Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 203–211.

УДК 517.58 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18204

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ФОКСА

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия
khushtova@yandex.ru

Рассматривается частный случай специальной функции Фокса. Выписаны интегральное представление, представление в виде степенного ряда, асимптотические формулы. Доказаны формулы дифференцирования целого порядка, рекуррентные и интегральные соотношения.

Ключевые слова: *функция Фокса, интегральное представление, асимптотика, рекуррентное соотношение, формула дифференцирования.*

Вспомогательные сведения

Далее в работе используется *гамма-функция Эйлера* [1, с. 5; 2, с. 15].

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

Как известно, $\Gamma(s)$ аналитична в комплексной плоскости s всюду, кроме точек $s = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в которых имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^n/n!$. Соответственно, $\Gamma(-s)$ имеет в точках $s = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ вычеты, равные $(-1)^{n+1}/n!$.

Имеют место формулы [1, с. 10; 2, с. 17]

$$\Gamma(s+n) = (s)_n \Gamma(s), \tag{1}$$

$$\Gamma(s+1-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(s+1)}{(-s)_n}, \tag{2}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $(s)_n$ — *символ Похгаммера*, определяемый равенствами

$$(s)_n = s(s+1)(s+2)...(s+n-1), \quad (s)_0 = 1.$$

1. Основные результаты

Пусть $0 < \rho \leqslant 2$, $\omega > 0$, μ, σ и $\nu \in \mathbb{C}$, $\sigma + \nu \neq -\omega k - 2l$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^\omega \,\middle|\, \begin{matrix} (1-\sigma/\omega, 1), \, (\mu - \rho\,\sigma/\omega, \rho) \\ (\nu/2, \omega/2), \, (1-\sigma/\omega, 1), \, (-\nu/2, \omega/2) \end{matrix} \right], \tag{3}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[\cdot]$ — *H-функция Фокса* [3–5].

В работах [6; 7] в терминах функции (3) в случае, когда $\omega = 2$, выписаны решения первой и второй краевых задач в полуполосе для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка. В работе [8] получены формулы дифференцирования целого порядка и формула автотрансформации для функции (3) при $\omega = 2$.

Приведённые ниже свойства 1–5 следуют из свойств H-функции [3–5]. Свойства 6–10 докажем самостоятельно.

Свойство 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{4}$$

где

$$\Theta(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2 + \omega s/2\right)\Gamma\left(1 - \sigma/\omega + s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega - s\right)}{\Gamma\left(\mu - \rho\sigma/\omega + \rho s\right)\Gamma\left(1 + \nu/2 - \omega s/2\right)}, \tag{5}$$

$$L = L_{i\gamma\infty} = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty), \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \tag{6}$$

$$\gamma_1 = -\min\{\operatorname{Re}\nu/\omega, 1 - \operatorname{Re}\sigma/\omega\}, \quad \gamma_2 = \operatorname{Re}\sigma/\omega.$$

Интеграл (4) *абсолютно сходится, если выполняются условия*

$$\rho < 2, \quad |\arg z| < \pi\left(1 - \rho/2\right)/\omega, \quad z \neq 0, \tag{7}$$

или

$$\rho \leqslant 2, \quad |\arg z| = \pi\left(1 - \rho/2\right)/\omega, \quad (\rho - \omega)\,\gamma > \rho\operatorname{Re}\sigma/\omega - \operatorname{Re}\mu + 1/2, \quad z \neq 0. \tag{8}$$

Абсолютную сходимость интеграла при выполнении условий (7) или (8) нетрудно доказать, проведя рассуждения, приведённые в [9, с. 50]. Далее будем считать, что выполняются условия (7) или (8).

Свойство 2. *Пусть* $\rho < \omega$, $0 < |z| < \infty$, *или* $\rho = \omega$, $0 < |z| < 1$, *или* $\rho = \omega$, $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$, *и выполняется условие* $\sigma + \nu \neq \omega + \omega l - 2k$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда имеет место представление в виде ряда*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{z}{2}\right)^{\omega-\sigma+\omega k},$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{2\Gamma\left(1 - (\nu + \sigma + 2k)/\omega\right)\Gamma\left((\nu + \sigma + 2k)/\omega\right)}{\omega\Gamma\left(\mu - \rho(\nu + \sigma + 2k)/\omega\right)\Gamma\left(1 + \nu + k\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

$$b_k = \frac{(-1)^k\Gamma\left((\nu + \sigma - \omega - \omega k)/2\right)}{\Gamma\left(\mu - \rho - \rho k\right)\Gamma\left(1 + (\nu - \sigma + \omega + \omega k)/2\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Свойство 3. *Пусть* $\rho > \omega$, $0 < |z| < \infty$ *или* $\rho = \omega$, $|z| > 1$, *или* $\rho = \omega$, $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(\sigma - \mu) + 1/2 < 0$. *Тогда справедливо представление*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-\omega k},$$

где

$$c_k = \frac{(-1)^k\Gamma\left((\nu + \sigma + \omega k)/2\right)}{\Gamma\left(\mu + \rho k\right)\Gamma\left(1 + (\nu - \sigma - \omega k)/2\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Свойство 4. *Пусть $\rho \leqslant \omega$. Тогда имеет место асимптотическое разложение*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = a_0 \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} + b_0 \left(\frac{z}{2}\right)^{\omega-\sigma} + o(z^{\delta}), \quad z \to 0,$$

где a_0 и b_0 определяются из (9) *и* (10) *при* $k = 0$, $\delta = \min\{Re\,\nu, \omega - Re\,\sigma\}$.

Свойство 5. *Пусть $\rho \geqslant \omega$. Тогда имеет место асимптотическое разложение*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = c_0 \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} + o(z^{-\sigma}), \quad z \to \infty,$$

где c_0 определяется из (11) *при* $k = 0$.

Свойство 6. *Имеет место формула*

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+\rho,\sigma+\omega,\omega}(z) = \frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} - \mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z). \tag{12}$$

Доказательство. Из представления (4) следует равенство

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+\rho,\sigma+\omega,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \Theta_1(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}\Theta_1(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(1+\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)},\\ L_1 = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty), \quad \gamma_3 < \gamma < \gamma_4,\\ \gamma_3 = -\min\{\mathrm{Re}\,\nu/\omega, -\mathrm{Re}\,\sigma/\omega\}, \quad \gamma_4 = \mathrm{Re}\,\sigma/\omega + 1.\end{gathered} \tag{14}$$

С помощью формул (1) и (2) можно записать

$$\Gamma\left(-\sigma/\omega+s\right) = -\frac{\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)}{(\sigma/\omega-s)}, \quad \Gamma\left(1+\sigma/\omega-s\right) = (\sigma/\omega-s)\,\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right).$$

Учитывая эти равенства, интеграл (13) преобразуется к виду

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+\rho,\sigma+\omega,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \Theta_2(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{15}$$

$$\Theta_2(s) = -\frac{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)}.$$

Причём контур интегрирования L_1, определяемый из (14), оставляет слева полюс в точке $s = \sigma/\omega$. Вычет функции $\Theta_2(s)\,(z/2)^{-\omega s}$ в этой точке равен

$$\frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}.$$

Вычитая его из интеграла (15), получим

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+\rho,\sigma+\omega,\omega}(z) - \frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma} = -\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z),$$

что и доказывает равенство (12). □

Свойство 7. *Имеет место формула*

$$(-1)^n \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma+n\omega,\omega}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-\omega k} = \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu-n\rho,\sigma,\omega}(z), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где

$$d_k = \frac{(-1)^k \Gamma\left((\nu+\sigma+\omega k)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho n+\rho k\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma-\omega k)/2\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Доказательство. Из интегрального представления (4) имеем

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma+n\omega,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \Theta_3(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{17}$$

$$\Theta_3(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega-n+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega+n-s\right)}{\Gamma\left(\mu-n\rho-\rho\,\sigma/\omega+\rho\, s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)},$$

$$L_2 = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty), \quad \gamma_5 < \gamma < \gamma_6, \tag{18}$$

$$\gamma_5 = -\min\{\operatorname{Re}\nu/\omega, 1-\operatorname{Re}\sigma/\omega - n\}, \quad \gamma_6 = \operatorname{Re}\sigma/\omega + n.$$

Из формул (1) и (2) следуют равенства

$$\Gamma\left(\sigma/\omega+n-s\right) = \left(\sigma/\omega-s\right)_n \Gamma\left(\sigma/\omega-s\right),$$

$$\Gamma\left(1-\sigma/\omega-n+s\right) = \frac{(-1)^n\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)}{\left(\sigma/\omega-s\right)_n},$$

в силу которых интеграл (17) преобразуется к виду

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma+n\omega,\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2} \Theta_4(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{19}$$

где

$$\Theta_4(s) = \frac{(-1)^n\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-n\rho-\rho\,\sigma/\omega+\rho\, s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)}.$$

Заметим, что контур интегрирования L_2, определяемый из (18), оставляет слева полюсы в точках $s_k = \sigma/\omega + k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Вычеты функции $\Theta_4(s)\,(z/2)^{-\omega s}$ в этих точках равны

$$\frac{(-1)^{n+k+1}\Gamma\left((\nu+\sigma+\omega k)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho n+\rho k\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma-\omega k)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-\omega k}.$$

Вычитая их из функции (19), получим

$$\mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma+n\omega,\omega}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+k+1}\Gamma\left((\nu+\sigma+\omega k)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho n+\rho k\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma-\omega k)/2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-\omega k} =$$

$$= (-1)^n \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu-n\rho,\sigma,\omega}(z),$$

что и доказывает равенство (16). □

Замечание 1. При $n = 1$ формула (16) принимает вид

$$\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu-\rho,\sigma,\omega}(z) + \mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma+\omega,\omega}(z) = \frac{\Gamma\left((\nu+\sigma)/2\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\right)\Gamma\left(1+(\nu-\sigma)/2\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}.$$

Свойство 8. *Справедливы формулы дифференцирования*

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left[z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right] = (-1)^n z^{-\nu-n}\mathcal{J}_{\nu+n}^{\rho,\mu,\sigma+n,\omega}(z), \tag{20}$$

$$\frac{d^n}{(z\,dz)^n}\left[z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right] = z^{\nu-n}\mathcal{J}_{\nu-n}^{\rho,\mu,\sigma+n,\omega}(z), \tag{21}$$

где $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Действительно, положив $z^2 = t$, продифференцируем n раз по t равенство

$$t^{-\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,) = \frac{t^{-\nu/2}}{2\pi i}\int\limits_L \Theta(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s} ds,$$

где $\Theta(s)$ определяется из (5), L — из (6). В результате получим

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right] = \frac{(-1)^n t^{-\nu/2-n}}{2\pi i}\int\limits_L \Theta(s)\left(\nu/2+\omega s/2\right)_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s} ds.$$

Из формулы (1) следует

$$\left(\nu/2+\omega s/2\right)_n = \frac{\Gamma\left(\nu/2+n+\omega s/2\right)}{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)}.$$

Тогда, учитывая представление (5), получаем

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right] = \frac{(-1)^n t^{-\nu/2-n}}{2\pi i}\int\limits_L \Theta_5(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s} ds, \tag{22}$$

где

$$\Theta_5(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+n+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)}.$$

Сделав в интеграле (22) замену $s = \tau - n/\omega$, находим

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{-\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right] = \frac{(-1)^n 2^{-n} t^{-(\nu+n)/2}}{2\pi i}\int\limits_{L_3} \Theta_6(\tau)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega\tau} d\tau,$$

где

$$\Theta_6(\tau) = \frac{\Gamma\left((\nu+n)/2+\omega\tau/2\right)\Gamma\left(1-(\sigma+n)/\omega+\tau\right)\Gamma\left((\sigma+n)/\omega-\tau\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho(\sigma+n)/\omega+\rho\tau\right)\Gamma\left(1+(\nu+n)/2-\omega\tau/2\right)},$$

$$L_3 = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty), \quad \gamma_7 < \gamma < \gamma_8, \tag{23}$$

$$\gamma_7 = -\min\{(\operatorname{Re}\nu - n)/\omega, 1-(\operatorname{Re}\sigma+n)/\omega\}, \quad \gamma_8 = (\operatorname{Re}\sigma+n)/\omega.$$

Возвращаясь к переменной z, приходим к равенству

$$\frac{d^n}{d\,(z^2)^n}\left[z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right] = (-1)^n 2^{-n} z^{-\nu-n}\mathcal{J}_{\nu+n}^{\rho,\mu,\sigma+n,\omega}(z),$$

откуда и следует (20).

Продифференцируем теперь n раз по t равенство

$$t^{\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)=\frac{t^{\nu/2}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s}ds,$$

где $\Theta(s)$ определяется из (5), L — из (6). Получим

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right]=\frac{(-1)^n t^{\nu/2-n}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta(s)\,(-\nu/2+\omega s/2)_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s}ds.$$

Из формулы (2) следует равенство

$$(-\nu/2+\omega s/2)_n=\frac{(-1)^n\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)}{\Gamma\left(1+\nu/2-n-\omega s/2\right)}.$$

Учитывая последнее и обозначение (5), будем иметь

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right]=\frac{t^{\nu/2-n}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta_7(s)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega s}ds, \tag{24}$$

$$\Theta_7(s)=\frac{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-n-\omega s/2\right)}.$$

В интеграле (24) произведём замену $s=\tau-n/\omega$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[t^{\nu/2}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\sqrt{t}\,)\right]=\frac{2^{-n}t^{(\nu-n)/2}}{2\pi i}\int\limits_{L_3}\Theta_8(\tau)\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{-\omega\tau}d\tau,$$

где L_3 определяется из (23), а

$$\Theta_8(\tau)=\frac{\Gamma\left((\nu-n)/2+\omega\tau/2\right)\Gamma\left(1-(\sigma+n)/\omega+\tau\right)\Gamma\left((\sigma+n)/\omega-\tau\right)}{\Gamma\left(\mu-\rho(\sigma+n)/\omega+\rho\tau\right)\Gamma\left(1+(\nu-n)/2-\omega\tau/2\right)}.$$

Возвращаясь к переменной z, приходим к равенству

$$\frac{d^n}{d\left(z^2\right)^n}\left[z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right]=2^{-n}z^{\nu-n}\mathcal{J}_{\nu-n}^{\rho,\mu,\sigma+n,\omega}(z),$$

откуда и следует (21). □

Замечание 2. Полагая в (20) и (21) $n=1$, в частности, получим формулы

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right]=-z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu+1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)\right]=z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z),$$

откуда следуют *рекуррентные формулы*

$$\nu\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)-z\frac{d}{dz}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z)=z\mathcal{J}_{\nu+1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z), \tag{25}$$

$$\nu \mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) + z\frac{d}{dz}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = z\mathcal{J}_{\nu-1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z). \tag{26}$$

Складывая и вычитая (25) и (26), находим

$$2\nu \mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = z\left[\mathcal{J}_{\nu-1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z) + \mathcal{J}_{\nu+1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z)\right],$$

$$2\frac{d}{dz}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(z) = \mathcal{J}_{\nu-1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z) - \mathcal{J}_{\nu+1}^{\rho,\mu,\sigma+1,\omega}(z).$$

Свойство 9. *Имеет место формула дифференцирования*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega})\right] = z^{\mu-n-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu-n,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega}), \tag{27}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Продифференцируем n раз по z равенство

$$z^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega}) = \frac{z^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/\omega}}{2}\right)^{-\omega s}ds,$$

где $\Theta(s)$ определяется из (5), L — из (6). Получим

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega})\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n z^{\mu-n-\rho\sigma/\omega-1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta(s)\left(1-\mu+\rho\sigma/\omega-\rho s\right)_n\left(\frac{\lambda z^{-\rho/\omega}}{2}\right)^{-\omega s}ds.$$

Из формулы (2) следует

$$\left(1-\mu+\rho\sigma/\omega-\rho s\right)_n = \frac{(-1)^n\Gamma\left(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)}{\Gamma\left(\mu-n-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)}.$$

Тогда в силу представления (5) находим

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega})\right] = \frac{z^{\mu-n-\rho\sigma/\omega-1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\Theta_9(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/\omega}}{2}\right)^{-\omega s}ds,$$

$$\Theta_9(s) = \frac{\Gamma\left(\nu/2+\omega s/2\right)\Gamma\left(1-\sigma/\omega+s\right)\Gamma\left(\sigma/\omega-s\right)}{\Gamma\left(\mu-n-\rho\sigma/\omega+\rho s\right)\Gamma\left(1+\nu/2-\omega s/2\right)},$$

откуда следует (27). □

Свойство 10. *Для любых* $Re\,\alpha > 0$, $Re\,\mu > 0$ *справедлива формула*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda t^{-\rho/\omega})\,dt = z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu+\alpha,\sigma,\omega}(\lambda z^{-\rho/\omega}). \tag{28}$$

Доказательство. Из представления (4) имеем

$$\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/\omega-1}\mathcal{J}_{\nu}^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda t^{-\rho/\omega})\,dt =$$

$$
= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/\omega-1} \int\limits_L \Theta(s) \left(\frac{\lambda t^{-\rho/\omega}}{2}\right)^{-\omega s} ds\, dt, \tag{29}
$$

где $\Theta(s)$ определяется из (5), L из (6). Меняя в (29) порядок интегрирования, получим

$$
\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/\omega-1} \mathcal{J}_\nu^{\rho,\mu,\sigma,\omega}(\lambda t^{-\rho/\omega})\, dt =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \Theta(s) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-\omega s} \int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s-1} dt\, ds. \tag{30}
$$

Внутренний интеграл равен [10, с. 298]

$$
\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s-1} dt = z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/\omega+\rho s-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\rho\sigma/\omega+\rho s)}{\Gamma(\mu+\alpha-\rho\sigma/\omega+\rho s)}. \tag{31}
$$

При этом условия $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\mu > 0$, $\rho > 0$, $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re}\sigma/\omega$ обеспечивают сходимость интеграла в (31). Подставляя найденное значение в (30) и учитывая представление (5), приходим к формуле (28). $\square$

Список литературы

1. **Кузнецов Д. С.** Специальные функции. М. : Высшая школа, 1962.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. I. М. : Наука, 1965.
3. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Т. 3. Дополнительные главы. М. : Наука, 1986.
4. **Kilbas A. A., Saigo M.** H-Transform. Theory and Applications. Boca Raton, London, New York, Washington : Chapman and Hall/CRC, 2004.
5. **Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J.** The H-function. Theory and Applications. New York : Springer, 2010.
6. **Хуштова Ф. Г.** Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана — Лиувилля // Мат. заметки. 2016. Т. 99, вып. 6. С. 921–928.
7. **Хуштова Ф. Г.** Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана — Лиувилля // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 3. С. 460–470.
8. **Хуштова Ф. Г.** Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса // Докл. АМАН. 2020. Т. 20, № 4. С. 15–18.
9. **Маричев О. И.** Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск : Наука и техника, 1978.
10. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматлит, 1963.

Поступила в редакцию 14.10.2022.
После переработки 14.06.2023.

Сведения об авторе

Хуштова Фатима Гидовна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации — филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр “Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук”», Нальчик, Россия; e-mail: khushtova@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 2. P. 203–211.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18204

ON SOME PROPERTIES OF A FOX FUNCTION

F.G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation — branch of "Federal Scientific Center "Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences"", Nalchik, Russia
khushtova@yandex.ru

A partial case of a special Fox function is considered. Integral representation, power series representation, and asymptotic formulas are written out. The formulas of differentiation of the integer order, recurrent and integral relations are proved.

Ключевые слова: *Fox function, integral representation, asymptotics, recurrent relation, differentiation formula.*

References

1. **Kuznetsov D.S.** *Spetsial'nye funktsii* [Special functions]. Moscow, Vysshaya shkola [Higher school], 1962. (In Russ.).
2. **Bateman G., Erdelyi A.** *Higher Transcendental Functions.* Vol. I. New York, McGraw-Hill Book Company, 1965.
3. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and series. Additional chapters]. Moscow, Nauka, 1986. (In Russ.).
4. **Kilbas A. A., Saigo M.** *H-Transform. Theory and Applications.* Boca Raton, London, New York, Washington, Chapman and Hall/CRC, 2004.
5. **Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J.** *The H-function. Theory and Applications.* New York, Springer, 2010.
6. **Khushtova F.G.** First boundary-value problem in the half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann — Liouville derivative. *Mathematical Notes*, 2016, vol. 99, iss. 6, pp. 916–923.
7. **Khushtova F.G.** The second boundary-value problem in a half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann — Liouville partial derivative. *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, iss. 3, pp. 474–482.
8. **Khushtova F.G.** Formuly differentsirovaniya i formula avtotransformatsii dlya odnogo chastnogo sluchaya funktsii Foksa [Differentiation formulas and autotransformation formula for a partial case of the Fox function]. *Doklady Adygskoy mezhdunarodnoy akademii nauk* [Reports of the Adyghe International Academy of Sciences], 2020, vol. 20, no. 4, pp. 15–18. (In Russ.).
9. **Marichev O.I.** *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoria i tablitsy formul)* [Method for calculating integrals from special functions (theory and tables of formulas)]. Minsk, Nauka i tekhnika [Science and technics], 1978. (In Russ.).
10. **Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.** *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatlit, 1963. (In Russ.).

Article received 14.10.2022.
Corrections received 14.06.2023.