Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 190–202.

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18203

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. Е. Федоров[1,a], **М. В. Плеханова**[1,b], **Н. Д. Иванова**[2,c], **А. Ф. Шуклина**[1,d], **Н. В. Филин**[1,e]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *kar@csu.ru*, [b] *mariner79@mail.ru*, [c] *natalia.d.ivanova@gmail.com*,
[d] *islamovaaf@gmail.com*, [e] *filinnv@csu.ru*

Исследуются вопросы разрешимости нелинейных обратных задач с зависящим от времени неизвестным элементом для эволюционных уравнений в банаховых пространствах с производными Герасимова — Капуто. Получена теорема о существовании единственного гладкого решения нелинейной задачи для разрешённого относительно старшей дробной производной уравнения с ограниченным оператором в линейной части. Она использована при исследовании вырожденных эволюционных уравнений при условии p-ограниченности пары операторов в линейной части уравнения — при старшей производной и при искомой функции. В случае действия нелинейного оператора в подпространство без вырождения доказано существование единственного гладкого решения, а при независимости нелинейного оператора от элементов подпространства вырождения показано существование единственного обобщённого решения. Полученные абстрактные результаты для вырожденных уравнений использованы при исследовании обратной задачи для модифицированной системы уравнений Соболева с неизвестными коэффициентами при младших дробных производных по времени.

Ключевые слова: *дробная производная Герасимова — Капуто, обратная задача, вырожденное эволюционное уравнение, система уравнений Соболева.*

1. Введение

Обратные задачи для уравнений с дробными производными в последние годы исследуются многими авторами, как правило, рассматриваются линейные задачи [1–12]. Нелинейные обратные задачи с зависящим от времени неизвестным элементом для разрешённых относительно старшей дробной производной уравнений рассмотрены в работах [13] — в случае производных Римана — Лиувилля и дробного секториального оператора в линейной части, [14] — при производных Джрбашяна — Нерсесяна и ограниченном операторе в линейной части. В статье [15] исследована нелинейная обратная задача для уравнения с производными Герасимова — Капуто и дробным секториальным оператором в линейной части. В работах [13–15] предложенный в монографии [16] подход к исследованию нелинейных обратных задач для уравнений первого порядка модифицирован на случай, когда старшая производная является дробной, а нелинейный оператор в уравнении зависит от нескольких, вообще говоря, дробных производных.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-10015).

В данной работе утверждение о существовании единственного обобщённого решения нелинейной обратной задачи для разрешённого относительно старшей производной Герасимова — Капуто уравнения с ограниченным оператором в линейной части получено как следствие из результатов работы [15]. Показано, что в силу ограниченности оператора в линейной части уравнения и с учётом свойств соответствующего линейного неоднородного уравнения всякое обобщённое решение такой задачи является гладким. Полученный результат использован при исследовании аналогичных задач для уравнений с вырожденным линейным оператором при старшей производной. При условии, что оператор при искомой функции в линейной части уравнения является p-ограниченным относительно оператора при старшей производной (см. [17]), обратная задача редуцируется к системе обратной и прямой задач на двух взаимно дополнительных подпространствах. При этом на нелинейный оператор накладывается условие принадлежности его образа подпространству без вырождения или независимости от элементов подпространства вырождения.

2. Предварительные сведения

Определим при $t > 0$ дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s)ds, \quad J^0 h(t) := h(t).$$

Пусть $m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, D^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D^α — дробная производная Герасимова — Капуто порядка α, т. е.

$$D^\alpha h(t) := J^{m-\alpha} D^m \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k h(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

Если функция h достаточно гладкая, то $D^\alpha h(t) = D^m J^{m-\alpha} h(t)$. При $\beta \leqslant 0$ по определению будем считать, что $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — банахово пространство. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{Z}$, а через $\mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ — множество всех линейных замкнутых плотно определённых в $\mathfrak{Z}$ операторов, действующих в $\mathfrak{Z}$. Будем также использовать обозначения $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$, $\mathbb{R}_+ := \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$. Функция Миттаг-Леффлера будет обозначаться как $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f : [0,T] \to \mathfrak{Z}$, рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Функция $z \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z})$, для которой $D^\alpha z \in C([0,T];\mathfrak{Z})$, называется решением задачи Коши

$$D^k z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1), если при всех $t \in [0,T]$ справедливо равенство (1), а также выполняются начальные условия (2).

Теорема 1. [17]. *Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $f \in C([0,T];\mathfrak{Z})$. Тогда при любых $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathfrak{Z}$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha) z_k + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (1), (2).

3. Невырожденная обратная задача

Пусть $m-1<\alpha\leqslant m$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$. Рассмотрим нелинейную обратную задачу для уравнения, разрешённого относительно старшей производной Герасимова — Капуто,

$$D^\alpha z(t)=Az(t)+G(t,D^{\alpha_1}z(t),D^{\alpha_2}z(t),\dots,D^{\alpha_n}z(t),u(t)),\quad t\in(0,T],\tag{3}$$

$$D^kz(0)=z_k,\quad k=0,1,\dots,m-1,\tag{4}$$

$$\Phi z(t)=\Psi(t),\quad t\in[0,T].\tag{5}$$

Некоторые (или все) из α_j могут быть отрицательными, они соответствуют дробным интегралам Римана — Лиувилля $D^{\alpha_j}z(t)$ в уравнении (3). Задача состоит в нахождении функций $z:[0,T]\to\mathfrak{Z}$, $u:[0,T]\to\mathfrak{U}$ из соотношений (3)–(5), где $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{U}$ — банаховы пространства, $A\in\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, Z — открытое подмножество $[0,T]\times\mathfrak{Z}^n$, $G:Z\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{Z}$, $\Phi\in\mathcal{L}(\mathfrak{Z};\mathfrak{U})$, $\Psi:[0,T]\to\mathfrak{U}$.

По начальным данным задачи определим

$$\tilde z(t)=z_0+tz_1+\frac{t^2}{2}z_2+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1},\quad \tilde z_j=D^{\alpha_j}\tilde z(0),\quad j=1,2,\dots,n.$$

Заметим, что $\tilde z_j=z_{\alpha_j}$ при $\alpha_j\in\{0,1,\dots,m-1\}$, в противном случае $\tilde z_j=0$. Обозначим также $\overline{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

(A) Отображение $G:Z\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{Z}$ представимо в виде

$$G(t,\overline{y},u)=G_1(t,\overline{y})+G_2(t,\overline{y},u),\quad (t,\overline{y},u)\in Z\times\mathfrak{U},$$

при некоторых $G_1:Z\to\mathfrak{Z}$, $G_2:Z\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{Z}$.

При $\overline{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathfrak{Z}^n$, $R,T>0$ обозначим

$$S_{\mathfrak{Z}^n}(\overline{a},R)=\left\{\overline{y}\in\mathfrak{Z}^n:\ \|y_j-a_j\|_{\mathfrak{Z}}<R,\ j=1,2,\dots,n\right\},$$

$$S_{\mathfrak{Z}^n}(\overline{a},R,T)=[0,T]\times S_{\mathfrak{Z}^n}(\overline{a},R).$$

Для достаточно гладкого Ψ определим значение

$$y_0=D^\alpha\Psi(0)-\Phi Az_0-\Phi G_1(0,\tilde z_1,\tilde z_2,\dots,\tilde z_n).$$

Кроме того, потребуем выполнения следующих условий:

(B) уравнение $\Phi G_2(0,\tilde z_1,\tilde z_2,\dots,\tilde z_n,u)=y_0$ имеет единственное в $\mathfrak{U}$ решение u_0;

(C) существует такое отображение $G_3:[0,T]\times\mathfrak{U}^{n+1}\to\mathfrak{U}$, что

$$\Phi G_2(t,\overline{y},u)=G_3(t,\Phi y_1,\Phi y_2,\dots,\Phi y_n,u);$$

(D) существует такое $R>0$, что для всех $t\in[0,T]$ отображение $z=G_3(t,D^{\alpha_1}\Psi(t),D^{\alpha_2}\Psi(t),\dots,D^{\alpha_n}\Psi(t),u)$ как функция от переменной u в шаре $S_{\mathfrak{U}}(u_0,R)$ имеет обратное отображение $u=F(t,z)$;

(E) отображение F непрерывно по совокупности переменных (t,z) на множестве $S_{\mathfrak{U}}(u_0,R,T)$ и удовлетворяет на нём условию Липшица по переменной z;

(F) отображения $G_1(t,\overline{y})$ и $G_2(t,\overline{y},u)$ непрерывны по совокупности переменных на множестве $S_{\mathfrak{Z}^n\times\mathfrak{U}}((\tilde z_1,\tilde z_2,\dots,\tilde z_n,u_0),R,T)$ и удовлетворяют на нём условию Липшица по переменным $(\overline{y},u)$.

Пара функций $(z,u) \in C([0,T];\mathfrak{Z}) \times C([0,T];\mathfrak{U})$, для которой $D^{\alpha_j} z \in C([0,T];\mathfrak{Z})$, $j = 1,2,\dots,n$, и при всех $t \in [0,T]$ справедливо включение $(t, D^{\alpha_1}z(t), D^{\alpha_2}z(t),\dots,D^{\alpha_n}z(t)) \in Z$, выполняются равенства (5) и

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k E_{\alpha,k+1}(At^\alpha)z_k +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-s)^\alpha)G(s,D^{\alpha_1}z(s),D^{\alpha_2}z(s),\dots,D^{\alpha_n}z(s),u(s))ds,$$

называется обобщённым решением задачи (3)–(5) на отрезке $[0,T]$.

Пара функций $(x,u) \in C^{m-1}([0,T];\mathfrak{Z}) \times C([0,T];\mathfrak{U})$, для которой $D^\alpha z \in C([0,T];\mathfrak{Z})$, $D^{\alpha_j}z \in C([0,T];\mathfrak{Z})$, $j = 1,2,\dots,n$, и при всех $t \in [0,T]$ выполняется включение $(t, D^{\alpha_1}z(t), D^{\alpha_2}z(t),\dots,D^{\alpha_n}z(t)) \in Z$ и равенства (3)–(5), называется гладким решением задачи (3)–(5) на отрезке $[0,T]$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m-1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0,1,\dots,m-1$, $(0,\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\dots,\tilde{z}_n) \in Z$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z};\mathfrak{U})$, $\Psi, D^\alpha\Psi \in C([0,T];\mathfrak{U})$, $\Phi x_0 = \Psi(0)$, выполняются условия (A)–(F). Тогда при некотором $T_1 \in (0,T]$ существует единственное гладкое решение $(x,u) \in C^{m-1}([0,T_1];\mathfrak{Z}) \times C([0,T_1];\mathfrak{U})$ задачи (3)–(5) на отрезке $[0,T_1]$.*

Доказательство. Как известно, из включения $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ следует, что $D_A = \mathfrak{Z}$, $A \in \mathcal{A}(\theta_0,a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2,\pi)$, $a_0 \geqslant 0$. Поэтому из условий данной теоремы следует, что выполняются все условия теоремы 2 [15] и существует единственное обобщённое решение (z,u) задачи (3)–(5). В таком случае отображение $t \to G(t,D^{\alpha_1}z(t),D^{\alpha_2}z(t),\dots,D^{\alpha_n}z(t),u(t))$ непрерывно из $[0,T_1]$ в $\mathfrak{Z}$ и по теореме 1 z является решением задачи (3), (4) при заданном u. Это в точности означает, что (z,u) — гладкое решение задачи (3)–(5). □

4. Обратные задачи для вырожденных уравнений

Пусть $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ — банаховы пространства, $\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определённых в пространстве $\mathfrak{X}$, действующих в пространство $\mathfrak{Y}$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабжённая нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathfrak{X}} + \|M\cdot\|_{\mathfrak{Y}}$. Обозначим $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$, $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$.

Оператор M называется (L,σ)-ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

При выполнении этого условия операторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y})$$

являются проекторами [18]. Здесь $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Положим $\mathfrak{X}^0 := \ker P$, $\mathfrak{X}^1 := \mathrm{im} P$, $\mathfrak{Y}^0 := \ker Q$; $\mathfrak{Y}^1 := \mathrm{im} Q$, тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^0 \oplus \mathfrak{X}^1$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}^0 \oplus \mathfrak{Y}^1$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathfrak{X}^k$), $k = 0,1$.

Теорема 3. [18]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1;\mathfrak{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}^0;\mathfrak{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^k;\mathfrak{Y}^k)$, $k=0,1$;

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^0;\mathfrak{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}^1;\mathfrak{X}^1)$.

Обозначим $H := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ оператор M называется (L,p)-ограниченным, если он (L,σ)-ограничен и $H^p \neq 0$, $H^{p+1}=0$.

Лемма 1. [17]. *Пусть $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ — нильпотентный оператор степени $p \in \mathbb{N}_0$, $(HD^\alpha)^l g \in C([0,T];\mathfrak{X})$, $D^\alpha(HD^\alpha)^l g \in C([0,T];\mathfrak{X})$, $l=0,1,\dots,p$. Тогда существует единственное решение уравнения $HD^\alpha x(t) = x(t)+g(t)$, при этом оно имеет вид*

$$x(t) = -\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha)^l g(t).$$

Пусть X — открытое множество в $[0,T]\times\mathfrak{X}^n$, $N : X\times\mathfrak{U}\to\mathfrak{Y}$ — нелинейное отображение, $\Phi\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$. Рассмотрим обратную задачу

$$LD^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), ..., D^{\alpha_n}x(t), u(t)), \quad t\in[0,T], \tag{6}$$

$$D^k Px(0) = x_k, \quad k=0,1,...,m-1, \tag{7}$$

$$\Phi x(t) = \Psi(t), \quad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Здесь $m-1<\alpha\leqslant m$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n<\alpha$, $D^\beta x(t)$ — дробные производные Герасимова — Капуто при $\beta>0$ или дробные интегралы Римана — Лиувилля при $\beta\leqslant 0$. Неизвестными функциями являются $x(t)$ и $u(t)$, (8) есть условие переопределения.

Гладким решением задачи (6)–(8) на отрезке $[0,T]$ называется такая пара функций $(x,u)\in C([0,T];D_M)\times C([0,T];\mathfrak{U})$, что $D^\alpha x, D^{\alpha_k}x\in C([0,T];\mathfrak{X})$, выполняются условия (7), при всех $t\in[0,T]$ справедливы равенства (6) и (8).

В случае $\mathrm{im}N\subset\mathfrak{Y}^1$ имеет смысл рассмотреть основное уравнение (6) в виде

$$LD^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), ..., D^{\alpha_n}x(t), u(t)) + f(t), \quad t\in[0,T], \tag{9}$$

где $f:[0,T]\to\mathfrak{Y}$, $Q_0 f\not\equiv 0$.

Как и прежде, по начальным данным задачи определим

$$\tilde{x}(t) = x_0 + tx_1 + \frac{t^2}{2}x_2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}x_{m-1}, \quad \tilde{x}_j = D^{\alpha_j}\tilde{x}(0), \quad j=1,2,\dots,n.$$

Теорема 4. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n\leqslant m-1<\alpha\leqslant m\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}_0$, оператор M (L,p)-ограничен, X — открытое множество в $[0,T]\times\mathfrak{X}^n$, $N\in C(X\times\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $\mathrm{im}N\subset\mathfrak{Y}^1$, $f\in C([0,T];\mathfrak{Y})$, $(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0 f\in C([0,T];\mathfrak{X})$, $D^\alpha(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0 f\in C([0,T];\mathfrak{X})$, $l=0,1,\dots,p$, $x_k\in\mathfrak{X}^1$, $k=0,1,\dots,m-1$, $\Phi\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{U})$, $\mathfrak{X}^0\subset\ker\Phi$, $\Psi, D^\alpha\Psi\in C([0,T];\mathfrak{U})$, $\Phi x_0=\Psi(0)$, а также выполняются условия (A)–(E) при $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}^1$, $A=L_1^{-1}M_1$,*

$$G(t,y_1,y_2,\dots,y_n,u) = L_1^{-1}Qf(t)+$$

$$+L_1^{-1}N\left(t, y_1 - D^{\alpha_1}\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0 f(t),\dots, y_n - D^{\alpha_n}\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0 f(t), u\right),$$

$$\tilde{z}_j = \tilde{x}_j - D^{\alpha_n}\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0 f(0), \quad j=1,2,\dots,n,$$

$(0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in X$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное гладкое решение* $(x, u) \in C([0, T_1]; \mathfrak{X}) \times C([0, T_1]; \mathfrak{U})$ *задачи* (7)–(9) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. Обозначим $P_0 = I - P$, $Q_0 = I - Q$. Пусть оператор M (L, p)-ограничен. Тогда функцию $x(t)$ можно представить в виде $x(t) = Px(t) + P_0x(t)$. Обозначим $Px(t) = v(t)$, $P_0x(t) = w(t)$. В силу теоремы 3 задача (7)–(9) эквивалентна задаче нахождения функций v, w, u из соотношений

$$D^\alpha v(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}N(t, D^{\alpha_1}(v(t)+w(t)), \dots, D^{\alpha_n}(v(t)+w(t)), u(t)) + L_1^{-1}Qf(t), \tag{10}$$

$$D^k v(0) = D^k Px(0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{11}$$

$$\Phi v(t) = \Phi Px(t) = \Phi x(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$HD^\alpha w(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0f(t). \tag{13}$$

Здесь использованы вложения $\mathrm{im}N \subset \mathfrak{Y}^1$, $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$, влекущие равенства $QN = N$, $Q_0N = 0$, $\Phi P = \Phi$, $\Phi P_0 = 0$.

Поскольку оператор $H = M_0^{-1}L_0$ нильпотентен степени p, согласно лемме 1 единственным решением уравнения (13) является

$$w(t) = -\sum_{l=0}^{p}(HD^\alpha)^l M_0^{-1}Q_0f(t).$$

Теперь задача (10)–(12) имеет вид (3)–(5) при $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}^1$, $A = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}^1)$ (по теореме 3), $G(t, y_1, y_2, \dots, y_n, u) = L_1^{-1}N(t, y_1 + D^{\alpha_1}w(t), y_2 + D^{\alpha_2}w(t), \dots, y_n + D^{\alpha_n}w(t), u) + L_1^{-1}Qf(t)$, $z_k = x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\tilde{z}_j = \tilde{x}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Условия теоремы 2 об однозначной локальной разрешимости обратной задачи в данном случае выполняются. □

В случае, когда отображение N не зависит от векторной переменной P_0x, при $p = 0$ можно отказаться от ограничения на образ $\mathrm{im}N$.

Теорема 5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leqslant m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, *оператор* M $(L, 0)$-*ограничен,* X — *открытое множество в* $[0, T] \times \mathfrak{X}^n$, $N \in C(X \times \mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, *для всех* $(t, \overline{\xi}, u) \in X \times \mathfrak{U}$ *выполняется* $N(t, \overline{\xi}, u) = N_1(t, P\xi_1, P\xi_2, \dots, P\xi_n, u)$ *при некотором* $N_1 \in C((X \cap (\mathbb{R} \times \mathfrak{X}^1)) \times \mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, $x_k \in \mathfrak{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in X$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{U})$, $\mathfrak{X}^0 \subset \ker\Phi$, $\Psi, D^\alpha\Psi \in C([0, T]; \mathfrak{U})$, $\Phi x_0 = \Psi(0)$, *а также выполняются условия* (A)–(E) *при* $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}^1$, $A = L_1^{-1}M_1$, $G = L_1^{-1}QN_1$, $\tilde{z}_j = \tilde{x}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. *Тогда при некотором* $T_1 \in (0, T]$ *существует единственное обобщённое решение* $(x, u) \in C([0, T_1]; \mathfrak{X}) \times C([0, T_1]; \mathfrak{U})$ *задачи* (6)–(8) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, используя $(L, 0)$-ограниченность оператора M и условия на отображение N, сведём задачу (6)–(8) к задаче (11), (12) для уравнений

$$D^\alpha v(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D^{\alpha_1}v(t), D^{\alpha_2}v(t), ..., D^{\alpha_n}v(t), u(t)), \ t \in [0, T], \tag{14}$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}Q_0N_1(t, D^{\alpha_1}v(t), D^{\alpha_2}v(t), ..., D^{\alpha_n}v(t), u(t)), \quad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Здесь оператор $H = 0$. По теореме 2 получим однозначную локальную разрешимость обратной задачи (11), (12), (14) на отрезке $[0, T_1]$ при некотором $T_1 \in (0, T]$. Тогда из уравнения (15) следует, что $w(t) =$

$-M_0^{-1}Q_0N(t, D^{\alpha_1}v(t), D^{\alpha_2}v(t), ..., D^{\alpha_n}v(t), u(t))$, $t \in [0, T_1]$. Функция $w(t)$ является непрерывной, но для её гладкости необходима дополнительная гладкость решения v невырожденной обратной задачи, которая в данном случае не гарантирована. Поэтому доказано существование лишь обобщённого решения обратной задачи (6)–(8) в смысле соответствующего определения: *обобщённым решением* задачи (6)–(8) на отрезке $[0, T_1]$ назовём такую пару функций $(x, u) \in C([0, T_1]; D_M) \times C([0, T_1]; \mathfrak{U})$, что $D^\alpha Px, D^{\alpha_k}Px \in C([0, T_1]; \mathfrak{X})$, выполняются условия (7), при всех $t \in [0, T_1]$ справедливы равенства (8), (14), (15). □

5. Нелинейная обратная задача для дробной по времени системы Соболева

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^\alpha v(\xi, t) = [v(\xi, t), \overline{\omega}] - r(\xi, t) + \sum_{j=1}^{n} w_j(t) D_t^{\alpha_j} v(\xi, t) +$$

$$+ w_{n+1}(t) g(\xi, t) + h(\xi, t),\ (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{16}$$

$$\nabla \cdot v(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{17}$$

$$\langle v(\xi, t), n(\xi, t)\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{18}$$

$$D_t^k v(\xi, 0) = v_{0k}(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{19}$$

$$\int_\Omega \langle \eta_j(\xi), v(\xi, t)\rangle_{\mathbb{R}^3} d\xi = \psi_j(t), \quad t \in [0, T], \quad j = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{20}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, D_t^β — дробные производные Герасимова — Капуто по переменной t при $\beta > 0$ и дробные интегралы Римана — Лиувилля по переменной t при $\beta \leqslant 0$, $m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m-1$, $[\cdot, \overline{\omega}]$ — векторное произведение на вектор $\overline{\omega} := (0, 0, \omega)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор нормали к $\partial\Omega$. Функции g, h, v_{0k}, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, η_j, ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, заданы, вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, v_3)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, r_3) = \nabla p$ при некотором $p \in H^1(\Omega)$, а также коэффициенты $w_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, неизвестны.

Замечание 1. При $\alpha = 1$, $w_j \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, система (16), (17) является линеаризацией в окрестности нуля системы уравнений Соболева [19; 20].

Обозначим $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^3$, замыкание линеала $\mathfrak{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ в норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы.

Следуя подходу С. Л. Соболева [19], используем обобщённую постановку краевой задачи (16)–(18), заменив уравнение несжимаемости (17) и граничное условие (18) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{21}$$

Действительно, в силу плотности множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$ в подпространстве $\mathbb{H}_\pi$ и в силу интегрального тождества

$$\langle v, \nabla\varphi \rangle_{\mathbb{L}_2} := \int_\Omega \langle v, \nabla\varphi\rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \int_{\partial\Omega} v_n \varphi ds - \int_\Omega (\nabla \cdot v)\varphi dx,$$

справедливого при всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, получим, что для функции $v \in \mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$ выполнение условий (17) и (18) равносильно тому, что $v \in \mathbb{H}_\sigma$ или $\Pi v = 0$. При этом используется тот факт, что в силу разложения Вейля $\mathbb{H}_\pi = \nabla H^1(\Omega)$. Отказавшись от ограничения $v \in \mathbb{H}^1$, получим условие (21).

Определим оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{L}_2)$ равенством $Bz(\cdot) := [z(\cdot), \overline{\omega}]$. Положим

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \tag{22}$$

тогда векторы имеют вид $x = (v, r) \in \mathfrak{X}$, $f = (g, h) = (\Sigma f, \Pi f) \in \mathfrak{Y}$. При этом использовано то, что в силу (21) $v(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\sigma$, градиент давления $r(\cdot, t) = \nabla p(\cdot, t) \in \nabla H^1(\Omega) = \mathbb{H}_\pi$ для всех $t \in [0, T]$.

Систему (16), (21) можно задать в виде (6) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} \\ \Pi B & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}). \tag{23}$$

Лемма 2. [21, лемма 1]. *Пусть заданы пространства* (22) *и операторы* (23). *Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен, при этом проекторы имеют вид*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi B & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу леммы 2

$$\mathfrak{X}^0 = \{(0, x^0) : x^0 \in \mathbb{H}_\pi\}, \quad \mathfrak{X}^1 = \{(x^1, \Pi B x^1) : x^1 \in \mathbb{H}_\sigma\},$$

$$\mathfrak{Y}^0 = \{(0, y^0) : y^0 \in \mathbb{H}_\pi\}, \quad \mathfrak{Y}^1 = \{(y^1, 0) : y^1 \in \mathbb{H}_\sigma\}.$$

Обозначим

$$\tilde{v}(\xi, t) = v_{00}(\xi) + t v_{01}(\xi) + \frac{t^2}{2} v_{02}(\xi) + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} v_{0\,m-1}(\xi),$$

$$\tilde{v}_j(\xi) = D_t^{\alpha_j} \tilde{v}(\xi, 0), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n \leqslant m - 1 < \alpha \leqslant m \in \mathbb{N}$, $m_j - 1 < \alpha_j \leqslant m_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $v_{0k} \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, $g, h \in C([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$, $\psi_j, D_t^\alpha \psi_j \in C([0, T]; \mathbb{L}_2)$, $\eta_j \in \mathbb{H}_\sigma$, $\langle \eta_j, v_{00}(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2} = \psi_j(0)$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$,

$$\det \Xi_0 := \det \begin{pmatrix} \langle \eta_1, \tilde{v}_1 \rangle_{\mathbb{L}_2} & \ldots & \langle \eta_1, \tilde{v}_n \rangle_{\mathbb{L}_2} & \langle \eta_1, g(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2} \\ \langle \eta_2, \tilde{v}_1 \rangle_{\mathbb{L}_2} & \ldots & \langle \eta_2, \tilde{v}_n \rangle_{\mathbb{L}_2} & \langle \eta_2, g(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \eta_{n+1}, \tilde{v}_1 \rangle_{\mathbb{L}_2} & \ldots & \langle \eta_{n+1}, \tilde{v}_n \rangle_{\mathbb{L}_2} & \langle \eta_{n+1}, g(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2} \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\det \Xi(t) := \det \begin{pmatrix} D_t^{\alpha_1} \psi_1(t) & \ldots & D_t^{\alpha_n} \psi_1(t) & \langle \eta_1, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2} \\ D_t^{\alpha_1} \psi_2(t) & \ldots & D_t^{\alpha_n} \psi_2(t) & \langle \eta_2, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_t^{\alpha_1} \psi_{n+1}(t) & \ldots & D_t^{\alpha_n} \psi_{n+1}(t) & \langle \eta_{n+1}, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2} \end{pmatrix} \neq 0, \ t \in [0, T].$$

Тогда при некотором $T_1 \in (0, T]$ существует единственное гладкое решение $(v, w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}) \in C([0, T_1]; \mathbb{H}_\sigma) \times C([0, T_1]; \mathbb{R}^{n+1})$ обратной задачи (16), (19)–(21) *на отрезке* $[0, T_1]$.

Доказательство. Учитывая лемму 2, применим теорему 4 для исследования задачи (16), (19)–(21). Возьмём $X = \mathbb{R} \times \mathbb{H}_\sigma^n$, $\mathfrak{U} = \mathbb{R}^{n+1}$, $N : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_\sigma^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{H}_\sigma$, для $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$

$$N(t, \overline{z}, \overline{u}) = \sum_{j=1}^{n} z_j u_j + g(\cdot, t) u_{n+1} + h(\cdot, t). \tag{24}$$

Так как $g, h \in C([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$, имеем $\mathrm{im} N \subset \mathfrak{Y}^1$. Для линейного оператора

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}) : \mathbb{H}_\sigma \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Phi_j z := \langle \eta_j, z \rangle_{\mathbb{L}_2}, \ j = 1, 2, \dots, n+1,$$

выполняются неравенства $|\Phi_j z| \leqslant \|\eta_j\|_{\mathbb{H}_\sigma} \|z\|_{\mathbb{H}_\sigma}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, влекущие непрерывность Φ.

Далее возьмём в теореме 4 $f \equiv 0$, $x_k = v_{0k}(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\tilde{z}_j = \tilde{v}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Имеем $L_1^{-1} = I$, $G(t, \overline{z}, \overline{u}) = L_1^{-1} N(t, \overline{z}, \overline{u}) = G_1(t, \overline{z}) + G_2(t, \overline{z}, \overline{u})$, где $G_1(t, \overline{z}) := h(\cdot, t)$,

$$G_2(t, \overline{z}, \overline{u}) := \sum_{j=1}^{n} z_j u_j + g(\cdot, t) u_{n+1},$$

поэтому отображения $G_1 : [0, T] \times \mathbb{H}_\sigma^n \to \mathbb{H}_\sigma$ и $G_2 : [0, T] \times \mathbb{H}_\sigma^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{H}_\sigma$ непрерывны по совокупности переменных $(t, \overline{z}, \overline{u})$ и липшицевы по $(\overline{z}, \overline{u})$ на множестве $S_{\mathbb{H}_\sigma^n \times \mathbb{R}^{n+1}}(0, R, T)$ при любом $R > 0$. Кроме того,

$$\Phi_k G_2(t, \overline{z}, \overline{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \langle \eta_k, z_j \rangle_{\mathbb{L}_2} + u_{n+1} \langle \eta_k, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} u_j \Phi_k z_j + u_{n+1} \langle \eta_k, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2} := G_{3,k}(t, \Phi z_1, \Phi z_2, \dots, \Phi z_n, \overline{u}), \ k = 1, 2, \dots, n+1,$$

$G_3 = (G_{3,1}, G_{3,2}, \dots, G_{3,n+1}) : [0, T] \times \mathbb{R}^{(n+1)^2} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Возьмём $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1})$, $y_{0j} = D_t^\alpha \psi_j(0) - \langle \eta_j, B v_{00} \rangle_{\mathbb{L}_2} - \langle \eta_j, h(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2}$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, $\overline{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n+1})$. Система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \langle \eta_k, \tilde{v}_j \rangle_{\mathbb{L}_2} + u_{n+1} \langle \eta_k, g(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2} = y_{0k} = D_t^\alpha \psi_k(0) - \langle \eta_k, B v_{00} \rangle_{\mathbb{L}_2} - \langle \eta_k, h(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2},$$

$k = 1, 2, \dots, n+1$, имеет единственное решение $\overline{u}_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n+1}) = \Xi_0^{-1} \overline{y}_0$ в силу условия $\det \Xi_0 \neq 0$. Понятно, что $\overline{u} = \Xi^{-1}(t) \overline{z} := F(t, \overline{z})$ определено при $t \in [0, T]$ как обратная по отношению к $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ функция к отображению

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} u_j D_t^{\alpha_j} \psi_k + u_{n+1} \langle \eta_k, g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2}, \ k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Так как $D_t^\alpha \psi_j \in C([0, T]; \mathbb{R})$, то $\psi_j \in C^{m-1}([0, T]; \mathbb{R})$, поэтому $D_t^{\alpha_k} \psi_j \in C([0, T]; \mathbb{R})$ при $j = 1, 2, \dots, n+1$, $\alpha_k \leqslant m-1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, $\Xi \in C([0, T]; \mathbb{R}^{(n+1)^2})$, $\min\limits_{t \in [0, T]} |\det \Xi(t)| > 0$, существует $\max\limits_{t \in [0, T]} |\det \Xi^{-1}(t)|$. Таким образом, отображение $F : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывно по совокупности переменных, липшицево по $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ и тем самым выполняются все условия теоремы 4. Получаем существование единственного гладкого решения задачи (16)–(20) на отрезке $[0, T_1]$ при некотором $T_1 \in (0, T]$. $\square$

Замечание 2. Условия теоремы 5 на оператор N в данной задаче не выполняются.

Список литературы

1. **Orlovsky D. G.** Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space // Журн. Сиб. федер. ун-та. Сер. Математика и физика. 2015. Т. 8, № 1. С. 55–63.
2. **Fedorov V. E., Ivanova N. D.** Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. Vol. 20, no. 3. P. 706–721.
3. **Fedorov V. E., Nazhimov R. R.** Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2019. Vol. 22, no. 2. P. 271–286.
4. **Orlovsky D. G.** Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1205, no. 1. P. 012042.
5. **Федоров В. Е., Костич М.** Задача идентификации для сильно вырожденных эволюционных уравнений с производной Герасимова — Капуто // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 100–113.
6. **Федоров В. Е., Нагуманова А. В.** Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова — Капуто в секториальном случае // Мат. заметки. Сев.-Восточ. федер. ун-та. 2020. Т. 27, № 2. С. 54–76.
7. **Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S.** A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44, no. 15. P. 11961–11969.
8. **Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Kostić M.** A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. Vol. 29, no. 2. P. 173–184.
9. **Kostin A. B., Piskarev S. I.** Inverse source problem for the abstract fractional differential equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. Vol. 29, no. 2. P. 267–281.
10. **Turov M. M., Fedorov V. E., Kien B. T.** Linear inverse problems for multi-term equations with Rieman – Liouville derivative // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 38. С. 36–53.
11. **Orlovsky D., Piskarev S.** Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2022. Vol. 30, no. 2. P. 221–237.
12. **Плеханова М. В., Ижбердеева Е. М.** О корректности обратной задачи для вырожденного эволюционного уравнения с дробной производной Джрбашяна — Нерсесяна // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. Темат. обзоры. 2022. Т. 213. С. 80–88.
13. **Федоров В. Е., Борель Л. В., Иванова Н. Д.** Нелинейные обратные задачи для одного класса уравнений с производными Римана — Лиувилля // Записки науч. семинаров ПОМИ. 2022. Т. 519. С. 264–288.
14. **Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Melekhina D. V.** Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives // Fractal and Fractional. 2023. Vol. 7. P. 464.
15. **Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S.** Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no. 11. P. 3125–3141.
16. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, Basel : Marcel Dekker, Inc., 2000.
17. **Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В.** Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.

18. **Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.** Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston : VSP, 2003.
19. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18. С. 3–50.
20. **Демиденко Г. В., Успенский С. В.** Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998.
21. **Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.** Решения начально-краевых задач для некоторых вырожденных систем уравнений дробного порядка по времени // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. 2015. Т. 12. С. 12–22.

Поступила в редакцию 03.05.2023.
После переработки 14.06.2023.

Сведения об авторах

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

Плеханова Марина Васильевна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.

Иванова Наталья Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: natalia.d.ivanova@gmail.com.

Шуклина Анна Фаридовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: islamovaaf@gmail.com.

Филин Николай Владимирович, ассистент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: filinnv@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 2. P. 190–202.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18203

NONLINEAR INVERSE PROBLEMS FOR SOME EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

V.E. Fedorov[1,a], **M.V. Plekhanova**[1,b], **N.D. Ivanova**[2,c], **A.F. Shuklina**[1,d], **N.V. Filin**[1,e]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *kar@csu.ru,* [b] *mariner79@mail.ru,* [c] *natalia.d.ivanova@gmail.com,*
[d] *filinnv@csu.ru,* [e] *islamovaaf@gmail.com*

The solvability of nonlinear inverse problems with a time-dependent unknown element for evolution equations in Banach spaces with Gerasimov — Caputo derivatives is investigated. A theorem is obtained on the existence of a unique smooth solution of a nonlinear problem for an equation solved with respect to the highest fractional derivative with a bounded operator in the linear part. It is used in the study of degenerate evolution equations under the condition of p-boundedness of a pair of operators in the linear part of the equation — at the highest derivative and at the desired function. In the case of the action of a nonlinear operator into a subspace without degeneration, the existence of a unique smooth solution is proved; and for the independent of the nonlinear operator from elements of the degeneration subspace, the existence of a unique generalized solution is shown. The abstract results obtained for degenerate equations are used in the study of an inverse problem for a modified system of Sobolev equations with unknown coefficients at lower order fractional derivatives in time.

Ключевые слова: *Gerasimov — Caputo fractional derivative, inverse problem, degenerate evolution equation, Sobolev system of equations.*

References

1. **Orlovsky D.G.** Parameter determination in a differential equation of fractional order with Riemann — Liouville fractional derivative in a Hilbert space. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 55–63.
2. **Fedorov V.E., Ivanova N.D.** Identification problem for degenerate evolution equations of fractional order. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 706–721.
3. **Fedorov V.E., Nazhimov R.R.** Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann — Liouville derivative. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 271–286.
4. **Orlovsky D.G.** Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1205, no. 1, p. 012042.
5. **Fedorov V.E., Kostić M.** Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov — Caputo derivative. *Differential Equations*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1613–1627.
6. **Fedorov V.E., Nagumanova A.V.** Linear inverse problems for degenerate evolution equations with the Gerasimov — Caputo derivative in the sectorial case. *Mathematical Notes of NEFU*, 2020, vol. 27, no. 2, pp. 54–76.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project 23-21-10015).

7. **Fedorov V.E., Nagumanova A.V., Avilovich A.S.** A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann — Liouville derivative in the sectorial case. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, no. 15, pp. 11961–11969.
8. **Fedorov V.E., Nagumanova A.V., Kostić M.** A class of inverse problems for fractional order degenerate evolution equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2021, vol. 29, no. 2, pp. 173–184.
9. **Kostin A.B., Piskarev S.I.** Inverse source problem for the abstract fractional differential equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2021, vol. 29, no. 2, pp. 267–281.
10. **Turov M.M., Fedorov V.E., Kien B.T.** Linear inverse problems for multi-term equations with Rieman — Liouville derivative. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2021, vol. 38, pp. 36–53.
11. **Orlovsky D., Piskarev S.** Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2022, vol. 30, no. 2, pp. 221–237.
12. **Plekhanova M.V., Izhberdeeva E.M.** O korrektnosti obratnoy zadachi dlya vyrozhdennogo evolyutsionnogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy Dzhrbashyana — Nersesyana [On the correctness of the inverse problem for a degenerate evolutionary equation with the Dzhrbashyan — Nersesyan fractional derivative]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i eyo prilozheniya. Tematicheskiye obzory* [Results of science and technology. Ser. Contemporary mathematics and its applications. Thematic reviews], 2022, vol. 213, pp. 80–88. (In Russ.).
13. **Fedorov V.E., Borel L.V., Ivanova N.D.** Nelineynye obratnye zadachi dlya odnogo klassa uravneniy s proizvodnymi Rimana — Liuvillya [Nonlinear inverse problems for a class of equations with the Riemann — Liouville derivatives]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* [Notes of PDMI scientific seminars], 2022, vol. 519, pp. 264–288. (In Russ.).
14. **Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Melekhina D.V.** Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan — Nersesyan derivatives. *Fractal and Fractional*, 2023, vol. 7, p. 464.
15. **Fedorov V.E., Ivanova N.D., Borel L.V., Avilovich A.S.** Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, no. 11, pp. 3125–3141.
16. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York, Basel, Marcel Dekker, Inc., 2000.
17. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M., Plekhanova M.V.** Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1367–1375.
18. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*. Utrecht, Boston, VSP, 2003.
19. **Sobolev S.L.** Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki [On a new problem of mathematical physics]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* [News of USSR Academy of Sciences. Mathematical series], 1954, vol. 18, pp. 3–50. (In Russ.).
20. **Demidenko G.V., Uspenskii S.V.** *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. New York : Marcel Dekker, Inc., 2003.
21. **Gordievskikh D.M., Fedorov V.E.** Solutions for initial boundary value problems for some degenerate equations systems of fractional order with respect to the time. *The Bulletin of Irkutsk State University. Ser. Mathematics*, 2015, vol. 12, pp. 12–22.

Article received 03.05.2023.
Corrections received 14.06.2023.