)\frac{G\tau}{\theta\tau_2} + L\int_0^t |\widetilde{u}_n(\xi,\tau_2)| d\xi.$$

Используя неравенство Гронуолла, при $t \in [0, R]$ получаем

$$|\widetilde{u}_n(t,\tau_2)| \leqslant 2(n-1)\frac{G\tau}{\theta\tau_2}e^{Lt} \leqslant 2(n-1)\frac{G\tau}{\theta\tau_2}e^{LR}.$$

Теорема 5 доказана. □

Из теорем 4, 5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Последовательности* $\{\widetilde{z}_j(t,\tau_2)\}$ *равномерно сходятся на любом отрезке* $[0, R]$: $\widetilde{z}_j(t,\tau_2) \to \widetilde{x}_j(t)$, $\tau_2 \to \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *где функции* $\widetilde{x}_j(t)$ *являются компонентами решения* $\widetilde{x}(t)$ *задачи Коши* (34), *причём*

$$\max_{t\in[0,R]} |\widetilde{z}_j(t,\tau_2) - \widetilde{x}_j(t)| \leqslant \frac{d_j}{\tau_2}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

константы $d_j > 0$ *не зависят от* τ_2.

На основе установленных результатов ниже мы изучим свойства решения $\widetilde{z}^n(t,\tau_2)$ задачи Коши вида (10) при совместном изменении размерности $n \gg 1$ и параметра $\tau_2 \gg 1$. Компоненты решения будем обозначать через $\widetilde{z}_j^n(t,\tau_2)$. Сначала сформулируем известный результат для компонент $\widetilde{x}_j^n(t)$ решения $\widetilde{x}^n(t)$ задачи Коши (34) из работы [13].

Теорема 7. [13]. *Для компоненты* $\widetilde{x}_j^n(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, *на любом отрезке* $[0, T]$ *имеет место оценка*

$$|\widetilde{x}_j^n(t)| \leqslant \frac{G\tau_1\alpha_j(n)}{n-1}.$$

Теорема 8. [13]. *Последовательность* $\{\widetilde{x}_n^n(t)\}$ *равномерно сходится на любом отрезке* $[0, T]$: $\widetilde{x}_n^n(t) \to h(t)$, $n \to \infty$, *причём функция* $h(t)$ *является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием:*

$$\begin{cases} \dfrac{dh(t)}{dt} = -\theta h(t) + g(t-\tau_1, h(t-\tau_1)), \quad t > \tau_1, \\ h(t) = be^{-\theta t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ h(\tau_1 + 0) = be^{-\theta\tau_1}. \end{cases} \tag{40}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 9. *Пусть $T > 0$ такое, что*

$$\frac{L(1-e^{-\theta T})}{\theta} < \frac{1}{2}. \tag{41}$$

Тогда имеют место равномерные сходимости на $[0, T]$:

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\tau_2\to\infty} \widetilde{z}_j^n(t,\tau_2) = \lim_{\tau_2\to\infty}\lim_{n\to\infty} \widetilde{z}_j^n(t,\tau_2) \equiv 0, \quad j = 1,2,\dots,n-1, \tag{42}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\tau_2\to\infty} \widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) = \lim_{\tau_2\to\infty}\lim_{n\to\infty} \widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) = h(t), \tag{43}$$

где $h(t)$ — решение начальной задачи (40).

Доказательство. Из оценки (16) следует сходимость $\widetilde{z}_j^n(t,\tau_2) \to 0$, $n \to \infty$, $j = 1,2,\dots,n-1$, поэтому $\lim\limits_{\tau_2\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{z}_j^n(t,\tau_2) \equiv 0$. В силу теорем 6, 7 имеем

$$\widetilde{z}_j^n(t,\tau_2) \to \widetilde{x}_j^n(t), \quad \tau_2 \to \infty, \quad j = 1,2,\dots,n-1,$$

$$\widetilde{x}_j^n(t) \to 0, \quad n \to \infty, \quad j = 1,2,\dots,n-1.$$

Следовательно, соотношения (42) доказаны.

Покажем теперь справедливость соотношений (43). В силу теоремы 6 имеет место равномерная сходимость: $\widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) \to \widetilde{x}_n^n(t)$, $\tau_2 \to \infty$. Используя теорему 8, получаем, что $\widetilde{x}_n^n(t) \to h(t)$, $n \to \infty$, где $h(t)$ — решение начальной задачи (40). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{\tau_2\to\infty} \widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) = h(t)$.

В силу теоремы 3 при $\tau_2 > 2\tau_1$ имеет место равномерная сходимость на отрезке $[0, T]$: $\widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) \to y(t,\tau_2)$, $n \to \infty$, где T определяется неравенством (41), $y(t,\tau_2)$ — решение начальной задачи (12). Поскольку

$$\tau = \frac{\tau_2\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \to \tau_1, \quad \tau_2 \to \infty,$$

то в силу непрерывной зависимости решения начальной задачи от параметра на $[0, T]$ имеет место сходимость $y(t,\tau_2) \to h(t)$, $\tau_2 \to \infty$, где $h(t)$ — решение начальной задачи (40). Следовательно, $\lim\limits_{\tau_2\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{z}_n^n(t,\tau_2) = h(t)$. Теорема 9 доказана. □

Список литературы

1. **Марри Дж.** Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М. : Мир, 1983.
2. **Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.** Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
3. **Хидиров Б. Н.** Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
4. **Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.** Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
5. **Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.** Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
6. **Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.** О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 34–46.

7. **Демиденко Г. В., Мельник И. А.** Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
8. **Demidenko G. V., Kotova T. V.** Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // Journal of Analysis and Applications. 2010. Vol. 8, no. 2. P. 63–74.
9. **Демиденко Г. В.** О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Мат. форум. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
10. **Демиденко Г. В.** Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
11. **Матвеева И. И., Мельник И. А.** О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.
12. **Уварова И. А.** Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 111–121.
13. **Демиденко Г. В., Уварова И. А.** Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 2. С. 47–60.
14. **Demidenko G. V.** Systems of differential equations of high dimension, delay and partial differential equations // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25, no. 1–2. P. 21–34.
15. **Демиденко Г. В.** Метод решения одной биологической задачи большой размерности // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 4. С. 42–53.
16. **Matveeva I. I.** On properties of solutions to a system of differential equations with a parameter // Journal of Analysis and Applications. 2009. Vol. 7, no. 2. P. 75–84.

Поступила в редакцию 15.08.2023.
После переработки 24.09.2023.

Сведения об авторах

Денисюк Виктор Андреевич, аспирант, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: v.denisyuk@g.nsu.ru.

Матвеева Инесса Изотовна, доктор физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; доцент кафедры дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: i.matveeva@g.nsu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 4. P. 483–501.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-483-501

PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

V.A. Denisiuk[1,a], **I.I. Matveeva**[1,2,b]

[1] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[a] *v.denisyuk@g.nsu.ru,* [b] *i.matveeva@g.nsu.ru*

A system of nonlinear ordinary differential equations of large dimension with a parameter is considered. We investigate asymptotic properties of solutions to the system in dependence on the growth of the number of the equations or parameter. We prove that, for sufficiently large number of differential equations, the last component of the solution to the Cauchy problem is an approximate solution to an initial problem for one delay differential equation. For a fixed number of equations and a sufficiently large parameter, the solution to the Cauchy problem for the system is an approximate solution to the Cauchy problem for a simpler system.

Keywords: *system of ordinary differential equations of large dimension, asymptotic properties of solutions, delay differential equation.*

References

1. **Murray J.D.** *Lectures on Nonlinear-Differential-Equation Models in Biology.* Oxford, Clarendon Press, 1977.
2. **Likhoshvai V.A., Fadeev S.I., Demidenko G.V., Matushkin Y.G.** Modelirovaniye uravneniyem s zapazdyvayushchim argumentom mnogostadiynogo sinteza bez vetvleniya [Modeling multistage synthesis without branching by a delay equation]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian Journal of industrial mathematics], 2004, vol. 7, no. 1, pp. 73–94. (In Russ.).
3. **Hidirov B.N.** Ob odnom podkhode k modelirovaniyu regulyatornykh mekhanizmov zhivykh sistem [On one approach to modeling of living system regulatory mechanisms]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling], 2004, vol. 16, no. 7, pp. 77–91. (In Russ.). (2004).
4. **Demidenko G.V., Kolchanov N.A., Likhoshvai V.A., Matushkin Yu.G., Fadeev S.I.** Mathematical modeling of regular contours of gene networks. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 12, pp. 2166–2183.
5. **Demidenko G.V., Likhoshvai V.A., Kotova T.V., Khropova Yu.E.** On one class of systems of differential equations and on retarded equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 45–54.
6. **Demidenko G.V., Likhoshvai V.A., Mudrov A.V.** On the relationship between solutions of delay differential equations and infinite-dimensional systems of differential equations. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 33–45.
7. **Demidenko G.V., Mel'nik I.A.** On a method of approximation of solutions to delay differential equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 3, pp. 419–434.
8. **Demidenko G.V., Kotova T.V.** Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters. *Journal of Analysis and Applications*, 2010, vol. 8, no. 2, pp. 63–74.

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008).

9. **Demidenko G.V.** O klassakh sistem differentsial'nykh uravneniy vysokoy razmernosti i uravneniyakh s zapazdyvayushchim argumentom [On classes of systems of differential equations of a large dimension and delay equations]. *Itogi Nauki. Yug Rossii. Ser. Matematicheskiy Forum* [Results of Science. South of Russia. Ser. Mathematical Forum]. Vol. 5, Vladikavkaz, 2011. Pp. 45–56.
10. **Demidenko G.V.** Systems of differential equations of higher dimension and delay equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1021–1028.
11. **Matveeva I.I., Mel'nik I.A.** On the properties of solutions to a class of nonlinear systems of differential equations of large dimension. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 248–258.
12. **Uvarova I.A.** On a system of nonlinear differential equations of high dimension. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 8, no. 4, pp. 594–603.
13. **Demidenko G.V., Uvarova I.A.** A class of systems of ordinary differential equations of large dimension. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2016, vol. 10, no. 2, pp. 179–191.
14. **Demidenko G.V.** Systems of differential equations of high dimension, delay and partial differential equations. *Functional Differential Equations*, 2018, vol. 25, no. 1–2, pp. 21–34.
15. **Demidenko G.V.** A method for solving a biological problem of large dimension. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2022, vol. 16, no. 4, pp. 621–631.
16. **Matveeva I.I.** On properties of solutions to a system of differential equations with a parameter. *Journal of Analysis and Applications*, 2009, vol. 7, no. 2, pp. 75–84.

Article received 15.08.2023.
Corrections received 24.09.2023.