Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 2. С. 173–189.

УДК.517.9 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18202

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $sl_2(\mathbb{R})$ И ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

М. В. Нещадим[1,a], А. А. Симонов[2,b], А. П. Чупахин[3,c]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
[3] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[a] *neshch@math.nsc.ru*, [b] *a.simonov@g.nsu.ru*, [c] *chupakhin@hydro.nsc.ru*

Найдены все неэквивалентные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^2$. Для каждого из найденных представлений описаны все обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие данные представления, в терминах базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Также найдены операторы Казимира соответствующей универсальной обёртывающей алгебры, проинтегрированы уравнения, порождённые оператором Казимира, и доказана алгебраическая независимость операторов инвариантного дифференцирования и оператора Казимира.

Ключевые слова: *алгебра $sl_2(\mathbb{R})$, групповой анализ дифференциальных уравнений, операторы Казимира, операторы инвариантного дифференцирования.*

Введение

Свойства симметрии, групповые свойства позволяют строить широкие классы точных решений для уравнений с частными производными [1–9]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) группа симметрии и соответствующая ей алгебра Ли зачастую определяют алгебраические и геометрические конструкции, связанные с данным уравнением. Возможно, исключительными с этой точки зрения представляются две простые алгебры Ли минимальной размерности: алгебры $so_3(\mathbb{R})$ и $sl_2(\mathbb{R})$. Относительно первой имеется обширная литература по представлениям группы вращений и сферическим функциям. Геометрические аспекты второй также обширны. Данная работа представляет собой собрание некоторых фактов, связывающих алгебру $sl_2(\mathbb{R})$ и обыкновенные дифференциальные уравнения, свойства их интегрируемости и геометрические структуры. Принципиальным моментом в приложении алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ к дифференциальным уравнениям является то, что разные её представления реализуют различные уравнения и связанные с ними дифференциальные инварианты.

Начнем с классического результата С. Ли, изложенного, например, в [10]. Говорят, что система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = F^i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

обладает фундаментальной системой решений, если общее решение этой системы выражается через конечное число m частных решений формулами, содержащими n произвольных констант. Имеет место следующая теорема.

Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных научных исследований СО РАН № III.22.4.1 и СО РАН № I.1.5 (проект FWNF-2022-0009).

Теорема (С. Ли). Система (1) обладает фундаментальной системой решений, если правые части представимы в специальном виде $F^i = T_1(t)\xi_1^i(x)+\ldots+T_r(t)\xi_r^i(x)$ так, что операторы $X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\partial_{x^i}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$, образуют r-мерную алгебру Ли.

Алгебра $sl_2(\mathbb{R})$, представленная операторами

$$X_1 = \partial_y, \quad X_2 = y\partial_y, \quad X_3 = y^2\partial_y, \tag{2}$$

даёт пример этой теоремы в виде уравнения Риккати

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2.$$

С. Ли доказал, что всякая трёхпараметрическая группа преобразований на прямой совпадает (с точностью до замены переменных) с группой проективных преобразований, порождённой трёхмерной алгеброй Ли с базисом (2).

Обыкновенные дифференциальные уравнения старшего порядка порождаются, как правило, дифференциальными инвариантами групп симметрии и соответствующих алгебр. Например, в [11] приведена таблица 7 неподобных трёхмерных алгебр Ли и инвариантных уравнений. В частности, под номером 12 находится алгебра $sl_2(\mathbb{R})$, представленная операторами (2), и соответствующее уравнение

$$y''' = \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} + f(x)y'.$$

С этим уравнением связан оператор инвариантного дифференцирования для этого представления, которое содержит в чистом виде производную Шварца

$$\{y\} \equiv \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^2} = f(x).$$

Расширения групп (и алгебр) Ли связаны с геометрическими конструкциями коциклов [12], а для алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ — с наличием производной Шварца.

Производная Шварца была открыта Лагранжем. Шварциан встречался также в работе Куммера, датированной 1836 годом; название ему дал Кэли. В наши дни шварциан встречается преимущественно в работах, посвящённых классическому комплексному анализу и одномерной динамике. В современной математической физике производная Шварца связана в основном с конформной теорией поля.

Производная Шварца является простейшим проективным дифференциальным инвариантом, а именно, инвариантом диффеоморфизма проективной прямой относительно естественного действия $SL_2(\mathbb{R})$ на $\mathbb{RP}^1$.

Отметим, что если с производной Шварца связать форму

$$S(f) = \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{f''^2}{f'^2}\right)(dx)^2,$$

где $f : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ — некоторый диффеоморфизм, то

1) для проективного преобразования g выполнено $S(g) = 0$ и $S(g \circ f) = S(f)$,

2) для произвольных диффеоморфизмов g, f имеем $S(g \circ f) = S(g) \circ f + S(f)$, где $\varphi \circ f = (f'(x))^2 a(f(x))(dx)^2$, $\varphi = a(x)(dx)^2$ в аффинной системе координат $x \in R \bigcup \{\infty\} = \mathbb{RP}^1$.

Свойство 2) означает, что S является коциклом.

Группа $SL(2,\mathbb{R})$, соответствующая алгебре $sl_2(\mathbb{R})$, обладает многими замечательными свойствами, ей посвящена монография [13].

Во-первых, это некомпактная простая группа Ли минимальной размерности, то есть простейший представитель большого семейства, включающего линейные, ортогональные, унитарные и симплектические группы над полями вещественных и комплексных чисел и телом кватернионов.

Во-вторых, группа $SL(2,\mathbb{R})$ имеет несколько геометрических реализаций. А именно: она является группой движений плоскости Лобачевского, группой симметрии теории относительности в трёхмерном пространстве-времени (так называемая «укороченная группа Лоренца»), группой автоморфизмов любой односвязной области на комплексной плоскости, в частности единичного круга и верхней полуплоскости, группой конформных (дробно-линейных) преобразований в одномерном вещественном пространстве.

Также в [13, с. 277] приведено представление алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ следующего вида:

$$e_{12} \mapsto L_1 = \partial_x, \quad e_{21} \mapsto L_2 = (y^2 - x^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \quad a \mapsto L_3 = 2x\partial_x + 2y\partial_y.$$

При этом оператор Лапласа $L = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) = L_3^2 - \frac{1}{2}(L_2L_3 + L_3L_2)$ является $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантом. Это означает, что если

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}), \quad \sigma z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

и τ_σ — оператор сдвига, $\tau_\sigma f(z) = f(\sigma z)$, то $\tau_\sigma \circ L = L \circ \tau_\sigma$. В этом примере реализуется другое представление и свойство инвариантности выступает в виде, восходящем к Трессе, теории дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Основы данной теории изложены в [3, гл. VII]. Приведём основные результаты этой теории.

Оператор δ называется оператором инвариантного дифференцирования группы G^r, если для любого дифференциального инварианта F группы G^r выражение δF также является дифференциальным инвариантом этой группы.

Совокупность всех скалярных дифференциальных инвариантов группы G^r называется полем инвариантов группы G^r.

Множество операторов инвариантного дифференцирования группы G^r является алгеброй Ли над полем инвариантов этой группы.

Для любой группы G^r преобразований пространства $\mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(y)$ существует n операторов инвариантного дифференцирования, линейно независимых над полем инвариантов этой группы.

Для любой группы G^r существует конечный базис дифференциальных инвариантов, т. е. такой конечный набор скалярных дифференциальных инвариантов, что любой дифференциальный инвариант этой группы получается из инвариантов базиса с помощью конечного числа функциональных операций и операций инвариантного дифференцирования.

Определяющим свойством операторов инвариантного дифференцирования группы непрерывных преобразований является их коммутирование со всеми преобразованиями группы. Вместе с тем в абстрактной алгебре имеется конструкция центра универсальной обёртывающей алгебры, которая обладает подобными свойствами.

Так, хорошо известно [14, с. 140], что элемент $a^2 + 2(e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12})$ является порождающим центра (оператор Казимира) универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$.

В монографии [15, с. 315] сформулировано утверждение, что алгебра $sl_2(\mathbb{R})$ изоморфна алгебре A, порождённой элементами p^2, q^2, $pq + qp$, где элементы p, q — порождающие алгебры Вейля $A_1(\mathbb{R}) = \langle p, q \| pq - qp = 1\rangle$. Причём изоморфизм задаётся отображением

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}(a(pq + qp) + bq^2 - cp^2).$$

Изоморфизм основан на том, что в алгебре $A_1(\mathbb{R})$ выполнены соотношения

$$[p^2, q^2] = 2(pq + qp), \quad [pq, p^2] = -2p^2, \quad [pq, q^2] = 2q^2.$$

В монографии [16] приведена классификация простых модулей для алгебры $sl_2(\mathbb{R})$. В [15, с. 306] приводится классификация конечномерных представлений над полем комплексных чисел трёхмерных простых алгебр Ли: $sl_2(\mathbb{R})$ и $so_3(\mathbb{R})$.

Приведённые примеры, несомненно, являются фрагментами некоторой общей теории представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ и соответствующей алгебры. В данной работе описаны конструкции, связанные с применением алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным инвариантам. Эти конструкции подчёркивают важность выбора представления алгебры для иллюстрации тех или иных свойств.

В §1 данной работы найдены все неэквивалентные представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространстве векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^2$. В §2 для каждого из найденных представлений описаны все обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие данные представления, в терминах базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. В §3 для представлений из §1 найдены операторы Казимира соответствующей универсальной обёртывающей алгебры, проинтегрированы уравнения, порождённые оператором Казимира, и доказана алгебраическая независимость операторов инвариантного дифференцирования и оператора Казимира. Все рассматриваемые функции предполагаются достаточно гладкими, и вычисления проводятся в предположении общего положения.

1. Представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространство векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^2$

Алгебра $sl_2(\mathbb{R})$ порождается матрицами

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и имеет следующую таблицу коммутаторов:

	e_{12}	e_{21}	a
e_{12}	0	a	$-2e_{12}$
e_{21}	$-a$	0	$2e_{21}$
a	$2e_{12}$	$-2e_{21}$	0

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Все представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространство векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^2$ эквивалентны одному из следующих:*

1) $a = \partial_x$, $e_{12} = \frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x$, $e_{21} = -\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x$, *где* $\varepsilon = \pm 1$;
2) $a = \partial_x$, $e_{12} = e^{2x}\partial_y$, $e_{21} = e^{-2x}\left(y\partial_x + (y^2 + A)\partial_y\right)$, *где* $A = 0, \pm 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространство векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^1$. Можно считать, что $a = \partial_x$. Пусть $e_{12} = \alpha\partial_x$, $e_{21} = \beta\partial_x$, где α, β — некоторые функции переменной x. В силу коммутаторных соотношений получаем

$$[e_{12}, e_{21}] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\partial_x = \partial_x, \quad [e_{12}, a] = -\alpha'\partial_x = -2\alpha\partial_x, \quad [e_{21}, a] = -\beta'\partial_x = 2\beta\partial_x.$$

Следовательно, $\alpha = \alpha_0 e^{2x}$, $\beta = \beta_0 e^{-2x}$, $4\alpha_0\beta_0 = -1$, где α_0, β_0 — константы. Полагая, $\alpha_0 = \frac{p}{2}$, $\beta_0 = -\frac{1}{2p}$, $p \neq 0$, получим

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{p}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = -\frac{1}{2p}e^{-2x}\partial_x.$$

Замена переменных $x = y - y_0$ приводит операторы к виду

$$a = \partial_y, \quad e_{12} = \frac{p}{2}e^{2y}e^{-2y_0}\partial_y, \quad e_{21} = -\frac{1}{2p}e^{-2y}e^{2y_0}\partial_y.$$

Положим $pe^{-2y_0} = \varepsilon = \pm 1$. Тогда операторы a, e_{12}, e_{21}, после замены переменной y на x, примут вид

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = -\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x.$$

Рассмотрим случай представления алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространство векторных полей $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^2$, не сводящиеся к представлению в $\operatorname{Vect}\mathbb{R}^1$. Можно считать, что $a = \partial_x$. Пусть

$$e_{12} = \alpha\partial_x + \beta\partial_y, \quad e_{21} = \gamma\partial_x + \delta\partial_y,$$

где α, β, γ, δ — некоторые функции переменных x, y. Также считаем, что $\beta \neq 0$ или $\delta \neq 0$. В силу коммутаторных соотношений $[a, e_{12}] = 2e_{12}$, $[a, e_{21}] = -2e_{21}$ получаем

$$e_{12} = e^{2x}(\alpha_1\partial_x + \beta_1\partial_y), \quad e_{21} = e^{-2x}(\gamma_1\partial_x + \delta_1\partial_y),$$

где α_1, β_1, γ_1, δ_1 — некоторые функции переменной y.

Пусть $\beta_1 \neq 0$. Выпрямим оператор $\alpha_1\partial_x + \beta_1\partial_y$. Из уравнения характеристик

$$\frac{dx}{\alpha_1} = \frac{dy}{\beta_1}$$

находим инвариант $p = x - \int \frac{\alpha_1}{\beta_1}dy$. В переменных p, y операторы a, $\alpha_1\partial_x + \beta_1\partial_y$ примут вид ∂_p, $\beta_1\partial_y$ соответственно. Так как $x = p + \int \frac{\alpha_1}{\beta_1}dy$, то

$$e_{12} = e^{2p + \int \frac{\alpha_1}{\beta_1}dy}\beta_1\partial_y = e^{2p}\beta_2\partial_y,$$

где $\beta_2 \neq 0$ — функция переменной y.

Введём переменную $z = z(y)$: $\beta_2 z'(y) = 1$. Тогда в переменных p, z:

$$a = \partial_p, \quad e_{12} = e^{2p}\partial_z, \quad e_{21} = e^{-2p}(\gamma_2\partial_p + \delta_2\partial_z),$$

где γ_2, δ_2 — некоторые функции переменной z. Итак, можно считать, что

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = e^{2x}\partial_y, \quad e_{21} = e^{-2x}(\gamma_1\partial_x + \delta_1\partial_y),$$

где γ_1, δ_1 — некоторые функции переменной y.

Из коммутаторного соотношения $[e_{12}, e_{21}] = a$ получаем

$$\gamma_1'\partial_x + (\delta_1' - 2\gamma_1)\partial_y = \partial_x.$$

Следовательно, $\gamma_1' = 1$, $\delta_1' - 2\gamma_1 = 0$. Отсюда $\gamma_1 = y + \gamma_2$, $\delta_1 = y^2 + 2\gamma_2 y + \delta_2$, где γ_2, δ_2 — некоторые константы. Замена переменных $y + \gamma_2 \mapsto y$ приводит операторы к виду

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = e^{2x}\partial_y, \quad e_{21} = e^{-2x}(y\partial_x + (y^2 + A)\partial_y),$$

где A — некоторая константа. Кроме того, показано, что если $\beta \neq 0$, то и $\delta \neq 0$.

Далее заметим, что замена переменных

$$p = x + p_0, \quad q = ye^{2p_0}, \quad q_0 = const$$

не меняет вид операторов a, e_{12}, а оператор e_{21} преобразует к виду

$$e_{21} = e^{-2p}(q\partial_p + (q^2 + Ae^{4p_0})\partial_q).$$

Действительно, $a(p) = 1$, $a(q) = 0$, $e_{12}(p) = 0$, $e_{12}(q) = e^{2x}e^{2p_0} = e^{2p}$, $e_{21}(p) = e^{-2x}y = e^{-2p}q$, $e_{21}(q) = e^{-2x}(y^2 + A)e^{2p_0} = e^{-2p}(q^2 + Ae^{4p_0})$. Если $A \neq 0$, то выбираем p_0 так, чтобы $Ae^{4p_0} = \pm 1$. □

Замечание 1. Все представления для алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в пространство векторных полей $\mathrm{Vect}\,\mathbb{R}^2$, полученные в теореме 1, не являются сильно эквивалентными [17]. Действительно, представления 1) и 2) не являются сильно эквивалентными, так как они имеют разный ранг — представление 1) имеет ранг $r = 1$, а представление 2) имеет ранг $r = 2$.

Далее, пусть представления

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{1}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = -\frac{1}{2}e^{-2x}\partial_x,$$

и

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = -\frac{1}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = \frac{1}{2}e^{-2x}\partial_x,$$

сильно эквивалентны. Тогда существует замена переменных $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, такая, что операторы

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{1}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = -\frac{1}{2}e^{-2x}\partial_x,$$

в переменных p, q имеют вид

$$a = \partial_p, \quad e_{12} = -\frac{1}{2}e^{2p}\partial_p, \quad e_{21} = \frac{1}{2}e^{-2p}\partial_p.$$

Но тогда $a(p) = p_x = 1$, $e_{12}(p) = \frac{1}{2}e^{2x}p_x = -\frac{1}{2}e^{2p}$ — противоречивая система равенств, так как рассматриваются замены переменных над полем вещественных чисел.

Рассмотрим представление 2). Пусть замена переменных $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ сохраняет вид операторов a, e_{12}, т. е. $a(p) = 1$, $a(q) = 0$, $e_{12}(p) = 0$, $e_{12}(q) = e^{2p}$. Тогда $p = x + p_0$, $q = ye^{2p_0} + q_0$, где p_0, q_0 — некоторые константы. Следовательно, $e_{21}(p) = e^{-2x}y = e^{-2p}(q - q_0)$. Так как $e_{21}(p) = e^{-2p}q$, то $q_0 = 0$. Далее

$$e_{21}(q) = e^{-2x}(y^2 + A)e^{2p_0} = e^{-2p}(q^2 + Ae^{4p_0}).$$

Так как $A = 0, \pm 1$, то $p_0 = 0$. Итак, три представления 2) не являются сильно эквивалентными.

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения, связанные с найденными представлениями алгебры $sl_2(\mathbb{R})$

Получим классификацию обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого из найденных представлений алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ в терминах базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования.

Теорема 2. 1. *Базис дифференциальных инвариантов для представления*

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{\varepsilon}{2} e^{2x} \partial_x, \quad e_{21} = -\frac{\varepsilon}{2} e^{-2x} \partial_x,$$

где $\varepsilon = \pm 1$ *составляют*

$$y, \quad I = \frac{y'''}{(y')^3} + \frac{2}{(y')^2} - \frac{3}{2} \frac{(y'')^2}{(y')^4}.$$

Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид

$$\delta = \frac{1}{y'} D,$$

где D *— оператор полной производной по переменной* x *и все ОДУ порядка* $n+3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *допускающие данное представление алгебры* $sl_2(\mathbb{R})$, *имеют вид*

$$\Phi(y, I, \delta I, \ldots, \delta^n I) = 0$$

для некоторой функции Φ.

2. *Базис дифференциальных инвариантов для представления*

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = e^{2x} \partial_y, \quad e_{21} = e^{-2x} \left(y \partial_x + (y^2 + A) \partial_y \right),$$

где $A = 0, \pm 1$, *составляет*

$$J = t(s^2 + 4A)^{-3/2} + 6 \int (s^2 + 4A)^{-3/2} ds + 24 \int (s^2 + 4A)^{-5/2} ds$$

где $s = y' - 2y$, $t = y'' - 4y$. *Оператор инвариантного дифференцирования имеет вид*

$$\delta = (s^2 + 4A)^{-1/2} D,$$

где D *— оператор полной производной по переменной* x *и все ОДУ порядка* $n+2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *допускающие данное представление алгебры* $sl_2(\mathbb{R})$, *имеют вид*

$$\Phi(J, \delta J, \ldots, \delta^n J) = 0$$

для некоторой функции Φ.

Доказательство. Пусть $V = \xi \partial_x + \eta \partial_y$, где $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, — некоторый линейный дифференциальный оператор. Тогда его продолжения на пространство $\mathbb{R}(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots)$ находятся по следующим реккурентным формулам:

$$V_1 = V + \eta_1 \partial_{y'}, \quad \text{где} \quad \eta_1 = D(\eta) - y' D(\xi),$$

$$V_2 = V_1 + \eta_2 \partial_{y''}, \quad \text{где} \quad \eta_2 = D(\eta_1) - y'' D(\xi),$$

$$V_3 = V_2 + \eta_3 \partial_{y'''}, \quad \text{где} \quad \eta_3 = D(\eta_2) - y''' D(\xi),$$

и т. д. Если построено n-е продолжение V_n, то $(n+1)$-е продолжение V_{n+1} находится по формуле $V_{n+1} = V_n + \eta_{n+1}\partial_{y^{(n+1)}}$, где $\eta_{n+1} = D(\eta_n) - y^{(n+1)}D(\xi)$.

Все продолжения оператора a совпадают с ним самим.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если оператор V имеет вид $V = e^{px}\partial_x$, $p \in \mathbb{R}$, то его n-е продолжение находится по формуле $V_n = V_{n-1} + \eta_n\partial_{y^{(n)}}$, где $\eta_n = -e^{px}((p+D)^n - D^n)y'$.*

Доказательство. База индукции $n = 1$. Имеем

$$\eta_1 = D(\eta) - y'D(\xi) = D(0) - y'D(e^{px}) = -e^{px}((p+D) - D)y'.$$

Шаг индукции $n \Rightarrow n+1$:

$$\eta_{n+1} = D(\eta_n) - y^{(n+1)}D(\xi) = D\left(-e^{px}((p+D)^n - D^n)y'\right) - y^{(n+1)}D(e^{px}) =$$

$$= -pe^{px}((p+D)^n - D^n)y' - e^{px}((p+D)^nD - D^{n+1})y' - pe^{px}D^ny' =$$

$$= -e^{px}\left(p(p+D)^n + (p+D)^nD - D^{n+1}\right)y' = -e^{px}\left((p+D)^{n+1} - D^{n+1}\right)y'.$$

□

Для того, чтобы найти базис дифференциальных инвариантов, в соответствии с общей теорией [3] надо операторы a, e_{12}, e_{21} продолжить k раз, где число k определяется условием: k — наименьшее, такое, что ранг r_k k раз продолженных операторов равен 3. Тогда базис дифференциальных инвариантов составляют инварианты $(k+1)$-го продолжения.

Рассмотрим операторы

$$a = \partial_x, \quad e_{12} = \frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x, \quad e_{21} = -\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x,$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Вычисления показывают, что $k = 2$, т. е. надо взять 3-е продолжение операторов, которое выглядит следующим образом (знак ε не влияет на вычисление продолжения операторов и нахождение инвариантов, поэтому он не присутствует в таблице):

	ξ	η	η_1	η_2	η_3
∂_x	1	0	0	0	0
$e^{2x}\partial_x$	e^{2x}	0	$-2e^{2x}y'$	$-e^{2x}(4y' + 4y'')$	$-e^{2x}(8y' + 12y'' + 6y''')$
$e^{-2x}\partial_x$	e^{-2x}	0	$2e^{-2x}y'$	$-e^{-2x}(4y' - 4y'')$	$e^{-2x}(8y' - 12y'' + 6y''')$

Ясно, что $r_1 = 2$, $r_2 = 3 = r_3$.

Так как присутствует оператор ∂_x, то инварианты не зависят от переменной x. Поэтому инварианты надо искать в пространстве $\mathbb{R}(y, y', y'', y''')$. Переменная y является инвариантом. Для нахождения ещё одного инварианта рассмотрим операторы

$$b_1 = y'\partial_{y'} + 2(y' + y'')\partial_{y''} + (4y' + 6y'' + 3y''')\partial_{y'''},$$

$$b_2 = y'\partial_{y'} + 2(-y' + y'')\partial_{y''} + (4y' - 6y'' + 3y''')\partial_{y'''},$$

которые получены из продолженных операторов $e^{2x}\partial_x$, $e^{-2x}\partial_x$ очевидным образом. Далее возьмём их линейные комбинации

$$w_1 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = y'\partial_{y'} + 2y''\partial_{y''} + (4y' + 3y''')\partial_{y'''}, \ w_2 = \frac{1}{4}(b_1 - b_2) = y'\partial_{y''} + 3y''\partial_{y'''}.$$

Инвариантами оператора w_1 являются выражения

$$p = \frac{y''}{(y')^2}, \quad q = \frac{y''' + 2y'}{(y')^3}.$$

В переменных y', p, q операторы w_1, w_2 принимают вид

$$w_1 = y'\partial_{y'}, \quad w_2 = \frac{1}{y'}(\partial_p + 3p\partial_q).$$

Следовательно, выражение $I = q - \frac{3}{2}p^2$ является искомым дифференциальным инвариантом. Подставляя выражения для p, q, получаем

$$I = \frac{y'''}{(y')^3} + \frac{2}{(y')^2} - \frac{3}{2}\frac{(y'')^2}{(y')^4}.$$

Остаётся найти операторы инвариантного дифференцирования. Для этого, в соответствии с общей теорией [3], надо рассмотреть второе продолжение операторов a, e_{12}, e_{21}. Обозначим эти продолжения соответственно:

$$w_1 = \partial_x,\ w_2 = e^{2x}\partial_x - 2e^{2x}y'\partial_{y'} - 4e^{2x}(y' + y'')\partial_{y'},$$

$$w_3 = e^{-2x}\partial_x + 2e^{-2x}y'\partial_{y'} - 4e^{-2x}(y' - y'')\partial_{y'}$$

и найдём функцию $\lambda = \lambda(x, y, y', y'')$, такую, что

$$w_1(\lambda) = \lambda D(1), \quad w_2(\lambda) = \lambda D(e^{2x}), \quad w_3(\lambda) = \lambda D(e^{-2x}).$$

Тогда оператор инвариантного дифференцирования можно взять в виде $\delta = \lambda D$. Вычисления показывают, что $\lambda = \frac{\varphi(y)}{y'}$, где $\varphi(y)$ — произвольная ненулевая функция. Полагая $\varphi(y) = 1$, получим оператор инвариантного дифференцирования

$$\delta = \frac{1}{y'}D.$$

Рассмотрим операторы $a = \partial_x$, $e_{12} = e^{2x}\partial_y$, $e_{21} = e^{-2x}\left(y\partial_x + (y^2 + A)\partial_y\right)$, где $A = 0, \pm 1$. Вычисления показывают $k = 1$, т. е. надо взять 2-е продолжение операторов:

	ξ	η
∂_x	1	0
$e^{2x}\partial_y$	0	e^{2x}
$e^{-2x}\left(y\partial_x + (y^2 + A)\partial_y\right)$	$e^{-2x}y$	$e^{-2x}(y^2 + A)$

η_1	η_2
0	0
$2e^{2x}$	$4e^{2x}$
$2e^{-2x}(-2y^2 - 2A + 4yy' - y'^2)$	$e^{-2x}(4y^2 + 4A - 12yy' + 6y'^2 + 6yy'' - 3y'y'')$

Ясно, что $r_1 = 3 = r_2$.

Так как присутствует оператор ∂_x, то инварианты не зависят от переменной x. Поэтому инварианты надо искать в пространстве $\mathbb{R}(y, y', y'')$. Рассмотрим операторы $b_1 = \partial_y + 2\partial_{y'} + 4\partial_{y''}$,

$$b_2 = (y^2 + A)\partial_y + (-2y^2 - 2A + 4yy' - y'^2)\partial_{y'} + (4y^2 + 4A - 12yy' + 6y'^2 + 6yy'' - 3y'y'')\partial_{y''},$$

которые получены из продолженных операторов $e^{2x}\partial_y$, $e^{-2x}\left(y\partial_x+(y^2+A)\partial_y\right)$ очевидным образом. Далее возьмём их линейные комбинации

$$b_1=\partial_y+2\partial_{y'}+4\partial_{y''},$$

$$w_2=(-4y^2-4A+4yy'-y'^2)\partial_{y'}+(-12yy'+6y'^2+6yy''-3y'y'')\partial_{y''}.$$

Инвариантами оператора b_1 являются выражения

$$s=y'-2y,\quad t=y''-4y.$$

В переменных y, s, t операторы b_1, w_2 принимают вид

$$b_1=\partial_y,\quad w_2=-(s^2+4A)\partial_s+(6s^2-3st)\partial_t.$$

Вычисления показывают, что инвариант имеет вид

$$J=t(s^2+4A)^{-3/2}+6\int(s^2+4A)^{-3/2}ds+24\int(s^2+4A)^{-5/2}ds.$$

(Независимо от того, $A=0$ или $A\neq 0$).

Остаётся найти операторы инвариантного дифференцирования. Для этого в соответствии с общей теорией [3] надо рассмотреть первое продолжение операторов a, e_{12}, e_{21}. Обозначим эти продолжения соответственно:

$$w_1=\partial_x,\quad w_2=e^{2x}\partial_y+2e^{2x}\partial_{y'},$$

$$w_3=e^{-2x}y\partial_x+2e^{-2x}(y^2+A)\partial_y+e^{-2x}(-2y^2-2A+4yy'-y'^2)\partial_{y'}$$

и найдём функцию $\lambda=\lambda(x,y,y')$, такую, что

$$w_1(\lambda)=\lambda D(1),\quad w_2(\lambda)=\lambda D(0),\quad w_3(\lambda)=\lambda D(e^{-2x}y).$$

Тогда оператор инвариантного дифференцирования можно взять в виде $\delta=\lambda D$. Вычисления показывают, что $\lambda=C(s^2+4A)^{-1/2}$, где C — произвольная ненулевая константа. Полагая $C=1$, получим $\delta=(s^2+4A)^{-1/2}D$ — оператор инвариантного дифференцирования. □

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y'''}{(y')^3}+\frac{2}{(y')^2}-\frac{3}{2}\frac{(y'')^2}{(y')^4}=0.$$

Перепишем его в виде

$$y'''y'+2y'^2-\frac{3}{2}y''^2=0.$$

Положим $z=y'$:

$$z''z+2z^2-\frac{3}{2}z'^2=0.$$

Разделим на zz':

$$\frac{z''}{z'}+2\frac{z}{z'}-\frac{3}{2}\frac{z'}{z}=0,\quad (\ln z')'+\frac{2}{(\ln z)'}-\frac{3}{2}(\ln z)'=0,$$

$$(\ln(z'/z)+\ln z)'+\frac{2}{(\ln z)'}-\frac{3}{2}(\ln z)'=0,\quad (\ln(\ln z)')'+\frac{2}{(\ln z)'}-\frac{1}{2}(\ln z)'=0.$$

Положим $w = (\ln z)'$:

$$\frac{w'}{w} + (\ln z)' + \frac{2}{w} - \frac{1}{2}w = 0.$$

Отсюда

$$w' = \frac{1}{2}w^2 - 2.$$

Последовательным интегрированием находим

$$y = \frac{C_1}{e^{2x} + C_2} + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные константы.

3. Операторы Казимира, операторы инвариантного дифференцирования и операция продолжения операторов алгебры симметрии дифференциального уравнения

Предложение 1. *Порождающий Z центра универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$*

1) для представления $a = \partial_x$, $e_{12} = \frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x$, $e_{21} = -\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x$, $\varepsilon = \pm 1$, тривиален, т. е. $Z = 0$,

2) для представления $a = \partial_x$, $e_{12} = e^{2x}\partial_y$, $e_{21} = e^{-2x}\left(y\partial_x + (y^2 + A)\partial_y\right)$, $A = 0, \pm 1$, имеет вид $Z = \partial_x^2 + 4y\partial_x\partial_y + 4(y^2 + A)\partial_y^2 + 8y\partial_y + 2\partial_x$.

Доказательство. Порождающий Z центра универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$ имеет представление [14, с. 140] $Z = a^2 + 2(e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12})$.

Пусть $w = w(x, y)$ — некоторая функция. Для представления 1) получаем

$$(a^2 + 2(e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12}))w =$$

$$= \left(\partial_x^2 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x\right) \circ \left(-\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x\right) + 2\left(-\frac{\varepsilon}{2}e^{-2x}\partial_x\right) \circ \left(\frac{\varepsilon}{2}e^{2x}\partial_x\right)\right) w =$$

$$= w_{xx} - \frac{1}{2}(e^{2x}(e^{-2x}w_x)_x + (e^{-2x}(e^{2x}w_x)_x) = w_{xx} - \frac{1}{2}(w_{xx} - 2w_x + w_{xx} + 2w_x) = 0.$$

Таким образом, $Z = 0$.

Для представления 2) получаем

$$(a^2 + 2(e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12}))w =$$

$$= w_{xx} + 2e^{2x}\left(e^{-2x}yw_x + e^{-2x}(y^2 + A)w_y\right)_y + 2e^{-2x}y(e^{2x}w_y)_x + 2e^{-2x}(y^2 + A)(e^{2x}w_y)_y =$$

$$= w_{xx} + 2(w_x + yw_{xy} + 2yw_y + (y^2 + A)w_{yy}) + 2(2yw_y + yw_{xy} + (y^2 + A)w_{yy}) =$$

$$= w_{xx} + 4yw_{xy} + 4(y^2 + A)w_{yy} + 8yw_y + 2w_x.$$

Итак, $Z = \partial_x^2 + 4y\partial_x\partial_y + 4(y^2 + A)\partial_y^2 + 8y\partial_y + 2\partial_x$. □

Предложение 2. *Уравнение $Zw \equiv w_{xx} + 4yw_{xy} + 4(y^2 + A)w_{yy} + 8yw_y + 2w_x = 0$ в подходящей системе координат принимает вид $w_{qq} + Aw_{rr} = 0$ и, соответственно, интегрируется.*

Доказательство. Пусть оператор V имеет вид $V = \partial_x + 2y\partial_y$. Тогда уравнение принимает вид $V^2(w) + 4Aw_{yy} + 2V(w) = 0$. Введём переменные $p = x - \frac{1}{2}\ln y$, $s = \frac{1}{2}\ln y$. Тогда $V(p) = 0$, $V(s) = 1$ и уравнение принимает вид

$$w_{ss} + 4Aw_{yy} + 2w_s = 0.$$

Если $A = 0$, то $w_{ss} + 2w_s = 0$ и $w = \varphi(p) + \frac{1}{y}\psi(p)$, где $\varphi(p)$, $\psi(p)$ — произвольные функции.

Пусть $A \neq 0$. Пересчитаем производную w_{yy} в переменных p, s. Имеем

$$w_y = -\frac{1}{2y}w_p + \frac{1}{2y}w_s, \quad w_{yy} = \frac{1}{4y^2}(w_{pp} - 2w_{ps} + w_{ss}) + \frac{1}{2y^2}(w_p - w_s).$$

Так как $y^2 = e^{4s}$, то уравнение принимает вид

$$w_{ss} + 2w_s + Ae^{-4s}\left((w_{pp} - 2w_{ps} + w_{ss}) + 2(w_p - w_s)\right) = 0$$

или $\left((\partial_s^2 + 2\partial_s) + Ae^{-4s}((\partial_p - \partial_s)^2 + 2(\partial_p - \partial_s))\right) w = 0$. В переменных $\alpha = p + s$, $\beta = p$ уравнение принимает вид $(w_{\alpha\alpha} + 2w_\alpha) + Ae^{-4(\alpha-\beta)}(w_{\beta\beta} + 2w_\beta) = 0$ или

$$e^{4\alpha}(w_{\alpha\alpha} + 2w_\alpha) + Ae^{4\beta}(w_{\beta\beta} + 2w_\beta) = 0, \quad (e^{2\alpha}\partial_\alpha)^2 w + A(e^{2\beta}\partial_\beta)^2 w = 0.$$

Введём переменные $q = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}$, $r = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}$. Тогда

$$e^{2\alpha}\partial_\alpha(q) = 1, \quad e^{2\alpha}\partial_\alpha(s) = 0,$$

$$e^{2\beta}\partial_\beta(q) = 0, \quad e^{2\beta}\partial_\beta(s) = 1$$

и уравнение принимает вид $w_{qq} + Aw_{rr} = 0$. Если $A = -1$, то это волновое уравнение, и его общее решение имеет вид $w = f(q + r) + g(q - r)$, где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — произвольные функции одного аргумента. Если $A = 1$, то это уравнение Лапласа (w — гармоническая функция), и его общее решение имеет вид $w = \mathrm{Re}(\zeta(z))$, где $\zeta(z)$ — произвольная аналитическая функция аргумента $z = q + ir$. □

Предложение 3. *Для операторов $X_1 = \partial_y$, $X_2 = y\partial_y$, $X_3 = y^2\partial_y$ базис дифференциальных инвариантов составляют выражения*

$$x \quad и \quad J = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^2},$$

а оператор инвариантного дифференцирования δ равен оператору полной производной D: $\delta = D$. Отметим, что J — производная Шварца.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Предложение 4. 1. *Порождающий Z центра универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$ для представления предложения 3 тривиален $Z = 0$.*

2. *Порождающий Z_∞ центра универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$ для бесконечно продолженного представления предложения 3 имеет вид*

$$Z_\infty = 2\sum_{k,l=0}^{\infty} y_k y_l \partial_k \partial_l - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k} \partial_n \partial_0,$$

где

$$y_n = y^{(n)}, \quad \partial_n = \partial_{y_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_0 = y, \quad \partial_0 = \partial_y.$$

Доказательство. Используя изоморфизм

$$e_{12} \mapsto -X_3, \quad e_{21} \mapsto X_1, \quad a \mapsto 2X_2,$$

получаем, что оператор Казимира — порождающий центра универсальной обёртывающей алгебры $U(sl_2(\mathbb{R}))$, для данного представления имеет вид

$$Z = 2X_2^2 - (X_1X_3 + X_3X_1).$$

Подставляя представление для операторов X_1, X_2, X_3, получаем, что $Z = 0$. Первое продолжение операторов X_1, X_2, X_3 имеет вид

$$X_{1,1} = \partial_y, \quad X_{2,1} = y\partial_y + y'\partial_{y'}, \quad X_{3,1} = y^2\partial_y + 2yy'\partial_{y'}.$$

Соответствующий оператор Казимира есть

$$Z_1 = 2X_{2,1}^2 - (X_{1,1}X_{3,1} + X_{3,1}X_{1,1}) = 2{y'}^2\partial_{y'}^2.$$

Таким образом, оператор Казимира для данного представления алгебры L может быть равен нулю, а оператор Казимира для продолженного представления алгебры L не равен нулю.

Далее найдём бесконечное продолжение операторов X_1, X_2, X_3 и соответствующий оператор Казимира. Введём обозначения

$$y_n = y^{(n)}, \quad \partial_n = \partial_{y_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y_0 = y, \quad \partial_0 = \partial_y.$$

Тогда

$$A = X_{1,\infty} = \partial_0, \quad B = X_{2,\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n\partial_n.$$

А для нахождения оператора $C = X_{3,\infty}$ воспользуемся формулой Лейбница дифференцирования произведения

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент. Имеем

$$D^n(y^2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}.$$

Следовательно,

$$C = X_{3,\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}\partial_n.$$

Соответствующий оператор Казимира имеет вид

$$Z_\infty = 2B^2 - (AC + CA) =$$

$$= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\partial_n\right)^2 - \partial_0 \circ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}\partial_n - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}\partial_n\partial_0 =$$

$$= 2\sum_{k,l=0}^{\infty} y_k y_l \partial_k\partial_l + 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum y_n\partial_n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum y_n\partial_n - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}\partial_n\partial_0 =$$

$$= 2\sum_{k,l=0}^{\infty} y_k y_l \partial_k\partial_l - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k}\partial_n\partial_0.$$

Итак,

$$Z_\infty = 2\sum_{k,l=0}^{\infty} y_k y_l \partial_k \partial_l - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_k y_{n-k} \partial_n \partial_0.$$

□

Замечание 2. Оператор инвариантного дифференцирования $\delta = D$ является дифференциальным оператором первого порядка и действует в бесконечномерном пространстве $R^\infty(x, y, y_1, \ldots)$:

$$\delta = \partial_x + \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} \partial_n.$$

Кроме того, выполнены равенства $[\delta, A] = [\delta, B] = [\delta, C] = 0$. Следовательно, $[\delta, Z_\infty] = 0$. Также $[Z_\infty, A] = [Z_\infty, B] = [Z_\infty, C] = 0$ и оператор Z_∞ является дифференциальным оператором второго порядка.

Предложение 5. *Операторы Z_∞ и δ алгебраически независимы над полем инвариантов алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ для представления предложения 3.*

Доказательство. Заметим, что $Z_\infty(J) = 0$ и

$$Z_\infty(y^n) = n(n-1)y^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Так как $Z_\infty = 2B^2 - (AC + CA)$ и $A(J) = B(J) = C(J) = 0$, то $Z_\infty(y^n J) = Z_\infty(y^n)J$ и, более того, $Z_\infty(\varphi(y)\psi(J)) = Z_\infty(\varphi(y))\psi(J)$ для любых многочленов $\varphi(y)$, $\psi(J)$ с постоянными коэффициентами.

Пусть $f(p, q)$ — ненулевой многочлен от переменных p, q с коэффициентами из поля инвариантов алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ для данного представления. Запишем его по степеням q:

$$f = \sum_{l=0}^{m} q^l g_l(p).$$

Имеем

$$f(Z_\infty, \delta)(y^n J) = \sum_{l=0}^{m} \delta^l g_l(Z_\infty)(y^n J) = \sum_{l=0}^{m} \delta^l \left(g_l(Z_\infty)(y^n) J\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{l} C_l^k \delta^k (g_l(Z_\infty)(y^n))\delta^{l-k}(J) = (g_m(Z_\infty)(y^n))\delta^m(J) + S,$$

где слагаемое S содержит производные $y(s)$ порядка меньше, чем $m + 3$. Кроме того, если многочлен $g_m(p) \neq 0$, найдётся такое натуральное n, что $g_m(Z_\infty)(y^n) \neq 0$. Итак, оператор $f(Z_\infty, \delta)$ не является тождественно нулевым, поэтому операторы Z_∞ и δ алгебраически независимы над полем инвариантов алгебры $sl_2(\mathbb{R})$ для данного представления. □

Список литературы

1. **Чеботарев Н. Г.** Теория групп Ли. М.; Л. : ГИТТЛ, 1940.
2. **Miura R. M.** Bäcklund transformations. Heidelberg : Springer, 1976.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.
4. **Поммаре Ж.** Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М. : Мир, 1983.

5. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1983.
6. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М. : Мир, 1989.
7. **Виноградов А. М.** Симметрии и законы сохранений уравнений математической физики. М. : Факториал, 1997.
8. **Виноградов А. М.** Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М. : МЦНМО, 2021.
9. **Капцов О. В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М. : Физматлит, 2009.
10. **Ибрагимов Н. Х.** Азбука группового анализа // Математика, кибернетика. 1989. № 8. С. 3–44.
11. **Ибрагимов Н. Х.** Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений // Математика, кибернетика. 1991. № 7. С. 3–47.
12. **Овсиенко В. Ю., Табачников С. Л.** Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов. М. : МЦНМО, 2008.
13. **Ленг С.** $SL_2(\mathbb{R})$. М. : Мир, 1977.
14. **Желобенко Д. П.** Основные структуры и методы теории представлений. М. : МЦНМО, 2004.
15. **Кириллов А. А.** Элементы теории представлений. М. : Наука, 1978.
16. **Гишарде А.** Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М. : Мир, 1984.
17. **Михайличенко Г. Г.** Групповая симметрия физических структур. Барнаул : Барнаул. гос. пед. ун-т, 2003.

Поступила в редакцию 08.06.2022.
После переработки 23.12.2022.

Сведения об авторах

Нещадим Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией обратных задач математической физики, Институт математики СО РАН имени С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия; email: neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артёмович, кандидат физико-математических наук, доцент, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; e-mail: a.simonov@g.nsu.ru

Чупахин Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией дифференциальных уравнений, Институт гидродинамики СО РАН имени М. А. Лаврентьева, Новосибирск, Россия; e-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 2. P. 173–189.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18202

REPRESENTATIONS OF ALGEBRA $sl_2(\mathbb{R})$
AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.V. Neshchadim[1,a], **A.A. Simonov**[2,b], **A.P. Chupakhin**[3,c]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

[3]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

[a]*neshch@math.nsc.ru,* [b]*a.simonov@g.nsu.ru,* [c]*chupakhin@hydro.nsc.ru*

We describe all nonequivalent representations of the algebra $sl_2(\mathbb{R})$ in the space of vector fields $\mathrm{Vect}\,\mathbb{R}^2$. For each of these representations all ordinary differential equations admitting representation data were found in terms of a basis differential invariants and operators of the invariant differentiation. We also found the Casimir operators of the corresponding universal enveloping algebra, the equations generated by the Casimir operator are integrated and the algebraic independence of the operators of invariant differentiation and Casimir operator are proved.

Keywords: *algebra $sl_2(\mathbb{R})$, group analysis of differential equations, Casimir operator, operator of the invariant differentiation.*

References

1. **Chebotarev N.G.** *Teoriya grupp Li* [Li groups theory]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1940. (In Russ.).
2. **Miura R.M.** *Bäcklund Transformations.* Heidelberg, Springer, 1976.
3. **Ovsyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations.* New York, Academic Press, 1982.
4. **Pommaret J.** *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups.* New York, Gordon and Breach Science Publ., 1978.
5. **Ibragimov N.H.** *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics.* Dordrecht, D. Riedel Publ., 1985.
6. **Olver P.J.** *Application of Lie Groups to Differential Equations.* New York, Springer, 2000.
7. **Vinogradov A.M.** (ed.). *Symmetries of Partial Differential Equations: Conservation Laws, Applications, Algorithms.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 1989.
8. **Vinogradov A.M.** *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus.* American Mathematical Society, 2001.
9. **Kaptsov O.V.** *Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Methods of Integration of Equations with Partial Derivatives]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. (In Russ.).
10. **Ibragimov N.H.** Azbuka gruppovogo analiza [ABC of group analysis]. *Matematika, kibernetika* [Mathematics, cybernetics]. 1989, no. 8, pp. 3–44. (In Russ.).
11. **Ibragimov N.H.** Opyt gruppovogo analiza [Group analysis experience]. *Matematika, kibernetika* [Mathematics, cybernetics]. 1991, no. 7, pp. 3–47. (In Russ.).

The work was carried out with the financial support of the programs of fundamental scientific research of SB RAS No. III.22.4.1 and SB RAS No. I.1.5 (project FWNF-2022-0009).

12. **Ovsienko V.Yu., Tabachnikov S.L.** *Proyektivnaya differentsial'naya geometriya. Staroye i novoye: ot proizvodnoy Shvartsa do kogomologiy grupp diffeomorfizmov* [Projective differential geometry. Old and new: from the Schwarzian derivative to the cohomologies of diffeomorphisms groups]. Moscow, MTsNMO, 2008. (In Russ.).
13. **Lang S.** $SL_2(\mathbb{R})$. Reading, Addison-Wesley Publ., 1975.
14. **Zhelobenko D.P.** *Osnovnye struktury i metody teorii predstavleniy* [Basic structures and methods of representation theory]. Moscow, MTsNMO, 2004. (In Russ.).
15. **Kirillov A.A.** *Elements of the Theory of Representations.* Berlin, New York, Springer-Verlag, 1976.
16. **Gisharde A.** *Kogomologii topologicheskikh grupp i algebr Li* [Cohomologies of topological groups and Lie algebras]. Moscow, Mir, 1984. (In Russ.).
17. **Mikhalichenko G.G.** *Gruppovaya simmetriya fizicheskikh struktur* [Group symmetry of physical structures]. Barnaul, Barnaul State Pedagogical University, 2003. (In Russ.).

Article received 08.06.2022.
Corrections received 23.12.2022.