МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 4. С. 469–482.

УДК 517.922 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ЦИЛИНДРЕ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. Н. Бондарь[1,2,a], **Г. В. Демиденко**[1,2,b], **В. С. Нурмахматов**[2,c]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[a] *b_lina@ngs.ru*, [b] *demidenk@math.nsc.ru*, [c] *v.s.nurmuhammad@gmail.com*

Рассматривается первая краевая задача в цилиндре для псевдогиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Доказывается теорема о существовании и единственности обобщённого решения краевой задачи в соболевском пространстве. Получены оценки на решение.

Ключевые слова: *обобщённое решение, псевдогиперболическое уравнение, соболевские пространства, метод Галёркина.*

Введение

В работе рассматривается первая краевая задача в цилиндре для уравнения

$$D_t^2 u - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}\left(\alpha_i(x) D_{x_i} D_t^2 u\right) + \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{x_i x_j}\left(a_{ij}(x) D^2_{x_i x_j} u\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}(b_i(x) D_{x_i} u) = f(t,x), \tag{1}$$

являющегося не разрешённым относительно старшей производной и входящего в класс псевдогиперболических уравнений, введённый в монографии [1].

Примерами уравнений вида (1) являются:
— уравнение, описывающее крутильные колебания упругого стержня (см., например, [2])

$$\rho I_p D_t^2 \theta - \rho I_d D_t^2 D_x^2 \theta + E I_d D_x^4 \theta - \mu I_k D_x^2 \theta = f(t,x), \tag{2}$$

где $\theta(t,x)$ — угол поворота сечения или угол закрутки, I_p — полярный момент инерции, μ — константа Ламе, I_k — момент инерции при кручении, E — модуль Юнга, I_d — момент депланации (в литературе уравнение (2) называют уравнением Власова [2; 3]);
— уравнение, описывающее продольные колебания толстого короткого стержня

$$\rho S(x) D_t^2 u - D_x\Big(\rho \nu^2 I_p(x) D_x D_t^2 u\Big) + D_x^2\Big(\mu \nu^2 I_p(x) D_x^2 u\Big) - \\ - D_x\Big(E S(x) D_x u\Big) = \rho S(x) f(t,x), \tag{3}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

где $u(t,x)$ — продольные перемещения стержня, ρ — массовая плотность стержня, $S(x)$ — площадь поперечного сечения, $I_p(x)$ — полярный момент инерции, η — коэффициент Пуассона (в литературе уравнение (3) называют уравнением Релея — Бишопа [4–6]);
— многомерный аналог уравнения Власова, Релея — Бишопа

$$(I - a_1\Delta)D_t^2 u + a_2\Delta^2 u = f(t,x), \quad a_1,\, a_2 > 0.$$

Теория уравнений, не разрешённых относительно старшей производной, начала развиваться в середине прошлого века после публикации С. Л. Соболева по динамике вращающейся жидкости (см. его работы в [7]). В настоящее время имеется большое количество публикаций, посвящённых изучению различных задач для таких уравнений. На эту тему также имеется более десятка монографий (см. например, [1; 8–10]). Для псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами достаточно полно изучена задача Коши (см., например, [1; 11–14]). Однако работ по теории краевых задач для псевдогиперболических уравнений пока немного (см., например, [6; 15–17]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1) в цилиндрической области $Q_T = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \quad t \in (0,T), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n\right\}$:

$$\begin{aligned}
&D_t^2 u - \sum_{i=1}^n D_{x_i}\left(\alpha_i(x) D_{x_i} D_t^2 u\right) + \sum_{i,j=1}^n D_{x_i x_j}^2 \left(a_{ij}(x) D_{x_i x_j}^2 u\right) - \\
&- \sum_{i=1}^n D_{x_i}(b_i(x) D_{x_i} u) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\
&u\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \\
&u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂G и ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G, коэффициенты уравнения — вещественнозначные функции, при этом

$$\alpha_i(x),\, b_i(x) \in C^1(\overline{G}), \quad a_{ij}(x) \in C^2(\overline{G}),$$

$$\alpha_i(x) \geqslant \alpha_0 > 0,\, b_i(x) \geqslant 0, \quad a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i^2\xi_j^2 \geqslant a_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^4 > 0,$$

$$S_{\text{бок}} = \left\{(t,x) \in \overline{Q_T} :\ t \in (0,T), \quad x \in \partial G\right\}.$$

При определении обобщённых решений задачи (4) воспользуемся характерным свойством классических решений. Предположим, что существует классическое решение задачи (4) $u(t,x) \in C^{2,4}(\overline{Q_T})$, $D_t^2 D_{x_j}^2 u(t,x) \in C(\overline{Q_T})$. Тогда имеем тождество

$$D_t^2 u(t,x) - \sum_{i=1}^n D_{x_i}(b_i(x) D_{x_i} u(t,x)) - \sum_{i=1}^n D_{x_i}\left(\alpha_i(x) D_{x_i} D_t^2 u(t,x)\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n D_{x_i x_j}^2 \left(a_{ij}(x) D_{x_i x_j}^2 u\right) \equiv f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T.$$

Умножим тождество на произвольную функцию $v(t,x) \in W_2^{1,2}(Q_T)$, такую, что существуют $D^2_{tx_i}v(t,x)$ в Q_T, более того, $D^2_{tx_i}v(t,x) \in L_2(Q_T)$, $i = 1,2,\dots,n$, удовлетворяющую условиям

$$v|_{t=T} = 0,\ v\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \tag{5}$$

и проинтегрируем по цилиндру Q_T. Получим

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg(D_t(D_t uv) - D_t u D_t v -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[D_{x_i}\left(\alpha_i(x)D_{x_i}D_t^2 uv\right) - D_t(\alpha_i(x)D^2_{tx_i}uD_{x_i}v) + \alpha_i(x)D^2_{tx_i}uD^2_{tx_i}v\Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Big[D_{x_i}\left(D_{x_j}(a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}u)v\right) - D_{x_j}\left(a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}uD_{x_i}v\right) + a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}uD^2_{x_ix_j}v\Big]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\big[D_{x_i}(b_i(x)D_{x_i}uv) - b_i(x)D_{x_i}uD_{x_i}v\big]\Bigg)d\bar{x} = \int\limits_{Q_T} fv\,d\bar{x}.$$

В силу (5) имеем $D_{x_i}v\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0$, $i = 1,2,\dots,n$. Учитывая эти равенства, (5) и используя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\int\limits_{Q_T}\Big[-D_tuD_tv - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)D^2_{tx_i}uD^2_{tx_i}v + \sum_{i=1}^{n}b_i(x)D_{x_i}uD_{x_i}v + \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}uD^2_{x_ix_j}v\Big]d\bar{x}$$

$$= \int\limits_{Q_T} fv\,d\bar{x} + \int\limits_{G}\Bigg(\varphi_2(x)v(0,x) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)D_{x_i}\varphi_2(x)D_{x_i}v(0,x)\Bigg)dx,\ \bar{x} = (t,x), \tag{6}$$

где $v(0,x) = v|_{t=0}$ — след функции $v(t,x) \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $D^2_{tx_i}v \in L_2(Q_T)$, на нижнем основании цилиндра Q_T, $D_{x_i}v(0,x) = D_{x_i}v|_{t=0}$ — след функции $D_{x_i}v(t,x) \in W_2^1(Q_T)$.

Обозначим $W^{1,2}_{2,add}(Q_T) = \{u(t,x) \in W_2^{1,2}(Q_T) : \exists\, D_t\nabla_x u(t,x) \in L_2(Q_T)\}$. Сформулируем понятие обобщённого решения краевой задачи (4).

Определение 1. Пусть $f(t,x) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_1(x) \in \mathring{W}_2^2(G)$, $\varphi_2(x) \in \mathring{W}_2^1(G)$. Функция $u(t,x) \in W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$, такая, что

$$u\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi_1(x), \tag{7}$$

называется *обобщённым решением краевой задачи* (4), если для любой функции $v(t,x) \in W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$, удовлетворяющей (5), имеет место равенство (6).

Теорема 1. *Краевая задача* (4) *не может иметь более одного обобщённого решения.*

Доказательство единственности проводится по стандартной схеме (см., например, монографию [18]).

Теорема 2. *Пусть* $f(t,x) \in L_2(Q_T)$, $\varphi_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$ *и* $\varphi_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$. *Тогда краевая задача* (4) *имеет единственное обобщённое решение* $u(t,x) \in W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$, *при этом*

$$\|u(t,x), W_2^{1,2}(Q_T)\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_{tx_i} u(t,x), L_2(Q_T)\| \leqslant c\Big(\|f(t,x), L_2(Q_T)\|+$$

$$+\|\varphi_1(x), W_2^2(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^1(G)\|\Big), \tag{8}$$

где $c > 0$ — *константа, не зависящая от* f, $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$.

2. Доказательство разрешимости краевой задачи

Доказательство существования обобщённого решения краевой задачи (4) будем проводить по известной схеме, строя последовательность приближённых решений методом Галёркина (см., например, [18–20]). Отметим, что в силу теоремы 1 достаточно рассмотреть случай, когда

$$\|\varphi_1(x), W_2^2(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^1(G)\| + \|f(t,x), L_2(Q_T)\| \neq 0.$$

Пусть $\{v_p(x)\}$ — базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$. Можно считать, что $v_p(x) \in C_0^\infty(G)$. Используя процесс ортогонализации Грама — Шмидта, будем предполагать, что

$$\int_G \nabla v_p(x) \nabla v_k(x)\, dx = \delta_k^p, \quad p, k = 1, 2, \dots,$$

где δ_k^p — символ Кронекера.

Последовательность приближённых решений $\{u^m(t,x)\}$ будем искать в виде

$$u^m(t,x) = \sum_{p=1}^{m} c_p^m(t) v_p(x), \tag{9}$$

при этом коэффициенты $c_p^m(t) \in W_2^2(0,T)$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\int_G \Big[D_t^2 u^m - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}(b_i(x) D_{x_i} u^m) - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}\left(\alpha_i(x) D_{x_i} D_t^2 u^m\right) + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{x_i x_j}\left(a_{ij}(x) D^2_{x_i x_j} u^m\right)\Big] v_k(x) dx = \int_G f(t,x) v_k(x)\, dx, \quad k = 1, 2, \dots, m,\end{gathered} \tag{10}$$

и начальными условиями

$$c_p^m(t)\,\big|_{t=0} = \varphi_{1p}^m, \tag{11}$$

$$D_t c_p^m(t)|_{t=0} = \varphi_{2p} = \langle \varphi_2(x), v_p(x)\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)} = \int_G \nabla\varphi_2(x) \nabla v_p(x)\, dx, \tag{12}$$

где φ_{1p}^m — коэффициенты в представлении функций

$$\varphi_1^m(x) = \sum_{p=1}^{m} \varphi_{1p}^m v_p(x), \tag{13}$$

таких, что
$$\|\varphi_1^m(x)-\varphi_1(x),\mathring{W}_2^2(G)\|\to 0,\quad m\to\infty. \tag{14}$$

Учитывая определение (9) функций $u^m(t,x)$ и равенства
$$-\int\limits_G D_{x_i}\big(b_i(x)D_{x_i}v_p(x)\big)v_k(x)\,dx=\int\limits_G b_i(x)D_{x_i}v_p(x)D_{x_i}v_k(x)\,dx,$$
$$\int\limits_G D^2_{x_ix_j}\left(a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}v_p(x)\right)v_k(x)dx=\int\limits_G a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}v_p(x)D^2_{x_ix_j}v_k(x)dx,$$
соотношения (10) можно переписать следующим образом:
$$\sum_{p=1}^m D_t^2c_p^m(t)\bigg(\int\limits_G v_p(x)v_k(x)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_G\alpha_i(x)D_{x_i}v_p(x)D_{x_i}v_k(x)\,dx\bigg)+$$
$$+\sum_{p=1}^m c_p^m(t)\bigg(\int\limits_G\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}v_p(x)D^2_{x_ix_j}v_k(x)dx+$$
$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_G b_i(x)D_{x_i}v_p(x)D_{x_i}v_k(x)dx\bigg)=\int\limits_G f(t,x)v_k(x)dx,\quad k=1,2,\dots,m, \tag{15}$$
а вводя обозначения
$$A=(a_{kp}),\quad B=(b_{kp}),\quad F^m(t)=\big(F_1(t),\dots,F_m(t)\big)^T,\quad c^m(t)=\big(c_1^m(t),\dots,c_m^m(t)\big)^T,$$
где
$$a_{kp}=\int\limits_G v_p(x)v_k(x)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_G\alpha_i(x)D_{x_i}v_p(x)D_{x_i}v_k(x)\,dx,$$
$$b_{kp}=\sum_{i,j=1}^n\int\limits_G a_{ij}(x)D^2_{x_ix_j}v_p(x)D^2_{x_ix_j}v_k(x)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_G b_i(x)D_{x_i}v_p(x)D_{x_i}v_k(x)dx,$$
$F_k(t)=\int\limits_G f(t,x)v_k(x)\,dx$, (15) можно переписать в виде
$$AD_t^2c^m+Bc^m=F^m(t),$$
причем, как следует из определения $u^m(t,x)$,
$$c^m(0)=c^{m0},\quad D_tc^m(0)=c^{m1},\quad c^{m0}=\big(\varphi_{11}^m,\dots,\varphi_{1m}^m\big)^T,\quad c^{m1}=\big(\varphi_{21},\dots,\varphi_{2m}\big)^T.$$

Итак, для нахождения вектор-функции $c^m(t)$ получили задачу Коши, при этом матрица A невырождена, поскольку она является матрицей Грама и $v_p(x)$, $p=1,2,\dots,m$, — линейно независимые в G. Следовательно, задача Коши переписывается в эквивалентной форме:
$$\begin{aligned}&D_t^2c^m+A^{-1}Bc^m=A^{-1}F^m(t),\\&c^m(0)=c^{m0},\quad D_tc^m(0)=c^{m1}.\end{aligned} \tag{16}$$
А поскольку вектор-функция $F^m(t)$ имеет компоненты из $L_2(0,T)$, то нетрудно показать, что существует единственное решение задачи Коши (16) — вектор-функция

$c^m(t) \in W_2^2(0,T)$, и последовательность галёркинских приближений u^m корректно определена.

Лемма 1. *Для любого $m \geqslant 1$ выполняется оценка*

$$\left(\int\limits_G \left[\left|D_t u^m(t,x)\right|^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x)\left|D_{x_i}u^m(t,x)\right|^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\left|D^2_{x_i t}u^m(t,x)\right|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\left|D^2_{x_i x_j}u^m(t,x)\right|^2\right] dx\right)^{1/2} \leqslant c\left(\|\varphi_1^m(x), W_2^2(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^1(G)\| + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \|f(\tau,x), L_2(G)\| d\tau\right), \tag{17}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от m, φ_1^m, φ_2 и f.

Доказательство. Умножая k-е соотношение (10) на $D_t c_k^m$ и суммируя по k от 1 до m, с учётом определения функции u^m получим

$$\int\limits_G \Big[D_t^2 u^m - \sum_{i=1}^n D_{x_i}(b_i(x)D_{x_i}u^m) - \sum_{i=1}^n D_{x_i}\left(\alpha_i(x)D_{x_i}D_t^2 u^m\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n D^2_{x_i x_j}\left(a_{ij}(x)D^2_{x_i x_j}u^m\right)\Big] D_t u^m(t,x)dx = \int\limits_G f(t,x)D_t u^m(t,x)\,dx, \ \ k = 1,2,\ldots,m.$$

Проинтегрируем от 0 до t и воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского, учитывая равенства

$$u^m(t,x)\big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad D_{x_j}u^m(t,x)\big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad j = 1,\ldots,n,$$

получим

$$\int\limits_0^t\int\limits_G \Big[D_\tau\big((D_\tau u^m(\tau,x))^2\big) + \sum_{i=1}^n b_i(x)D_\tau\big(\big(D_{x_i}u^m(\tau,x)\big)^2\big) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)D_\tau\big(\big(D^2_{x_i\tau}u^m(\tau,x)\big)^2\big)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_\tau\big(\big(D^2_{x_i x_j}u^m(\tau,x)\big)^2\big)\Big] d\tau\,dx = 2\int\limits_0^t\int\limits_G f(\tau,x)D_\tau u^m(\tau,x)\,dx\,d\tau.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, получаем

$$\int\limits_G \left[\left|D_t u^m(t,x)\right|^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x)\left|D_{x_i}u^m(t,x)\right|^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\left|D^2_{x_i t}u^m(t,x)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\left|D^2_{x_i x_j}u^m(t,x)\right|^2\right] dx = \int\limits_G \left[\left|D_t u^m(0,x)\right|^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x)\left|D_{x_i}u^m(0,x)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\left|D^2_{x_i t}u^m(0,x)\right|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\left|D^2_{x_i x_j}u^m(0,x)\right|^2\right] dx +$$

$$+2\int\limits_0^t\int\limits_G f(\tau,x)D_\tau u^m(\tau,x)\,dx\,d\tau \leqslant \int\limits_G\biggl[\bigl|D_t u^m(0,x)\bigr|^2+\sum_{i=1}^n b_i(x)\bigl|D_{x_i}u^m(0,x)\bigr|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\bigl|D^2_{x_it}u^m(0,x)\bigr|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\bigl|D^2_{x_ix_j}u^m(0,x)\bigr|^2\biggr]dx+$$

$$+2\int\limits_0^t \|f(\tau,x),L_2(G)\|\|D_\tau u^m(\tau,x),L_2(G)\|\,d\tau.$$

Отсюда в силу неравенства Гроноулла имеем

$$\Biggl(\int\limits_G\biggl[\bigl|D_t u^m(t,x)\bigr|^2+\sum_{i=1}^n b_i(x)\bigl|D_{x_i}u^m(t,x)\bigr|^2+\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\bigl|D^2_{x_it}u^m(t,x)\bigr|^2+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\bigl|D^2_{x_ix_j}u^m(t,x)\bigr|^2\biggr]dx\Biggr)^{1/2}\leqslant c\Biggl(\|u^m(0,x),W_2^2(G)\|+\|D_t u^m(0,x),W_2^1(G)\|+$$

$$+\int\limits_0^t\|f(\tau,x),L_2(G)\|d\tau\Biggr),$$

где константа $c>0$ не зависит от m. Следовательно, учитывая определения (11)–(13), свойства системы функций $\{v_p\}$ и неравенство Бесселя, получим оценку (17). Лемма доказана. □

Отметим, что из оценки (17) и условий (13), (14) следует, что существует натуральное число m_0, такое, что при $m\geqslant m_0$ выполняется неравенство

$$\Biggl(\int\limits_G\biggl[\bigl|D_t u^m(t,x)\bigr|^2+\sum_{i=1}^n b_i(x)\bigl|D_{x_i}u^m(t,x)\bigr|^2+\sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\bigl|D^2_{x_it}u^m(t,x)\bigr|^2+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\bigl|D^2_{x_ix_j}u^m(t,x)\bigr|^2\biggr]dx\Biggr)^{1/2}\leqslant 2c\Biggl(\|\varphi_1(x),W_2^2(G)\|+\|\varphi_2(x),W_2^1(G)\|+$$

$$+\int\limits_0^t\|f(\tau,x),L_2(G)\|d\tau\Biggr),\quad t\in[0,T].$$

Учитывая неравенство Стеклова и условия на коэффициенты уравнения, будем иметь при $m\geqslant m_0$

$$\|u^m(t,x),W_2^2(G)\|+\|D_t u^m(t,x),L_2(G)\|+\sum_{i=1}^n\|D^2_{x_it}u^m(t,x),L_2(G)\|\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{c}_1(G)\Biggl(\|\varphi_1(x),W_2^2(G)\|+\|\varphi_2(x),W_2^1(G)\|+\int\limits_0^t\|f(\tau,x),L_2(G)\|d\tau\Biggr),\quad t\in[0,T].$$

Проинтегрируем это неравенство по t от 0 до T. Тогда, учитывая формулу

$$\int_0^T \int_0^t F(\tau)d\tau dt = \int_0^T (T-t)F(t)dt,$$

получим при $m \geqslant m_0$

$$\|u^m(t,x), W_2^{1,2}(Q_T)\| + \sum_{i=1}^n \|D^2_{x_i t} u^m(t,x), L_2(Q_T)\| \leqslant$$

$$\leqslant c(G,T)\bigg(\|\varphi_1(x), W_2^2(G)\| + \|\varphi_2(x), W_2^1(G)\| + \|f(t,x), L_2(Q_T)\|\bigg).$$

Поскольку из любой ограниченной в $L_2(Q_T)$ последовательности можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к функции из $L_2(Q_T)$ (см., например, [21; 22]), то, учитывая теорему о слабой замкнутости оператора обобщённого дифференцирования (см., например, [20]), получим, что из $\{u^m\}$, $m \geqslant m_0$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$ к некоторой функции $u \in W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$. Будем обозначать эту подпоследовательность $\{u^{m_q}\}$.

Изучим некоторые свойства предельной функции u. Для простоты будем считать, что $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$.

Используя теорему Мазура (см., [23]) и слабо сходящуюся галёркинскую последовательность $\{u^{m_i}\}$, построим сильно сходящуюся последовательность $\{\tilde{u}^N\}$ выпуклых комбинаций:

$$\{\tilde{u}^N\} = \sum_{i=1}^N \lambda_{i,N} u^{m_i}(t,x), \quad \lambda_{i,N} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_{i,N} = 1, \tag{18}$$

$$\|\tilde{u}^N(t,x) - u(t,x), W_2^{1,2}(Q_T)\| \to 0, \quad N \to \infty, \tag{19}$$

$$\|D^2_{tx_j}\tilde{u}^N(t,x) - D^2_{tx_j}u(t,x), L_2(Q_T)\| \to 0, \quad N \to \infty, \quad j = 1, \dots, n. \tag{20}$$

Из определения (18) и свойств функций u^i будем иметь

$$\tilde{u}^N\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}^N\big|_{S_{\text{бок}}} = 0, \quad D_t\tilde{u}^N\big|_{t=0} = 0, \quad D_{x_i}\tilde{u}^N(t,x)\big|_{S_{\text{бок}}} = 0,$$

а также

$$\|\tilde{u}^N, W_2^{1,2}(Q_T)\| \leqslant \sum_{i=1}^N \lambda_{i,N}\|u^{m_i}, W_2^{1,2}(Q_T)\| \leqslant c\bigg(\sum_{i=1}^N \lambda_{i,N}\bigg)\|f(t,x), L_2(Q_T)\|,$$

т. е. для любого N

$$\|\tilde{u}^N, W_2^{1,2}(Q_T)\| \leqslant c\|f(t,x), L_2(Q_T)\|. \tag{21}$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^n \|D^2_{tx_i}\tilde{u}^N, L_2(Q_T)\| \leqslant c\|f(t,x), L_2(Q_T)\|. \tag{22}$$

Следовательно, учитывая (19)–(22), получим требуемую оценку (8) при $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$.

Учитывая теорему о следах для анизотропных соболевских пространств (см., например, [1; 24]), будем иметь

$$\|D_x^\beta\tilde{u}^N(t,x) - D_x^\beta u(t,x), L_2(S_{\text{бок}})\| \leqslant c\|\tilde{u}^N(t,x) - u(t,x), W_2^{1,2}(Q_T)\|, \quad |\beta| \leqslant 1,$$

$$\|(\tilde{u}^N(t,x)-u(t,x))\,\big|_{t=0}, L_2(G)\| \leqslant c\|\tilde{u}^N(t,x)-u(t,x), W_2^{1,2}(Q_T)\|,$$

следовательно, в силу (19) получим

$$u\,\big|_{S_{\text{бок}}}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\big|_{S_{\text{бок}}}=0, \quad u\,\big|_{t=0}=0.$$

Покажем, что предельная функция $u \in W_{2,add}^{1,2}(Q_T)$ является обобщённым решением первой краевой задачи (4).

Умножая k-е соотношение (10) на $a_k(t)$ и суммируя по k от 1 до l, $l \in \mathbb{N}$, с учётом обозначений

$$v^l(t,x)=\sum_{k=1}^{l} a_k(t)v_k(x), \quad a_k(t)\,\big|_{t=T}=0, \quad a_k(t) \in W_2^2(0,T), \tag{23}$$

получим

$$\int\limits_G \Big[D_t^2 u^{m_q} - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}(b_i(x)D_{x_i}u^{m_q}) - \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}\left(\alpha_i(x)D_{x_i}D_t^2 u^{m_q}\right) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n} D_{x_ix_j}^2\Big(a_{ij}(x)D_{x_ix_j}^2 u^{m_q}\Big)\Big]v^l(t,x)dx = \int\limits_G f(t,x)v^l(t,x)\,dx, \quad m_q \geqslant l.$$

Проинтегрируем от 0 до T и воспользуемся формулой Гаусса — Остроградского, учитывая, что $D_t u^{m_q}(t,x)\,\big|_{t=0}=0$ и $v^l(t,x)$ по построению удовлетворяет (5), будем иметь

$$\int\limits_0^T\int\limits_G \Big[-D_t u^{m_q}(t,x)D_t v^l(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_{x_i}u^{m_q}D_{x_i}v^l(t,x)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)D_{tx_i}^2 u^{m_q}(t,x)D_{tx_i}^2 v^l(t,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{x_ix_j}^2 u^{m_q}(t,x)D_{x_ix_j}^2 v^l(t,x)\Big]dx\,dt =$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_G f(t,x)v^l(t,x)\,dx\,dt, \quad m_q \geqslant l,$$

или, учитывая (18),

$$\int\limits_0^T\int\limits_G \Big[D_t\tilde{u}^N(t,x)D_t v^l(t,x) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_{x_i}\tilde{u}^N(t,x)D_{x_i}v^l(t,x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)D_{tx_i}^2\tilde{u}^N(t,x)D_{tx_i}^2 v^l(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_{x_ix_j}^2\tilde{u}^N(t,x)D_{x_ix_j}^2 v^l(t,x)\Big]dx\,dt =$$
$$=-\int\limits_0^T\int\limits_G f(t,x)v^l(t,x)\,dx\,dt, \quad N \geqslant l.$$

В силу того, что $\tilde{u}^N$ сильно сходится к u в норме $W_2^{1,2}(Q_T)$ и $D_{tx_i}^2\tilde{u}^N$ сильно сходится к $D_{tx_i}^2 u$, $i=1,\ldots,n$, в норме $L_2(Q_T)$ при $N\to\infty$, учитывая неравенство Гёльдера, получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_G \Big[(D_t\tilde{u}^N(t,x)-D_t u(t,x))D_t v^l(t,x) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(D_{x_i}\tilde{u}^N(t,x)-D_{x_i}u(t,x))D_{x_i}v^l(t,x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)(D^2_{tx_i}\tilde{u}^N(t,x)-D^2_{tx_i}u(t,x))D^2_{tx_i}v^l(t,x)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)(D^2_{x_ix_j}\tilde{u}^N(t,x)-D^2_{x_ix_j}u(t,x))D^2_{x_ix_j}v^l(t,x)\Bigg]dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg(\|\tilde{u}^N(t,x)-u(t,x),W_2^{1,2}(Q_T)\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\|D^2_{tx_i}\tilde{u}^N(t,x)-D^2_{tx_i}u(t,x),L_2(Q_T)\|\Bigg)\to 0$$

при $N\to\infty$. Следовательно, соотношение (6) выполняется для функций $v(t,x)=v^l(t,x)$, где $v^l(t,x)$ определены в (23).

Докажем справедливость (6) для произвольной функции $v(t,x)\in C^\infty(\overline{Q_T})$, удовлетворяющей (5).

Напомним, что $\{v_k(x)\}$ — базис в $\mathring{W}_2^2(G)$. Ортонормируем его в $\mathring{W}_2^2(G)$ и обозначим через $\{\tilde{v}_k(x)\}$. Следовательно, учитывая, что для $t\in(0,T)$ $v(t,x)\in\mathring{W}_2^2(G)$, $D_tv(t,x)\in\mathring{W}_2^2(G)$, получим следующие представления:

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{a_k}(t)\tilde{v}_k(x), \tag{24}$$

$$D_tv(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}D_t\tilde{a_k}(t)\tilde{v}_k(x), \tag{25}$$

где $\tilde{a}_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции v, т.е. $\tilde{a}_k(t)=\langle v(t,x),\tilde{v}_k(x)\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathring{W}_2^2(G)}$ — скалярное произведение в $\mathring{W}_2^2(G)$. Обозначим через

$$v_l(t,x)=\sum_{k=1}^{l}\tilde{a_k}(t)\tilde{v}_k(x),\quad D_tv_l(t,x)=\sum_{k=1}^{l}D_t\tilde{a_k}(t)\tilde{v}_k(x)$$

частичные суммы рядов (24) и (25) соответственно. Имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(|\tilde{a_k}(t)|^2+|D_t\tilde{a_k}(t)|^2\Bigg)=\|v(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2+\|D_tv(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2. \tag{26}$$

В силу неравенства Стеклова имеем

$$\|v(t,x)-v_l(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2+\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),L_2(G)\|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\|D^2_{tx_i}v(t,x)-D^2_{tx_i}v_l(t,x),L_2(G)\|^2\leqslant\|v(t,x)-v_l(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2+$$

$$+C\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2=\sum_{k=l+1}^{\infty}\Bigg(|\tilde{a_k}(t)|^2+C|D_t\tilde{a_k}(t)|^2\Bigg).$$

В силу (26) для любого $t\in(0,T)$ ряд сходится. Интегрируем по t от 0 до T

$$\int_0^T\Bigg[\|v(t,x)-v_l(t,x),\mathring{W}_2^2(G)\|^2+\|D_tv(t,x)-D_tv_l(t,x),L_2(G)\|^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\|D^2_{tx_i}v(t,x)-D^2_{tx_i}v_l(t,x),L_2(G)\|^2\Bigg]dt\leqslant\int_0^T\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(|\tilde{a_k}(t)|^2+C|D_t\tilde{a_k}(t)|^2\right)dt.$$

Следовательно,

$$\|v(t,x)-v_l(t,x),W_2^{1,2}(Q_T)\|\to 0,\quad \|D^2_{tx_i}v(t,x)-D^2_{tx_i}v_l(t,x),L_2(Q_T)\|\to 0 \qquad (27)$$

при $l\to\infty$. Полагая в (23), в качестве $v^l(t,x)$ частичную сумму ряда (24) и учитывая сходимости (27), получим требуемое равенство (6) для любой $v(t,x)\in C^\infty(\overline{Q_T})$, удовлетворяющей (5).

Поскольку $C^\infty(\overline{Q_T})$ всюду плотно в $W_2^{1,2}(Q_T)$ (см., например, [24]), то соотношение (6) выполняется для произвольной функции $v(t,x)\in W^{1,2}_{2,add}(Q_T)$, удовлетворяющей (5).

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
2. **Герасимов С. И., Ерофеев В. И.** Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров : ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2014.
3. **Власов В. З.** Тонкостенные упругие стержни. М.; Л. : Стройиздат, 1940.
4. **Bishop R. E. D.** Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. Vol. 3, no. 4. P. 280–293.
5. **Rao J. S.** Advanced Theory of Vibration Wiley. New Delhi: Eastern, 1992.
6. **Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М.** Продольные колебания стержня Рэлея — Бишопа // Докл. Акад. наук. 2010. Т. 435, № 5. С. 613–618.
7. **Соболев С. Л.** Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы (ред. Демиденко Г. В., Васкевич В. Л.). Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, филиал «Гео» изд-ва СО РАН, 2003.
8. **Favini A., Yagi A.** Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. New York, Basel, Hong Kong : Marcel Dekker, 1999.
9. **Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М. : Физматлит, 2007.
10. **Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston, Köln : VSP, 2003.
11. **Demidenko G.** The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // Selçuk Journal of Applied Mathematics. 2000. Vol. 1, no. 1. P. 47–62.
12. **Fedotov I., Volevich L. R.** The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian Journal of Mathematical Physics. 2006. Vol. 13, no. 3. P. 278–292.
13. **Демиденко Г. В.** Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
14. **Умаров Х. Г.** Задача Коши для уравнения крутильных колебаний нелинейно-упругого стержня бесконечной длины // Приклад. математика и механика. 2019. Т. 83, № 2. С. 249–264.
15. **Дюжева А. В.** Задача с интегральным условием I рода для уравнения четвёртого порядка // Вестн. Самар. ун-та. Естественнонауч. сер. 2019. Т. 25, № 1. С. 21–31.

16. **Bondar L. N., Nurmakhmatov V.** On solvability of the boundary value problem for one pseudohyperbolic equation // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1046–1057.
17. **Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В.** Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // Мат. труды. 2021. Т. 24, № 2. С. 3–23.
18. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973.
19. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М. : Наука, 1983.
20. **Демиденко Г. В.** Пространства Соболева и обобщённые решения. Новосибирск : РИЦ НГУ, 2015.
21. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974.
22. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М. : Физматлит, 2007.
23. **Иосида К.** Функциональный анализ. М. : Мир, 1967.
24. **Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.** Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск : Наука, 1984.

Поступила в редакцию 15.08.2023.
После переработки 24.09.2023.

Сведения об авторах

Бондарь Лина Николаевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; доцент кафедры дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: b_lina@ngs.ru

Демиденко Геннадий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Нурмахматов Вахоббиддин Саидаслон угли, аспирант, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: v.s.nurmuhammad@gmail.com

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 4. P. 469–482.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-469-482

BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CYLINDER FOR A PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION

L.N. Bondar[1,2,a], **G.V. Demidenko**[1,2,b], **V.S. Nurmakhmatov**[2,c]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*
[a]*b_ lina@ngs.ru,* [b]*demidenk@math.nsc.ru,* [c]*v.s.nurmuhammad@gmail.com*

The paper considers the first boundary value problem in a cylinder for a pseudohyperbolic equation with variable coefficients. A theorem on the existence of a unique generalized solution of a boundary value problem in a Sobolev space is proved. Estimates for the solution are obtained.

Keywords: *generalized solution, pseudohyperbolic equation, Sobolev spaces, Galerkin method.*

References

1. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* New York, Marcel Dekker, 2003.
2. **Gerasimov S.I., Erofeev V.I.** *Zadachi volnovoy dinamiki elementov konstruktsiy* [Problems of wave dynamics for structural elements]. Sarov, Rossiyskiy Federal'nyy Yadernyy Tsentr — Vserossiyskiy Nauchno-Issledovatel'skiy Institut Eksperimental'noy Fiziki [Russian Federal Nuclear Center — All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics], 2014. (In Russ.).
3. **Vlasov V.Z.** *Thin-walled Elastic Beams.* Washington, National Science Foundation, 1961.
4. **Bishop R.E.D.** Longitudinal waves in beams. *Aeronautical Quarterly*, 1952, vol. 3, no. 4. pp. 280–293.
5. **Rao J.S.** *Advanced Theory of Vibration.* New Delhi, Wiley Eastern, 1992.
6. **Fedotov I., Polyanin A.D., Shatalov M., Tenkam H.M.** Longitudinal vibration of a Rayleigh — Bishop rod. *Doklady Physics*, 2010, vol. 434, pp. 1–6.
7. **Sobolev S.L.** *Selected Works.* Vol. I: *Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas* (Eds G.V. Demidenko, V.L. Vaskevich). New York, Springer, 2006.
8. **Favini A., Yagi A.** *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces.* New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, 1999.
9. **Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D.** *Lineynye i nelineynye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and nonlinear equations of Sobolev type]. Moscow, Fizmatlit, 2007. (In Russ.).
10. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, VSP, 2003.
11. **Demidenko G.** The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 47–62.
12. **Fedotov I., Volevich L.R.** The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2006, vol. 13, no. 3, pp. 278–292.

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008).

13. **Demidenko G.V.** Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1028–1041.
14. **Umarov Kh.G.** Cauchy problem for the torsional vibration equation of a nonlinear-elastic rod of infinite length. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 5. pp. 726–740.
15. **Dyuzheva A.V.** Zadacha s integral'nym usloviyem I roda dlya uravneniya chetvyortogo poryadka [A problem with an integral condition of the first kind for an equation of the fourth order]. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Bulletin of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 1, pp. 21–31. (In Russ.).
16. **Bondar L.N., Nurmakhmatov V.** On solvability of the boundary value problem for one pseudohyperbolic equation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 1046–1057.
17. **Bondar L.N., Demidenko G.V.** Boundary value problems for one pseudohyperbolic equation in a quarter-plane. *Siberian Advances in Mathematics*, 2022, vol. 32, no. 1, pp. 1–16.
18. **Ladyzhenskaya O.A.** *Boundary Value Problems of Mathematical Physics.* New York, Springer-Verlag, 1985.
19. **Mikhailov V.P.** *Partial Differential Equations.* Moscow, Mir Publ., 1978.
20. **Demidenko G.V.** *Prostranstva Soboleva i obobshchyonnye resheniya* [Sobolev spaces and generalized solutions]. Novosibirsk, Novosibirsk State University, 2015. (In Russ.).
21. **Sobolev S.L.** *Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction.* Philadelphia, Gordon and Breach Science Publ., 1992.
22. **Trenogin V.A.** *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. (In Russ.).
23. **Yosida K.** *Functional Analysis.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1995.
24. **Uspenskii S.V., Demidenko G.V., Perepelkin V.G.** *Teoremy vlozheniya i prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam* [Embedding theorems and applications to differential equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1984. (In Russ.).

Article received 15.08.2023.
Corrections received 24.09.2023.