*Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 212–227.*

УДК 517.977 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18205

# ФОРМАЛЬНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ БИНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Е. А. Черепанова**

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
*gloomson13@mail.ru*

Рассматриваются неявные дифференциальные уравнения (бинарные дифференциальные уравнения) вида $ap^2 + 2bp + c = 0$, где $a = a(x, y),\ b = b(x, y),\ c = c(x, y),\ p = \frac{dy}{dx}$, причём $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$. Показано, что типичное уравнение такого типа формальными заменами координат $(x, y) \longmapsto (X, Y)$ приводится к формальной нормальной форме $(\alpha X + \beta Y + \gamma(X))P^2 + X + Y = 0,\ P = \frac{dY}{dX}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma$ — формальный ряд по переменной $X$, $\gamma(0) = 0,\ \gamma'(0) = 0$.

**Ключевые слова:** *бинарное дифференциальное уравнение, неявное дифференциальное уравнение, формальная нормальная форма.*

## Введение

Бинарное дифференциальное уравнение (BDE — binary differential equation [1]) — это неявное дифференциальное уравнение вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \tag{1}$$

где $a = a(x, y),\ b = b(x, y),\ c = c(x, y),\ p = \frac{dy}{dx}$. Бинарные дифференциальные уравнения возникают естественным образом во многих прикладных задачах. Так, BDE задают характеристики уравнений в частных производных второго порядка; о других приложениях см. [1–3].

В случаях малой коразмерности BDE достаточно полно изучены [3–6]. Однако в ситуации, когда все три коэффициента уравнения (1) одновременно обращаются в нуль

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0, \tag{2}$$

при исследовании уравнения (1) возникают значительные проблемы.

Одним из основных методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является метод нормальных форм. Суть метода состоит в том, чтобы подходящими заменами координат привести исследуемое уравнение к простейшему виду (нормальной форме). Уравнения, получаемые одно из другого заменами координат, называют эквивалентными. Гладкая классификация типичных уравнений (1) получена в [5; 7]. Топологическая классификация (типичных) уравнений (1) при условиях (2) (далее для краткости просто (1), (2)) исследовалась в [1; 8]. Однако гладкая и аналитическая (и даже формальная, см. замечания ниже) классификации таких уравнений к настоящему моменту не изучены.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 21-51-54003).

Топологическая классификация уравнений (1), (2) в работе [1] строилась в два шага. На первом шаге линейной заменой приводилась к нормальной форме линейная часть уравнения (1); затем подходящими гомеоморфизмами аннулировались нелинейные члены.

Попутно авторы получают следующие результаты:

а) формальными заменами типичное уравнение (1), (2) можно привести к «prenormal» форме, для которой коэффициенты $a$ и $c$ совпадают (или отличаются знаком) и не содержат нелинейных членов [1, § 3.1, предложение 3.4];

б) более того, формальными заменами можно дополнительно существенно упростить и коэффициент $b$ — привести его к виду, такому, что его нелинейная часть есть функция только от одной переменной [1, замечание 3.5].

При этом, как пишут авторы в замечании 3.6, «We have been unable to make any progress on the question of convergence»; однако для целей их работы это не являлось существенным.

Таким образом, фактически утверждение б) из [1] даёт формальную классификацию типичных BDE (1), (2). Здесь, однако, следует отметить один существенный пробел в обосновании этого утверждения. Доказательство предложения 3.4 в [1] проводилось классическим методом последовательных приближений. При этом на $k$-м шаге надо было решать линейную систему уравнений с некоторой матрицей $M_k$, полиномиально зависящей от коэффициентов линейной части уравнения (1). Условия типичности, налагаемые на BDE (1) в работе [1], и состояли в том, что $\det M_k \neq 0$. И эти условия, конечно, будут выполняться для типичных BDE — если показать, что все многочлены $\det M_k$ отличны от тождественного нуля. Но вот это как раз в работе [1] и не проверено. Те же замечания, но в ещё большей степени (соответствующая матрица существенно сложнее) относятся и к утверждению б).

Цель настоящей работы — восполнить указанные выше пробелы в задаче о формальной классификации типичных BDE вида (1), (2). При этом, имея в виду дальнейшее построение аналитической классификации таких BDE и учитывая предварительные результаты, полученные в этом направлении [9], мы будем использовать формальную нормальную форму, отличную от формальной нормальной формы, предложенной в [1, замечание 3.5]. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Типичное BDE* (1) *при условии* (2) *формальной заменой координат* $(x, y) \to (X, Y)$ *приводится к виду*

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma(X))P^2 + X + Y = 0, \;\; P = \frac{dY}{dX}, \tag{3}$$

*где* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma$ *— формальный ряд по переменной* $X$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = 0$.

**Замечание 1.** Условия типичности в теореме 1 налагаются на коэффициенты линейной части уравнения (1) и состоят в выполнении счётного числа полиномиальных ограничений типа неравенств. Следуя определению 3.3 из [1], эти ограничения можно называть условиями нерезонансности линейной части уравнения (1) в случае (2). Эти условия — в более или менее явном виде — выписаны в замечаниях 5 и 6.

**Замечание 2.** Формальная нормальная форма (3), как уже было отмечено выше, представляется более удобной по сравнению с формальной нормальной формой б) из [1]. Однако у неё имеются и определённые недостатки, см. замечание 7.

**Замечание 3.** В отличие от авторов работы [1] (смотри выше пессимистическую цитату из их работы), мы (с учётом [10]) полны оптимизма в отношении сходимости нормализующих рядов.

Опишем структуру работы. В разделе 1 выписаны условия, обеспечивающие гладкость поверхности уравнения. В разделе 2 приводятся явные формулы, показывающие, как меняется BDE при замене координат. Здесь же проводится нормализация линейной части BDE (1) в случае (2). Основная часть доказательства теоремы 1 содержится в разделе 3. Именно там доказана теорема 2 о нормализации в классах BDE с фиксированной линейной частью. Теорема 1 следует из результатов разделов 2 и 3 (см. раздел 4).

## 1. Уравнения с гладкой поверхностью

Пусть $F(x,y,p) = ap^2 + 2bp + c$ — левая часть уравнения (1). Поверхность $M = \{F(x,y,p) = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ будем называть поверхностью уравнения (1). Отметим, что для уравнения (1) из условий (2) следует, что для всех $p \in \mathbb{C}$ точка $(0,0,p)$ принадлежит поверхности уравнения: если $L = \{(0,0,p) : p \in \mathbb{C}\}$, то $L \subset M$. Нас будет интересовать поведение системы (1) в окрестности кривой $L$. По теореме о неявной функции $M$ будет гладкой поверхностью в окрестности $L$, если выполняется условие

$$\nabla F(0,0,p) \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Пусть $f(p) = F'_x(0,0,p),\ g(p) = F'_y(0,0,p)$. Тогда $f$ и $g$ многочлены второй степени, так что $f(p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1 = 0$, $g(p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2 = 0$ для некоторых $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Условие (4) не выполняется, когда система

$$\begin{cases} f(p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1 = 0, \\ g(p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

имеет решения. Это равносильно тому, что результант $R = R(f,g)$ системы (5)

$$R = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 - 4(b_2c_1 - b_1c_2)(a_2b_1 - a_1b_2) \tag{6}$$

равен нулю. Таким образом, если

$$R \neq 0, \tag{7}$$

то $M$ гладкая поверхность.

В настоящей работе мы будем рассматривать лишь уравнения вида (1) при условии (2) с гладкой поверхностью (т. е. те для которых выполняется условие (7)).

## 2. Нормализация линейной части BDE. Классы $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$

### 2.1. Преобразование BDE при замене координат

**Лемма 1.** *При замене координат* $(x,y) \longmapsto (X = X(x,y),\ Y = Y(x,y))$ *уравнение* (1) *переходит в уравнение*

$$AP^2 + 2BP + C = 0, \tag{8}$$

*где* $P = \frac{dY}{dX}$ *и коэффициенты уравнения* (8) *связаны с коэффициентами уравнения* (1) *следующим образом:*

$$a = \tilde{a}Y_y^2 + 2\tilde{b}X_yY_y + \tilde{c}X_y^2, \tag{9}$$

$$b = \tilde{a}Y_xY_y + \tilde{b}(X_yY_x + X_xY_y) + \tilde{c}X_xX_y, \tag{10}$$

$$c = \tilde{a}Y_x^2 + 2\tilde{b}X_xY_y + \tilde{x}X_x^2, \tag{11}$$

*где*

$$\tilde{a} = A(X(x,y),Y(x,y)), \quad \tilde{b} = B(X(x,y),Y(x,y)), \quad \tilde{c} = C(X(x,y),Y(x,y)). \tag{12}$$

*Доказательство.* Пусть указанная замена координат переводит BDE (1) в BDE (8). Заметим, что при этом $P = \frac{dY}{dX} = \frac{Y_x+Y_yp}{X_x+X_yp}$. Подставляя это соотношение в уравнение (8), после домножения на знаменатель получим требуемое. □

## 2.2. Нормализация линейных членов

**Лемма 2.** *Бинарное уравнение с типичной линейной частью линейной заменой переменных* $(x,y) \longmapsto (X,Y)$ *приводится к уравнению с линейной частью*

$$(\alpha X + \beta Y)P^2 + X + Y, \tag{13}$$

*где* $P = \frac{dY}{dX}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

*Доказательство.* В уравнении (1) сделаем линейную подстановку

$$\begin{cases} X = X(x,y) = A_1x + A_2y, \\ Y = Y(x,y) = B_1x + B_2y. \end{cases} \tag{14}$$

Условие её невырожденности состоит в том, что

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15}$$

В соответствии с леммой 1 уравнение (1) переходит при этом в уравнение (8), коэффициенты которых связаны формулами (9)–(12). Пусть коэффициенты уравнения (8) имеют вид $A = a_1X + a_2Y + \ldots$, $B = b_1X + b_2Y + \ldots$, $C = c_1X + c_2Y + \ldots$. Будем искать такую замену, чтобы в уравнении (1) линейная часть коэффициента $b$ была равна нулю. Подставляя (12) в (10), получим

$$b = B_1B_2(a_1X + a_2Y) + (A_2B_1 + A_1B_2)(b_1X + b_2Y) + A_1A_2(c_1X + c_2Y) + \ldots. \tag{16}$$

Подставив (14) в (16) и приравнивая в полученном выражении коэффициенты при $x$ и $y$ к нулю, получим систему

$$a_1A_1B_1B_2 + (b_1A_1 + b_2B_1)(A_2B_1 + A_1B_2) + c_1A_1^2A_2 + a_2B_1^2B_2 + c_2A_1A_2B_1 = 0,$$

$$a_1A_2B_1B_2 + (b_1A_2 + b_2B_2)(A_2B_1 + A_1B_2) + c_1A_1A_2^2 + a_2B_1B_2^2 + c_2A_1A_2B_2 = 0.$$

Заметим, что эта система однородна относительно переменных $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, поэтому удобно перейти к переменным $q_1 = \frac{A_1}{B_1}$, $q_2 = \frac{A_2}{B_2}$. Получим

$$a_2 + a_1q_1 + (b_2 + b_1q_1)(q_1 + q_2) + (c_1q_1 + c_2)q_1q_2 = 0, \tag{17}$$

$$a_2 + a_1q_2 + (b_2 + b_1q_2)(q_1 + q_2) + (c_1q_2 + c_2)q_1q_2 = 0. \tag{18}$$

Вычитая (16) из (17) и поделив результат на $(q_1 - q_2)$ ($q_1 \neq q_2$ в силу (15)), получим

$$a_1 + b_1(q_1 + q_2) + c_1q_1q_2 = 0. \tag{19}$$

Переходя к вспомогательным переменным $u = q_1 + q_2$, $v = q_1 q_2$, представим уравнение (19) в виде $a_1 + b_1 u + c_1 v = 0$, откуда находим

$$v = -\frac{a_1 + b_1 u}{c_1} \tag{20}$$

(в предположении, что $c_1 \neq 0$). Складывая уравнения (17) и (18), получим уравнение, которое в переменных $(u, v)$ примет вид

$$2a_2 + a_1 u + 2b_2 u + b_1 u^2 + 2c_2 v + c_1 uv = 0. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), получим

$$u = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \tag{22}$$

(при условии, что $b_2 c_1 \neq b_1 c_2$). Тогда из (20) и (22) следует, что

$$v = -\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2}. \tag{23}$$

Возвращаясь к переменным $q_1$, $q_2$, видим, что по теореме Виета в качестве $q_1$ и $q_2$ можно взять

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1 + \sqrt{R}}{2(b_2 c_1 - b_1 c_2)}, \\ q_2 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1 - \sqrt{R}}{2(b_2 c_1 - b_1 c_2)} \end{cases}$$

(дискриминант соответствующего квадратного уравнения, как легко видеть, в точности равен $R$ из (6)).

Заметим, что $q_1 \neq q_2$ (в силу (7)). Таким образом, для любых ненулевых $B_1$ и $B_2$, при $A_1 = q_1 B_1$, $A_2 = q_2 B_2$ получим замену (14), которая обнуляет линейную часть коэффициента $b$. При этой замене, для линейной части коэффициента $c$ (равной $\bar{c}_1 x + \bar{c}_2 y$) полученного уравнения в соответствии с (11) имеем

$$\bar{c}_1 = a_1 A_1 B_1^2 + 2b_1 A_1^2 B_1 + c_1 A_1^3 + a_2 B_1^3 + 2b_2 A_1 B_1^2 + c_2 A_1^2 B_1. \tag{24}$$

Покажем, что при некоторых условиях на коэффициенты $a_i, b_i, c_i$ оба коэффициента $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ не равны нулю. Действительно, пусть $\bar{c}_1 = 0$. В переменных $(q_1, q_2)$ выражение (24) примет вид

$$a_2 + q_1 a_1 + 2q_1(b_2 + q_1 b_1) + q_1^2(c_2 + q_1 c_1) = 0. \tag{25}$$

Вычитая (17) из (25), получим

$$b_2 + b_1 q_1 + q_1(c_2 + c_1 q_1) = 0. \tag{26}$$

Подстановка (26) в (17) влечёт равенство

$$a_2 + a_1 q_1 + q_1(b_2 + b_1 q_1) = 0. \tag{27}$$

Из (26) и (27) имеем

$$-q_1 = \frac{b_2 + b_1 q_1}{c_2 + c_1 q_1} = \frac{a_2 + a_1 q_1}{b_2 + b_1 q_1},$$

откуда следует, что $q_1$ корень квадратного уравнения

$$(b_2 + b_1 q_1)^2 = (a_2 + a_1 q_1)(c_2 + c_1 q_1). \tag{28}$$

Но $q_1$ — также корень квадратного уравнения $q_1^2 - uq_1 + v = 0$. С учётом (22), (23) это даёт равенство

$$q_1^2(b_2c_1 - b_1c_2) - q_1(a_1c_2 - a_2c_1) + a_2b_1 - a_1b_2 = 0. \tag{29}$$

Получаем, что $q_1$ — одновременно корень квадратных уравнений (28) и (29); это возможно лишь в случае, когда результант системы (28), (29) равен нулю. Прямые выкладки дают формулу для этого результанта:

$$\begin{gathered}\tilde{R} = (a_1^2b_2c_1 - a_1a_2b_1c_1 - a_1a_2c_1c_2 - a_1b_1^2b_2 - a_1b_1b_2c_2 + 2a_1c_1b_2^2 + a_2^2c_1^2 + \\ + a_2b_1^3 + 2a_2b_1^2c_2 - 3a_2b_1b_2c_1 + a_2b_1c_2^2 - a_2b_2c_1c_2 - b_1b_2^2c_2 + b_2^3c_1)(a_1^2b_2c_1 - \\ - a_1^2c_2^2 - a_1a_2b_1c_1 + a_1a_2c_1c_2 - a_1b_1^2b_2 + 3a_1b_1b_2c_2 - 2a_1c_1b_2^2 + a_2b_1^3 - \\ - 2a_2b_1^2c_2 + a_2b_1b_2c_1 + a_2b_1c_2^2 - a_2b_2c_1c_2 - b_1b_2^2c_2 + b_2^3c_1).\end{gathered}$$

Таким образом, для типичных коэффициентов $a_i, b_i, c_i$ результант $\tilde{R}$ системы (28), (29) не равен нулю:

$$\tilde{R} \neq 0, \tag{30}$$

так что в этих случаях также и $\bar{c}_1 \neq 0$.

Аналогичные выкладки показывают, что $\bar{c}_2 \neq 0$ (при том же ограничении (30)). То же (и с тем же результантом) верно и для линейной части коэффициента $a$: если $a = \bar{a}_1x + \bar{a}_2$, то можно показать, что $\bar{a}_1 \neq 0,\ \bar{a}_2 \neq 0$ при том же условии (30).

Наконец, дополнительными растяжениями $(x, y) \longmapsto (\lambda_1 x,\ \lambda_2 y)$ коэффициенты $\bar{c}_1,\ \bar{c}_2$ можно сделать равными единице (при этом коэффициенты линейной части $a$ также изменятся, но по-прежнему будут ненулевыми). Таким образом, уравнение (8) приведено к уравнению с линейной частью (13), для которой выполняются условия $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$. □

**Замечание 4.** Условия (7), $c_1 \neq 0$, $b_1c_2 \neq b_2c_1$ и (30) являются условиями типичности в лемме 2.

### 2.3. Классы $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$

Таким образом, в пункте 3.2 мы показали, что BDE с типичной линейной частью приводится к уравнению с линейной частью (13), где $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$.

Обозначим $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ класс BDE с линейной частью (13). Формальная нормализация BDE из класса $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ будет рассматриваться в следующем пункте.

## 3. Нормализация в классах $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$

В этом разделе мы докажем следующую теорему

**Теорема 2.** *Для почти всех $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_*^2$ каждое уравнение (1) из $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ формальной заменой координат вида $(x, y) \longmapsto (X = x + \dots,\ Y = y + \dots)$ приводится к виду*

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma(X))P^2 + X + Y = 0,\ P = \frac{dY}{dX}, \tag{31}$$

*где $\gamma(0) = 0,\ \gamma'(0) = 0$.*

*Доказательство.* Доказательство теоремы будет произведено по следующей схеме с помощью стандартного способа (индукция). На первом шаге (база индукции) мы проведём нормализацию квадратичных членов. Затем (шаг индукции), предполагая, что $(n-1)$-струя BDE (1) при условии (2) уже нормализована (совпадает с $(n-1)$-струёй своей формальной нормальной формы (31)), обнуляем лишние мономы $n$-струи. Бесконечная суперпозиция построенных замен и даст искомую формальную нормализующую замену.

**1. База индукции.** BDE (8) класса $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ имеет линейную часть (13). Распишем (8) до квадратичных членов

$$(\alpha X+\beta Y+a_{20}X^2+a_{11}XY+a_{02}Y^2+\dots)P^2+2(b_{20}X^2+b_{11}XY+b_{02}Y^2+\dots)P+$$
$$+X+Y+c_{20}X^2+c_{11}XY+c_{02}Y^2+\dots=0. \tag{32}$$

Попробуем привести уравнение (32) к линейной нормальной форме (13) (хотя бы на уровне 2-струй). Для этого нормализуем квадратичные члены, сделав замену следующего вида:

$$\begin{cases} X=X(x,y)=x+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2,\\ Y=Y(x,y)=y+B_{20}x^2+B_{11}xy+B_{02}y^2,\end{cases}$$

и будем использовать домножение на функцию

$$k=1+k_1x+k_2y. \tag{33}$$

При этом, в соответствии с леммой 1, уравнение (8) перейдёт в уравнение (1), коэффициенты этих уравнений связаны соотношениями (9)–(12) (надо дополнительно домножить (12) на коэффициент (33)). В результате получим

$$\tilde a=\alpha x+\beta y+\alpha(k_1x^2+k_2xy+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{20}y^2)+$$
$$+\beta(k_1xy+k_2y^2+B_{20}x^2+B_{11}xy+B_{02}y^2)+\bar a_{20}x^2+\bar a_{11}xy+\bar a_{02}y^2+\dots, \tag{34}$$
$$\tilde b=\bar b_{20}x^2+\bar b_{11}xy+\bar b_{02}y^2+\dots, \tag{35}$$
$$\tilde c=x+y+k_1x^2+k_1xy+k_2xy+k_2y^2+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2,$$
$$+B_{20}x^2+B_{11}xy+B_{02}y^2+\bar c_{20}x^2+\bar c_{11}xy+\bar c_{02}y^2+\dots. \tag{36}$$

Подставляя (34)–(36) в (9)–(11) соответственно, получим

$$a=\alpha x+\beta y+\alpha(k_1x^2+k_2xy+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2+2B_{11}x^2+$$
$$+4B_{02}xy)+\beta(k_1xy+k_2y^2+B_{20}x^2+B_{11}xy+B_{02}y^2+$$
$$+2B_{11}xy+4B_{02}y^2)+\bar a_{20}x^2+\bar a_{11}xy+\bar a_{02}y^2+\dots \tag{37}$$
$$b=2\alpha B_{20}x^2+\alpha B_{11}xy+2\beta B_{20}xy+\beta B_{11}y^2+A_{11}x^2+A_{11}xy+$$
$$+2A_{02}xy+2A_{02}y^2+2\bar b_{20}x^2+2\bar b_{11}xy+2\bar b_{02}y^2+\dots \tag{38}$$
$$c=x+y+k_1x^2+k_1xy+k_2xy+k_2y^2+A_{20}x^2+A_{11}xy+A_{02}y^2+$$
$$+B_{20}x^2+B_{11}xy+B_{02}y^2+4A_{20}x^2+4A_{20}xy+2A_{11}xy+2A_{11}y^2+$$
$$+\bar c_{20}x^2+\bar c_{11}xy+\bar c_{02}y^2+\dots. \tag{39}$$

Сравнивая в уравнениях (37)–(39) коэффициенты при членах второй степени (т. е. приравнивая их к нулю, ведь мы хотим избавиться от нелинейных членов в коэффициентах $a,\ b,\ c$), получим систему из девяти уравнений относительно восьми неизвестных (коэффициентов замены и функции $k$). Ясно, что, вообще говоря, такая система не разрешима. Поэтому из этих девяти уравнений мы оставим только восемь последних, т. е. не будем нормализовать коэффициент при $x^2$ в уравнении (37): выполнение отброшенного первого уравнения обеспечим за счёт выбора коэффициента $\gamma_2$ в разложении функции $\gamma(X) = \sum\limits_{m=2}^{\infty} \gamma_m x^m$ из формальной нормальной формы (31). В результате получим систему из восьми линейных неоднородных уравнений относительно восьми переменных с матрицей $M_2$ вида

| | $A_{20}$ | $A_{11}$ | $A_{02}$ | $B_{20}$ | $B_{11}$ | $B_{02}$ | $k_1$ | $k_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 0 | $\alpha$ | 0 | 0 | $3\beta$ | $4\alpha$ | $\beta$ | $\alpha$ |
| $a_{02}$ | 0 | 0 | $\alpha$ | 0 | 0 | $5\beta$ | 0 | $\beta$ |
| $b_{20}$ | 0 | 1 | 0 | $2\alpha$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $b_{11}$ | 0 | 1 | 2 | $2\beta$ | $\alpha$ | 0 | 0 | 0 |
| $b_{02}$ | 0 | 0 | 2 | 0 | $\beta$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{20}$ | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $c_{11}$ | 4 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $c_{02}$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

, (40)

где $a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij}$ — строки, занумерованные буквами в соответствии с тем, при каких степенях приравнивались коэффициенты в уравнениях (37)–(39); $A_{ij}, B_{ij}, k_i$ — переменные.

Для разрешимости этой системы достаточно, чтобы определитель матрицы (40) был отличен от нуля. Этот определитель — многочлен, зависящий от переменных $\alpha$ и $\beta$: $\det M_2 = 2\alpha^2\beta - 30\alpha^2\beta^2 + 86\alpha\beta^3 - 58\beta^4$.

В этом случае полностью посчитать определитель и показать, что он не тождественный нуль, не составляет никакого труда, но в общем случае данная задача усложняется. Поэтому продемонстрируем более наглядно все действия, которые буду выполняться в общем случае для вычисления хотя бы одного коэффициента данного монома.

Заметим, что $\alpha$ присутствует в 4 строках, так что этот многочлен имеет степень по $\alpha$ не выше 4. Однако его производная по $\alpha$ порядка 4 равна нулю. Действительно, эта производная равна определителю матрицы, в которой все эти 4 строки продифференцированы по $\alpha$, умноженному на 4!. Но матрица, полученная при этом дифференцировании, имеет линейно зависимые строки $b_{02}, b_{11}$ и $a_{02}$. Таким образом, степень этого многочлена по $\alpha$ не превосходит 3. Найдём коэффициент этого многочлена при $\alpha^3\beta$. Для этого вначале выполним следующие элементарные преобразования: 1) из столбца $B_{02}$ вычтем столбец $k_0$, домноженный на 4; 2) из столбца $k_2$ вычтем столбец $A_{11}$; 3) из столбца $k_2$ вычтем столбец $B_{02}$. Получим матрицу

| | $A_{20}$ | $A_{11}$ | $A_{02}$ | $B_{20}$ | $B_{11}$ | $B_{02}$ | $k_1$ | $k_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 0 | $\alpha$ | 0 | 0 | $3\beta$ | 0 | $\beta$ | 0 |
| $a_{02}$ | 0 | 0 | $\alpha$ | 0 | 0 | $\beta$ | 0 | 0 |
| $b_{20}$ | 0 | 1 | 0 | $2\alpha$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ |
| $b_{11}$ | 0 | 1 | 2 | $2\beta$ | $\alpha$ | 0 | 0 | $-1$ |
| $b_{02}$ | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | $\boxed{\beta}$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_{20}$ | 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $-1$ |
| $c_{11}$ | 4 | 3 | 0 | 0 | 1 | $-4$ | 1 | 2 |
| $c_{02}$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | $-3$ | 0 | 2 |

. (41)

Разложим определитель матрицы (41) по строке $b_{02}$ (она содержит только два ненулевых элемента): $\det M_2 = 2 \det M_2^1 + \beta \det M_2^2$, где $M_2^1$ и $M_2^2$ — алгебраические дополнения элементов 2 и $\beta$ строки $b_{02}$. Заметим, что в каждом из этих миноров $\alpha$ присутствует только в трёх строках. Поэтому для вычисления коэффициента при $\alpha^3\beta$ в определителе матрицы $M_2$ надо произвести следующие операции.

1. В матрице $M_2^1$ перемножим коэффициенты при $\alpha$ в строках $a_{11}$, $b_{20}$, $b_{11}$ (соответствующее произведение будет равно 2!) и вычеркнем все строки и столбцы, соответствующие этим элементам. Получим матрицу, в которой $\beta$ присутствует ровно в одной строке $a_{02}$. Значит, $\det M_2^1 = \alpha^3\beta \det \widetilde{M_2^1} 2! + \ldots$, где многоточием обозначим члены, имеющие степень по $\alpha$, меньшую третьей; $\widetilde{M_2^1}$ — числовая матрица, полученная из $M_2^1$ вычеркиванием всех строк $a_{ij}$ и $b_{ij}$:

$$\widetilde{M_2^1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Но её определитель равен 2, таким образом, $\det M_2^1 = \alpha^3\beta \cdot 2 \cdot 2! + \cdots = 4\alpha^3\beta + \ldots$

2. В матрице $M_2^2$ перемножим коэффициенты при $\alpha$ в строках $a_{11}$, $a_{02}$, $b_{20}$ (соответствующее произведение будет равно 2!) и вычеркнем все строки и столбцы, соответствующие этим элементам. Значит, $\det M_2^2 = -\alpha^3 \det \widetilde{M_2^2} 2! + \ldots$, где $\widetilde{M_2^2}$ — числовая матрица, полученная из $M_2^2$ вычёркиванием всех строк $a_{ij}$ и $b_{20}$, $b_{02}$,

$$\widetilde{M_2^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель этой матрицы равен 3, то $\det M_2^2 = -\alpha^3 \cdot 3 \cdot 2! + \cdots = -6\alpha^3 + \ldots$ В итоге получаем $\det M_2 = 2 \cdot 4\alpha^3\beta + \beta \cdot (-6\alpha^3) + \cdots = 2\alpha^3\beta + \ldots$, что согласуется с полученной выше формулой.

Таким образом, $\det M_2$ — ненулевой многочлен. Поэтому для почти всех $(\alpha, \beta)$ определитель матрицы (41) не равен нулю и соответствующая система уравнений будет разрешима. Это значит, что уже найдена замена координат, нормализующая квадратичные члены исходного BDE. При этом также найден и коэффициент $\gamma_2$ формальной нормальной формы (31).

**2. Шаг индукции.** Предположим, что в исходном BDE (1) из класса $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ уже нормализована его $(n-1)$-струя, $n \geqslant 3$:

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma_2 X^2 + \cdots + \gamma_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} Y + \cdots + a_0 Y^n + \ldots) P^2 +$$

$$+ 2(b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} Y + \ldots b_0 Y^n) P + (X + Y + c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} Y + \cdots + c_0 Y^n) = 0. \quad (42)$$

Аналогично первому шагу доказательства (база индукции) приведём уравнение (42) к нормальной форме (31) (на уровне $n$-струй). Для этого нормализуем члены $n$-й степени, сделав замену

$$\begin{cases} X = X(x,y) = x + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + A_0 y^n, \\ Y = Y(x,y) = y + B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + B_0 y^n, \end{cases} \quad (43)$$

и используем домножение на функцию

$$k = k(x,y) = 1 + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} y + \cdots + k_0 y^n. \quad (44)$$

Действуя аналогично первому пункту доказательства (база индукции), получим $3n+3$ уравнений на $3n+2$ коэффициентов замены (43), (44). Конечно, такая система, вообще говоря, не разрешима. Поэтому, как и в первом пункте, из этих $3n+3$

уравнений оставим только $3n+2$ «последних» уравнения (т. е. не будем нормализовать коэффициент при $x^n \cdot P^2$; выполнение отброшенного первого уравнения обеспечим за счёт выбора коэффициента $\gamma_n$ в разложении функции $\gamma(X)$ из формальной нормальной формы (31)). В результате получим систему из $3n+2$ линейных неоднородных уравнений относительно $3n+2$ переменных с матрицей $M_n = M_n(\alpha, \beta)$ вида

$$M_n := \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} & A_n & \dots & A_0 & B_n & \dots & B_0 & k_{n-1} & \dots & k_0 \\ \hline a_{n-1} & & & & & & & & & \\ \dots & & aA & & & aB & & & ak & \\ a_1 & & & & & & & & & \\ a_0 & & & & & & & & & \\ \hline b_n & & & & & & & & & \\ b_{n-1} & & & & & & & & & \\ \dots & & bA & & & bB & & & bk & \\ b_1 & & & & & & & & & \\ b_0 & & & & & & & & & \\ \hline c_n & & & & & & & & & \\ c_{n-1} & & & & & & & & & \\ \dots & & cA & & & cB & & & ck & \\ c_1 & & & & & & & & & \\ c_0 & & & & & & & & & \end{array},$$

где

$$aA := \begin{array}{c|ccccc} & A_n & A_{n-1} & \dots & A_1 & A_0 \\ \hline a_{n-1} & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array},$$

$$aB := \begin{array}{c|ccccc} & B_n & B_{n-1} & \dots & B_1 & B_0 \\ \hline a_{n-1} & 0 & 3\beta & 4\alpha & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & (2n-1)\beta & 2n\alpha \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2n+1)\beta \end{array},$$

$$ak := \begin{array}{c|cccc} & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & k_0 \\ \hline a_{n-1} & \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \beta & \alpha \\ a_0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}, \quad bA := \begin{array}{c|ccccc} & A_n & A_{n-1} & \dots & A_1 & A_0 \\ \hline b_n & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & n-1 & n \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{array},$$

$$bB := \begin{array}{c|ccccc} & B_n & B_{n-1} & \dots & B_1 & B_0 \\ \hline b_n & n\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & n\beta & (n-1)\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & (n-1)\beta & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \end{array}, \quad bk := \begin{array}{c|cccc} & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & k_0 \\ \hline b_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$cA := \begin{array}{c|ccccc} & A_n & A_{n-1} & \dots & A_1 & A_0 \\ \hline c_n & 2n+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 2n & 2n-1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 2n-2 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ c_0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array},$$

$$
cB := \begin{array}{c|ccccc}
 & B_n & B_{n-1} & \ldots & B_1 & B_0 \\
\hline
c_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{n-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}, \quad
ck := \begin{array}{c|cccc}
 & k_{n-1} & k_{n-2} & \ldots & k_0 \\
\hline
c_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\
c_{n-1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
c_0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Для разрешимости этой системы достаточно показать, что определитель матрицы $M_n$, являющийся многочленом от переменных $\alpha$ и $\beta$, ненулевой.

Заметим, что в матрице $M_n$ $\alpha$ присутствует в $n + n = 2n$ строках, так что этот многочлен имеет степень по $\alpha$ не выше $2n$. Однако его производная по $\alpha$ порядка $2n$ равна нулю. Действительно, эта производная равна определителю матрицы, в которой все эти $2n$ строк продифференцированы по $\alpha$, умноженному на $(2n)!$. Но матрица, полученная при этом дифференцировании, имеет линейно зависимые строки $b_0$, $b_1$ и $a_0$. Таким образом, степень этого многочлена по $\alpha$ не превосходит $2n-1$. Найдем коэффициент этого многочлена при $\alpha^{2n-1}\beta$. Для этого в начале выполним следующие элементарные преобразования: 1) из столбца $B_0$ вычтем столбец $k_0$, домноженный на $2n$; 2) из столбца $k_{n-s}$ вычтем столбец $A_{n-s+1}$, $s = 2, 3, \ldots, n$; 3) из столбца $k_0$ вычтем столбец $B_0$. Получим матрицу

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
 & A_n & \ldots & A_0 & B_n & \ldots & B_0 & k_{n-1} & \ldots & k_0 \\
\hline
a_{n-1} & & & & & & & & & \\
\ldots & & \mathbf{aA} & & & \mathbf{aB} & & & \mathbf{ak} & \\
a_1 & & & & & & & & & \\
a_0 & & & & & & & & & \\
\hline
b_n & & & & & & & & & \\
b_{n-1} & & & & & & & & & \\
\ldots & & \mathbf{bA} & & & \mathbf{bB} & & & \mathbf{bk} & \\
b_1 & & & & & & & & & \\
b_0 & & & & & & & & & \\
\hline
c_n & & & & & & & & & \\
c_{n-1} & & & & & & & & & \\
\ldots & & \mathbf{cA} & & & \mathbf{cB} & & & \mathbf{ck} & \\
c_1 & & & & & & & & & \\
c_0 & & & & & & & & &
\end{array},
$$

где

$$
\mathbf{aA} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & A_n & A_{n-1} & \ldots & \ldots & A_2 & A_1 & A_0 \\
\hline
a_{n-1} & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha
\end{array},
$$

$$
\mathbf{aB} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & B_n & B_{n-1} & B_{n-2} & \ldots & \ldots & B_1 & B_0 \\
\hline
a_{n-1} & 0 & 3\beta & 4\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\
a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2n\alpha & 0 \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2n-1)\beta & 0 \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta
\end{array},
$$

$$
\mathbf{ak} := \begin{array}{c|cccccc}
 & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & \dots & k_1 & k_0 \\ \hline
a_{n-1} & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
a_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array},
$$

$$
\mathbf{bA} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & A_n & A_{n-1} & \dots & \dots & A_2 & A_1 & A_0 \\ \hline
b_n & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-1} & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-2} & 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\
b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & n \\
b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathrm{n}}
\end{array},
$$

$$
\mathbf{bB} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & B_n & B_{n-1} & B_{n-2} & \dots & \dots & B_1 & B_0 \\ \hline
b_n & n\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-1} & n\beta & (n-1)\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-2} & 0 & (n-1)\beta & (n-2)\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & (n-2)\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\
b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\beta} & 0
\end{array},
$$

$$
\mathbf{bk} := \begin{array}{c|cccccc}
 & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & \dots & k_1 & k_0 \\ \hline
b_n & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-1} & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
b_{n-2} & 0 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-n \\
b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-n \\
b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array},
$$

$$
\mathbf{cA} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & A_n & A_{n-1} & \dots & \dots & A_2 & A_1 & A_0 \\ \hline
c_n & 2n+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{n-1} & 2n & 2n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 2n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\
c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1
\end{array},
$$

$$
\mathbf{cB} := \begin{array}{c|ccccccc}
 & B_n & B_{n-1} & B_{n-2} & \dots & \dots & B_1 & B_0 \\ \hline
c_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_{n-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2n \\
c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2n
\end{array},
$$

$$\mathbf{ck} := \begin{array}{c|cccccc} & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & \dots & k_1 & k_0 \\ \hline c_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 1 & 2n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 3n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2n-2 \\ c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n-2 \end{array}.$$

Разложим определитель этой матрицы по строке $b_0$. Получим

$$\det M_n = (-1)^n n \det M_n^1 + \beta \det M_n^2, \tag{45}$$

где $(-1)^n \det M_n^1$ и $\det M_n^2$ — алгебраические дополнения элементов $n$ и $\beta$. Заметим, что в каждом из этих миноров $\alpha$ присутствует только в $2n-1$ строках. Поэтому для вычисления коэффициента при $\alpha^{2n-1}\beta$ в определителе матрицы $M_n$ надо сделать следующее.

1. В матрице $M_n^1$ перемножить коэффициенты при $\alpha$ в строках $a_{n-1}, \dots, a_1, b_n, \dots, b_1$ (соответствующее произведение будет равно $n!$) и вычеркнуть все строки и столбцы, соответствующие этим элементам. Получим матрицу, в которой $\beta$ присутствует ровно в одной строке $a_0$. Значит, $\det M_n^1 = \alpha^{2n-1}\beta \det \widetilde{M}_n^1 n!(-1)^n + \dots$, где $\widetilde{M}_n^1$ — числовая матрица, полученная из $M_n^1$ вычёркиванием всех строк $a_i$ и $b_i$,

$$\widetilde{M}_n^1 = \begin{array}{c|ccccccc} & A_n & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & \dots & k_1 & k_0 \\ \hline c_n & 2n+1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 2n & 1 & 2-2n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 3-2n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2n-2 \\ c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n-2 \end{array}. \tag{46}$$

Вычислим определитель матрицы (46). Заметим, что в последней строке ровно один ненулевой элемент. Раскладывая по этой строке, также получим матрицу, у которой в последней строке ровно один ненулевой элемент, и так далее. В результате получим

$$\det \widetilde{M}_n^1 = (2n-2)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(3-2n)\cdot \begin{vmatrix} 2n+1 & 1 \\ 2n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)!!.$$

2. В матрице $M_n^2$ перемножим коэффициенты при $\alpha$ в строках $a_{n-1}, \dots, a_0, b_n, \dots, b_2$ (соответствующее произведение будет равно $n!$) и вычеркнем все строки и столбцы, соответствующие этим элементам. Значит, $\det M_n^2 = -\alpha^{2n-1} \det \widetilde{M}_n^2 n! + \dots$, где $\widetilde{M}_n^2$ — числовая матрица, полученная из $M_n^2$ вычёркиванием всех строк $a_i$ и всех строк $b_j$ с номерами $j \neq 1$,

$$\widetilde{M}_n^2 = \begin{array}{c|cccccccc} & A_n & B_0 & k_{n-1} & k_{n-2} & \dots & \dots & k_1 & k_0 \\ \hline b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-n \\ c_n & 2n+1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{n-1} & 2n & 0 & 1 & 2-2n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 3-2n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ c_1 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2n-2 \\ c_0 & 0 & 1-2n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n-2 \end{array}. \tag{47}$$

Вычислим определитель матрицы (47). Заметим, что в первой строке стоит ровно один ненулевой элемент; раскладывая по этой строке, также получим матрицу, у которой в последней строке ровно один ненулевой элемент, и так далее. В результате получим

$$\det \widetilde{M}_n^2 = (1-n)\cdot(1-2n)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\ldots\cdot(3-2n)\cdot\begin{vmatrix}2n+1 & 1\\ 2n & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\cdot(1-n)\cdot(1-2n)\cdot(2n-3)!!.$$

В итоге получаем определитель матрицы $M_n$ (45)

$$\det M_n = (-1)^n\cdot n\cdot(2n-2)\cdot(2n-3)!!\cdot n!\cdot\alpha^{2n-1}\cdot\beta\cdot(-1)^n-$$

$$-\alpha^{2n-1}\cdot\beta\cdot n!\cdot(-1)^n\cdot(1-n)\cdot(1-2n)\cdot(2n-3)!!+\cdots=$$

$$= (-1)^n\cdot n!\cdot(2n-3)!!\cdot(n-1)\cdot\alpha^{2n-1}\cdot\beta+\ldots.$$

Таким образом, $\det M_n$ — ненулевой многочлен. Поэтому для почти всех $(\alpha,\beta)$ определитель матрицы $M_n$ не равен нулю, и соответствующая система уравнений будет разрешима. Это значит, что найдена замена координат, нормализующая все члены $n$-струи исходного BDE; при этом также найдём и коэффициент $\gamma_n$ формальной нормальной формы (31).

3. Окончание доказательства. В пунктах 1 и 2 доказательства мы последовательно нормализовали $n$-струи исходного BDE. Отметим, что для каждого $n \geqslant 2$ нормализующее отображение имеет тождественную $(n-1)$-струю. Поэтому бесконечная суперпозиция построенных замен сходится (в пространстве формальных замен) и даёт искомую нормализующую замену. Теорема доказана. □

**Замечание 5.** Условия типичности в теореме 2 налагаются только на параметры $(\alpha,\beta)$ и состоят в том, что $\det M_n(\alpha,\ \beta) \neq 0$ для всех $n \geqslant 2$.

**Замечание 6.** Отметим, что для вещественного BDE класса $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ (с вещественными $\alpha,\beta$) соответствующая замена из теоремы 2 также является вещественной. Однако аналогичное утверждение из леммы 2 будет справедливым только для случая, когда результант $R$ из (6) положителен. В случае $R<0$ приводимость вещественными заменами BDE (1) к виду (31) невозможна и приходится использовать формальную нормальную форму из работы J. W. Bruce, F. Tari [1]. Заметим, что в работе [1] лишь отмечена возможность приводимости к такой формальной нормальной форме, однако это утверждение фактически не доказано.

## 4. Доказательство основной теоремы 1

Утверждение теоремы 1 есть прямое следствие леммы 2 и теоремы 2.

## Список литературы


1. **Bruce J. W., Tari F.** On binary differential equations // Nonlinearity. 1995. Vol. 8, no. 2. P. 255–271.
2. **Bruce J. W., Giblin P. J., Tari F.** Isotopies of surfaces in Euclidean 3-space, duals, Gauss maps and outlines. Preprint, University of Liverpool, 1993.
3. **Кузьмин А. Г.** Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения в газодинамике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1990.
4. **Кузьмин А. Г.** О поведении характеристик уравнений смешанного типа вблизи линии вырождения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 11. С. 2052–2063.

5. **Давыдов А. А.** Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешённого относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его приложения. 1985. Т. 19, № 2. С. 1–10.
6. **Guinez V.** Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 309, no. 2. P. 477–502.
7. **Dara L.** Singularites generiques des equations differentielles multiformes // Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. 1975. Vol. 6, no. 2. P. 95–128.
8. **Sotomayor J., Gutierrez C.** Structurally stable configurations of lines of principal curvature // Asterisque. 1982. No. 98–99. P. 195–215.
9. **Черепанова Е. А., Воронин С. М.** Аналитическая нормализация слоений индуцированных бинарными уравнениями // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения : сб. тез. Междунар. науч. конф. Уфа : Аэтерна, 2021. С. 76–78.
10. **Ortiz-Bobadilla L., Rosales-Gonzalez E., Voronin S. M.** Formal and analytc normal forms of germs of holomorphic nondicritic foliations // Journal of Singularities. 2014. Vol. 8. P. 168–192.

*Поступила в редакцию 23.04.2022.*
*После переработки 05.05.2023.*

## Сведения об авторе

**Черепанова Елена Анатольевна**, аспирант кафедры математического анализа; Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: gloomson13@mail.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 2. P. 212–227.*

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18205

## FORMAL NORMALIZATION OF BINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**E.A. Cherepanova**

*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
*gloomson13@mail.ru*

Implicit differential equations (binary differential equations) of the form $ap^2+2bp+c=0$ are considered, where $a=a(x,y),\ b=b(x,y),\ c=c(x,y),\ p=\frac{dy}{dx}$, such that $a(0,0)=b(0,0)=c(0,0)=0$. It is shown that a typical equation of this type by formal substitutions of coordinates $(x,y)\longmapsto(X,Y)$ can be reduced to the formal normal form $(\alpha X+\beta Y+\gamma(X))P^2+X+Y=0,\ P=\frac{dY}{dX}$, where $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\gamma$ is a formal series in the variable $X$, $\gamma(0)=0,\ \gamma'(0)=0$.

**Keywords:** *binary differential equation, implicit differential equation, formal normal form.*

# References

1. **Bruce J.W., Tari F.** On binary differential equations. *Nonlinearity*, 1995, vol. 8, no. 2, pp. 255–271.
2. **Bruce J.W., Giblin P.J., Tari F.** *Isotopies of Surfaces in Euclidean 3-Space, Duals Gauss Maps and Outlines*. Preprint, University of Liverpool, 1993.
3. **Kuz'min A.G.** *Nonclassical Equations of Mixed Type and Their Applications in Gas Dynamics*. Basel, Birkhauser, 1992.
4. **Kuz'min A.G.** O povedenii kharakteristik uravneniy smeshannogo tipa vblizi linii vyrozhdeniya [On the behavior of the characteristics of mixed type equations near the line of degeneracy]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1981, vol. 17, no. 11, pp. 2052–2063. (In Russ.).
5. **Davydov A.A.** Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point. *Functional Analysis and Its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 2, pp. 81–89.
6. **Guinez V.** Positive quadratic differential forms and foliations with singularities on surfaces. *Transactions of American Mathematical Society*, 1988, vol. 309, no. 2, pp. 477–502.
7. **Dara L.** Singularites generiques des equations differentielles multiformes. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 1975, vol. 6, no. 2, pp. 95–128.
8. **Sotomayor J., Gutierrez C.** Structurally stable configurations of lines of principal curvature. *Asterisque*, 1982, no. 98–99, pp. 195–215.
9. **Cherepanova E.A., Voronin S.M.** Analiticheskaya normalizatsiya sloyeniy, indutsirovannykh binarnymi uravneniyami [Analytic normalization of foliations induced by binary equations]. *Kompleksnyy analiz, matematicheskaya fizika i nelineynye uravneniya* [Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations], Abstracts of the International Scientific Conference. Ufa, Aeterna, 2021. Pp. 76–78. (In Russ.).
10. **Ortiz-Bobadilla L., Rosales-Gonzalez E., Voronin S.M.** Formal and analytic normal forms of germs of holomorphic nondicritic foliations. *Journal of Singularities*, 2014, vol. 8, pp. 168–192.

*Article received 23.04.2022.*
*Corrections received 05.05.2023.*

The work was funded by the Russian Foundation of Basic Research (project no. 21-51-54003).