Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 18–28.

УДК 517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18102

ЗАДАЧА БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ

В. А. Костин[1,a], **Д. В. Костин**[1,2,b], **Х. Алкади**[1]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия*
[a] *vlkostin@mail.ru,* [b] *dvk605@mail.ru*

Показана корректная разрешимость задач без начальных условий для дробно-степенных операторных сумм. Решения задач без начальных условий Я. Б. Зельдович и Г. И. Баренблатт трактуют как промежуточные асимптотики для задач с начальными условиями. На важность таких задач эти авторы указывают в связи с расширением понятия «строгого детерминизма» в статистической физике и квантовой механике и ставят вопрос об изучении свойств явлений, не зависящих от деталей в начальных условиях, проявляющихся при истечении достаточного времени. В данной работе также приводится пример промежуточной асимптотики для уравнения с дробной производной.

Ключевые слова: *промежуточная асимптотика, корректная задача, задача Коши, уравнение без начальных условий, сильно непрерывная полугруппа, дробная степень оператора.*

Введение

Задачи без начальных условий относятся к классу задач, описывающих установившиеся периодические или переходные процессы, начавшиеся так давно, что начальные данные практически не оказывают влияния на поведение решения в момент наблюдения. В частности, такую задачу решают А. Н. Тихонов, А. А. Самарский в [1] при изучении распространения тепловых волн в почве. На важность таких задач указывают Г. И. Баренблатт и Я. Б. Зельдович в [2], утверждая, что внимание к их теории связано с расширением понятия «строгого детерминизма», обязанным успехам статистической физики и квантовой механики, где этот вопрос рассматривается иначе, нежели в классической физике и механике. Это привело к постановке вопроса о тех свойствах явления, которые не зависят от деталей в начальных условиях. Но такая независимость возможна лишь по истечении достаточного времени. То есть в таком случае можно говорить об асимптотике решений по времени, стремящемуся к бесконечности. Поэтому в [1] такие асимптотики называются «промежуточными», а соответствующие задачи без начальных условий — «вырожденными».

Однако для того, чтобы решение «вырожденной задачи» являлось промежуточной асимптотикой, необходимо, чтобы оно было устойчивым относительно возмущений, то есть такая задача должна быть корректной в некотором классе функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

Установление этого факта является ключевым, и здесь используются методы функционального анализа [3–5].

Например, для $t \in (-\infty, \infty)$ единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} + \lambda u(t) = 1, \qquad \lambda > 0, \tag{1}$$

является $u(t) = 1/\lambda$, а для $t \in [0, \infty)$ единственное решение уравнения (1) с условием $u(0) = 0$ есть функция $u_0(t) = (1 - e^{-\lambda t})/\lambda$. Таким образом, $u(t) = 1/\lambda$ — промежуточная асимптотика функции $u_0(t)$: $u_0(t) \to u(t)$ при $t \to \infty$.

Следующим важным направлением применения задач без начальных условий стало исследование методами дробного интегро-дифференцирования процессов в пористых и фрактальных средах [6–8] (см. также фундаментальный обзор В. В. Учайкина [9]).

Исследованию задач без начальных условий для уравнений с дробной производной посвящена заметка авторов [10], где основное внимание они уделяют применению сильно непрерывных полугрупп и косинус-функций к исследованию задач для уравнений с переменными коэффициентами, не касаясь такого важного понятия, как промежуточная асимптотика. Рассмотрению вопросов, связанных с этим понятием, посвящается настоящая работа.

1. Постановка задачи

Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$, плотной в E.

Обозначим через $C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ банахово пространство вектор-функций $f(t)$, $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, со значениями в E и нормой

$$\|f\|_\mu = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|e^{-\mu t} f(t)\|, \quad \mu \geqslant 0.$$

Введём в рассмотрение дробно-дифференциальное выражение

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = \sum_{m=1}^{n} a_m \frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} u(t),$$

где $\bar{a} = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$, $a_m \geqslant 0$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_m \in (0, 1)$, производная Маршо имеет вид

$$\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} u(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_m)} \int_0^\infty s^{-(1+\alpha)} [u(t-s) - u(s)] ds,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Для $f \in C_{\mu,(E,\mathbb{R})}$ рассмотрим уравнение

$$L_n(\bar{a}, \bar{\alpha})u(t) = Au(t) + f(t). \tag{2}$$

Решением уравнения (2) будем называть вектор-функцию

$$u \in C_{\mu(E,\mathbb{R})}, \tag{3}$$

для которой $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, на $\mathbb{R}$ определены дробные производные Маршо $\frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} u$ и выполняется равенство (2).

Будем говорить, что задача (2), (3) поставлена корректно, если она имеет единственное решение $u(t)$ и для него выполняется оценка корректности

$$\|u\|_{C_\mu} \leqslant M\|f\|_{C_\mu}, \tag{4}$$

где константа $M \geqslant 0$ не зависит от f.

Функцию $u_+(t)$ будем называть решением задачи (2), (3) с начальным условием

$$u(0) = 0, \tag{5}$$

если она удовлетворяет уравнению (2), включению (3) и условию (5).

Решение $u(t)$ задачи (2), (3) будем называть промежуточной асимптотикой решения $u_+(t)$ задачи (2)–(5), если выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - u_+(t)\|_\mu = 0. \tag{6}$$

В работе доказывается корректность задачи (2), (3), откуда следует, что её решение является промежуточной асимптотикой решения задачи (2)–(5). Приводится пример такой асимптотики.

2. Связь дробных степеней операторов и дробных производных

Связь дробных степеней операторов в банаховом пространстве с дробными производными описана в [7, с. 102] следующим образом. Если оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(t, -A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leqslant Me^{-wt}\|\varphi\|, \quad w > 0,\ t \geqslant 0, \tag{7}$$

то для A определены его дробные степени формулой Балакришнана:

$$A^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha}[U(t, -A) - I]\varphi dt, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{8}$$

Например, если A задаётся выражением $\frac{d}{dx}$, $x \in (-\infty, \infty)$, и областью определения $D(A) = \{\varphi \in L_{p,w} : \varphi' \in L_{p,w}\}$, где $L_{p,w}$ — весовое лебегово банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{p,w} = \left[\int_{-\infty}^\infty e^{-wx}|\varphi(x)|^p dx\right]^{1/p}, \quad w > 0,\ p \geqslant 1,$$

то $-A$ является генератором C_0-полугруппы $U(t, -A)\varphi(x) = \varphi(x - t)$, $t \geqslant 0$, и для $\varphi \in D(A)$ равенство

$$A^\alpha\varphi = D_+^\alpha\varphi = \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi(x - t) - \varphi(x)}{t^{1+\alpha}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{(x - t)^{1+\alpha}} dt$$

даёт дробную производную Маршо (см. [3, с. 368]).

Замечание 1. Согласно [3, с. 368] формула (8) справедлива и для $w = 0$ в (7), так как в этом случае $U(t, -A)$ является равностепенно непрерывной полугруппой класса C_0 (см. определение на с. 324 и пример на с. 325 в [3]).

3. Обращение суммы генераторов

Напомним, что сильно непрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов $U(s)$ $(s \geqslant 0)$ по определению удовлетворяет условиям

1) $U(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$;
2) $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$, $\varphi \in E$;
3) $\lim\limits_{t\to 0} \|U(t)\varphi - \varphi\|_F = 0$, $\varphi \in E$.

Потребуем также, чтобы для полугруппы выполнялась оценка $\|U(s)\varphi\|_F \leqslant Me^{-ws}$, $w > 0$, $s \geqslant 0$. В таком случае если оператор A является производящим оператором полугруппы, т. е.

$$\frac{d}{ds}U(s)\varphi = AU(s)\varphi, \quad \varphi \in D(A),$$

то справедливо представление обратного оператора

$$A^{-1}\varphi = -\int_0^\infty U(s,A)\varphi ds.$$

Далее нам понадобится результат Ж. Да Прато и Д. Грисварда об обращении операторной суммы [11, Теорема 3.3, с. 320].

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$; A и B — два замкнутых в X линейных оператора с областями определения D_A и D_B, причём D_B плотно в X. Рассмотрим оператор $L\varphi = A\varphi + B\varphi$, $\varphi \in D_A \cap D_B = D_L$.

Теорема 1. (Да Прато — Грисвард). *Пусть*

$$(A-\lambda)^{-1}(B-\lambda)^{-1}\varphi = (B-\lambda)^{-1}(A-\lambda)^{-1}\varphi, \quad \lambda > 0, \quad \varphi \in D_L,$$

и существуют такие $M_A, M_B > 0$*, что для всех* $k \in \mathbb{N}$

$$\|(A-\lambda)^{-k}\| \leqslant \frac{M_A}{\lambda^k}, \quad \|(B-\lambda)^{-k}\| \leqslant \frac{M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0. \tag{9}$$

Тогда $L = A + B$ *допускает замыкание* $\overline{L}$*, при этом* $\rho_{\overline{L}} \subset (0,\infty)$*,*

$$\|(\overline{L}-\lambda)^{-k}\| \leqslant \frac{M_A M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$(\overline{L}-\lambda)^{-1}(D_A + D_B) \subset D_L, \quad \lambda > 0. \tag{11}$$

Примером применения этой теоремы является доказательство корректной разрешимости задачи Коши для уравнения (см. [11, с. 332])

$$-\frac{du}{dt} + Bu(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad t \in (0,T),$$

где $f(t)$ — векторная функция со значениями в E, принадлежащая пространству $X = L^p[(0,T),E]$ с нормой

$$\|f\|_p = \left[\int_0^T \|f(t)\|_E^p dt\right]^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Из теоремы получаем следствия.

Следствие 1. *Оператор $L = A + B$ является генератором C_0-полугруппы операторов $U(t, A + B)$ в силу оценки (10) и соотношения (11).*

Следствие 2. *Если A и B — генераторы C_0-полугрупп $U(t, A)$ и $U(t, B)$ с оценками $\|U(t, A)\| \leqslant M_1 e^{-w_1 t}$, $\|U(t, B)\| \leqslant M_2 e^{-w_2 t}$, $w_1, w_2 > 0$, при этом для всех $s, t \geqslant 0$*

$$U(t, A)U(s, B)\varphi = U(s, B)U(t, A)\varphi, \tag{12}$$

то оператор $L = A + B$ имеет обратный L^{-1} и справедливо равенство

$$(A + B)^{-1}\varphi = -\int_0^\infty U(s, A)U(s, B)\varphi ds. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что в силу представления резольвенты [3, с. 45]

$$(\lambda - A)^{-1}\varphi = R(\lambda, A)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t, A)\varphi dt,$$

из (12) следует коммутируемость резольвент

$$R(\lambda, A)R(\lambda, B)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t, A) \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(s, B)\varphi ds dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(t+s)} U(t, A)U(s, B)\varphi ds dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(t+s)} U(s, B)U(t, A)\varphi dt ds = R(\lambda, B)R(\lambda, A)\varphi \tag{14}$$

и соотношение

$$-(A + B)\int_0^\infty U(s, A)U(s, B)\varphi ds =$$

$$= -\int_0^\infty AU(s, A)U(s, B)\varphi ds - \int_0^\infty BU(s, B)U(s, A)\varphi ds =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{dU(s, A)}{ds} U(s, B)\varphi ds - \int_0^\infty \frac{dU(s, B)}{ds} U(s, A)\varphi ds =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{d}{ds}[U(s, A)U(s, B)]\varphi ds = -U(s, A)U(s, B)\varphi|_0^\infty = \varphi.$$

□

Этот результат позволяет обобщить равенство (13) на случай суммы нескольких операторов:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i\right)^{-1} \varphi = -\int_0^\infty \prod_{i=1}^n U(s, A_i)\varphi ds,$$

где $U(s, A_i)$ — сильно непрерывные полугруппы с производящими операторами A_i, такими, что для любых $i, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $U(s_i, A_i)U(s_m, A_m)\varphi = U(s_m, A_m)U(s_i, A_i)\varphi$.

4. Доказательство корректности задачи без начальных условий

Для доказательства неравества (4) сначала рассмотрим случай дробных степеней операторов A и B, которые удовлетворяют теореме 1. Так как в силу оценок (9) эти операторы являются генераторами равностепенно непрерывных C_0-полугрупп (см. [3, с. 324, 325, пример 1]), то в соответствии с [3, с. 358] определены дробные степени $(-A)^{\alpha_1}$ и $(-B)^{\alpha_2}, \alpha_i \in (0,1), i=1,2$, при этом операторы $A_{\alpha_1} = -(-A)^{\alpha_1}$ и $B_{\alpha_2} = -(-B)^{\alpha_2}$ являются генераторами равностепенно непрерывных C_0-полугрупп

$$U(s, A_{\alpha_1})\varphi = \int_0^\infty h_{s,\alpha_1}(\xi) U(\xi, A)\varphi d\xi, \tag{15}$$

$$U(s, B_{\alpha_2})\varphi = \int_0^\infty h_{s,\alpha_2}(\xi) U(\xi, B)\varphi d\xi, \tag{16}$$

где $h_{s,\alpha_i}(\xi), i = 1,2$ — функции Иосиды, являющиеся обратным преобразованием Лапласа функции $e^{-sp^{\alpha_i}}$, $\alpha_i \in (0,1)$, $i=1,2$.

Применяя (15), (16), по аналогии с (14) можно получить коммутируемость полугрупп $U(s, A_{\alpha_1})$ и $U(t, B_{\alpha_2})$, а вместе с тем и представление обратного оператора

$$(A_{\alpha_1} + B_{\alpha_2})^{-1}\varphi = \int_0^\infty U(s, A_{\alpha_1}) U(s, B_{\alpha_2})\varphi ds, \quad \varphi \in D(A_{\alpha_1}) \cap D(B_{\alpha_2}).$$

Далее заметим, что оператор, заданный выражением $B\varphi = -\frac{d\varphi}{dt}$ и областью определения

$$D(B) = \left\{\varphi : \varphi \in C_\mu, \, \frac{d\varphi}{dt} \in C_\mu\right\}, \tag{17}$$

является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(s, -\frac{d}{dt})\varphi(t) = \varphi(t-s)$, с оценкой $\|U(s, -\frac{d}{dt})\varphi\|_\mu \leqslant e^{-\mu s}\|\varphi\|_\mu$. Следовательно, согласно утверждению К. Иосиды [3, с. 358], оператор B имеет дробную степень

$$B^\alpha \varphi = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\varphi, \quad \alpha \in (0,1), \quad \varphi \in C_\mu.$$

При этом оператор $-B^\alpha$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$U(s, -B^\alpha)\varphi(t) = \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi) U\left(\xi, -\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) d\xi = \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)\varphi(t-\xi) d\xi,$$

где $h_{s,\alpha}(\xi)$ — функция Иосиды, при этом справедлива оценка

$$\left\| U\left(s, -\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}\right)\varphi\right\|_\mu \leqslant \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi)\|\varphi(t-\xi)\|_\mu d\xi \leqslant \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\xi) e^{-\mu\xi} d\xi \|\varphi\|_\mu = e^{-s\mu^\alpha}\|\varphi\|_\mu. \tag{18}$$

Записывая уравнение (2) с учётом (3) в операторной форме

$$\sum_{m=1}^n A_m u - Au = f, \tag{19}$$

где $A_m = a_m \frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}}$, $f = f(t)$, и учитывая коммутируемость операторов A_m и A на множестве (17), заключаем, что к уравнению (19) применима теорема 1 и следствие 2 о непрерывной обратимости суммы операторов, влекущее корректность задачи (2), (3) и представление её решения в виде

$$u = -\int_0^\infty \prod_{m=1}^n U(s, A_m)U(s, A)f ds =$$

$$= -\int_0^\infty \int_0^\infty h_{s,\alpha_1}(\xi_1)\dots \int_0^\infty h_{s,\alpha_m}(\xi_m)U(s, A)f(t-\xi_1-\dots-\xi_m)d\xi_m \dots d\xi_1 ds.$$

Отсюда, пользуясь (18), получаем оценку корректности

$$\|u\|_\mu \leqslant M \int_0^\infty e^{-sa_1\mu^{\alpha_1}-sa_2\mu^{\alpha_2}-\dots--sa_n\mu^{\alpha_n}-ws} ds \cdot \|f\|_\mu = \frac{M\|f\|_\mu}{\sum\limits_{m=1}^n \mu^{\alpha_m} a_m - w}.$$

5. Пример промежуточной асимптотики

Сравним решения задачи без начальных условий и задачи с начальными условиями для уравнения

$$a\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + e^{\mu t}\cos\sigma x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \geqslant 0. \tag{20}$$

1. В случае задачи без начальных условий решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{e^{\mu t}\cos\sigma x}{a\mu^\alpha + \sigma^2}. \tag{21}$$

Это можно проверить непосредственно, воспользовавшись соотношением

$$U\left(s, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\tau x = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4s}}\cos\tau\xi d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{4s}}\cos\tau(x-\sigma)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi s}}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma^2}{4s}}\cos\tau\sigma d\sigma \cos\tau x = e^{-\tau^2 s}\cos\tau x \tag{22}$$

(см. [12, с. 207]). Отсюда следует оценка корректности

$$\|u\|_\mu \leqslant \frac{\|f\|_\mu}{a\mu^\alpha + \sigma^2}.$$

2. В случае задачи с начальным условием $u(x,0) = 0$ для уравнения (20) полугруппа

$$U_+\left(s, -\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t-s), & t \geqslant s, \\ 0, & t < s, \end{cases}$$

даёт представление

$$U_+\left(s, -a\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right)\varphi(t) = \int_0^\infty h_{\alpha,as}(\xi)U_+(\xi)\varphi(t)d\xi = \int_0^t h_{\alpha,as}(\xi)\varphi(t-\xi)d\xi. \tag{23}$$

Пользуясь (22), (23) и формулами, приведёнными в [9, с. 445], получаем вид решения $u_+(x,t)$ при $t \geqslant 0$:

$$u_+(x,t) = \int_0^\infty e^{\mu t}\int_0^t h_{\alpha,as}(\xi)e^{-\mu\xi}d\xi e^{-\sigma^2 s} ds \cos\sigma x =$$

$$= e^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu\xi}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi}\int_0^\infty e^{-asp^\alpha-\sigma^2 s}dsdpd\xi\cos\sigma x =$$

$$= e^{\mu t}\int_0^t \frac{e^{-\mu\xi}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{p\xi}}{ap^\alpha+\sigma^2}dpd\xi\cos\sigma x = \frac{e^{\mu t}}{a}\int_0^t e^{-\mu\xi}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{\sigma^2}{a}\xi^\alpha\right)d\xi\cos\sigma x. \tag{24}$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двупараметрическая функция Миттаг-Леффлера.

Используя (21) и (24), перейдём к пределу

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u_+(x,t)}{u(x,t)} = \frac{(a\mu^\alpha+\sigma^2)}{a}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\mu\xi}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{\sigma^2}{a}\xi^\alpha\right)d\xi =$$

$$= \frac{a\mu^\alpha+\sigma^2}{a}\int_0^\infty e^{-\mu\xi}E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{\sigma^2}{a}\xi^\alpha\right)d\xi = \frac{a\mu^\alpha+\sigma^2}{a(\mu^\alpha+\frac{\sigma^2}{a})} = 1. \tag{25}$$

Здесь использованы формулы из [9, с. 445]. Из (25) следует (6), так как

$$\|u(x,t)-u_+(x,t)\|_\mu = \frac{1}{a\mu^\alpha+\sigma^2}\left\|1-\frac{u_+(x,t)}{u(x,t)}\right\|_\mu.$$

Таким образом, $u(x,t)$ даёт промежуточную асимптотику для $u_+(x,t)$.

Заметим, что аналогичный результат справедлив, если в правой части уравнения (20) стоит функция $e^{\mu x}\sin\sigma x$. Отсюда следует, что если правая часть в (20) имеет вид $e^{\mu x}f(x)$, где $f(x)$ — периодическая функция с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

то также имеет место промежуточная асимптотика.

Отметим, что численная реализация решения (21) проще, чем для (24).

Авторы выражают глубокую благодарность В. Е. Федорову за полезные обсуждения затронутой в статье тематики.

Список литературы

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966.
2. **Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.** Промежуточные асимптотики математической физики // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 2 (158). С. 115–129.
3. **Иосида К.** Функциональный анализ. М. : Мир, 1967.
4. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967.
5. **Костин А. В., Костин В. А.** К теории функциональных пространств Степанова. Воронеж : Издат.-полиграф. центр ВГУ, 2007.
6. **Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.** Фрактали, подобие, промежуточная асимптотика // Успехи физ. наук. 1985. Т. 146, вып. 3. С. 493–505.
7. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987.
8. **Федоров В. Е., Туров М. М.** Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 1143–1162.
9. **Учайкин В. В.** Методы дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2002.

10. **Костин В. А., Алкади Х.** О разрешимости задачи без начальных условий для обобщённого уравнения с дробно-степенной суммой // Вестн. ВГУ. Сер. : Математика. Физика. 2022. № 3. С. 82–90.
11. **Da Prato G., Grisvard P.** Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationelles // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1975. Vol. 54. P. 305–387.
12. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. : Наука, 1983.

Поступила в редакцию 05.11.2022.
После переработки 17.01.2023.

Сведения об авторах

Костин Владимир Алексеевич, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: vlkostin@mail.ru.

Костин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов теории управления и оптимизации, Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия; e-mail: dvk605@mail.ru.

Алкади Хамса, аспирант, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж; e-mail: hamsaphd.hassan44@gmail.com

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 1. P. 18–28.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18102

PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES AND NTERMEDIATE ASYMPTOTICS

V.A. Kostin[1,a], **D.V. Kostin**[1,2,b], **H. Alkadi**[1]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia*
[a] *vlkostin@mail.ru,* [b] *dvk605@mail.ru*

The correct solvability of problems without initial conditions for fractional-power operator sums is shown. Solutions of problems without initial conditions are interpreted by Ya.B. Zeldovich and G.I. Barenblatt as intermediate asymptotics for problems with initial conditions. These authors point out the importance of such problems in connection with the expansion of the concept of "strict determinism"in statistical physics and quantum mechanics and raise the question of studying the properties of phenomena that do not depend on details in the initial conditions that manifest themselves after sufficient time. The present paper also provides an example of intermediate asymptotics for an equation with a fractional derivative.

Keywords: *intermediate asymptotics, well-posed problem, Cauchy problem, equation without initial conditions, strongly continuous semigroup, fractional power of operator.*

References

1. **Tikhonov A.N., Samarskii A.A.** *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1966. (In Russ.).
2. **Barenblatt G.I., Zeldovich Ya.B.** Intermediate asymptotics in mathematical physics. *Russian Matematiccal Surveys*, 1971, vol. 26, iss. 2, pp. 45–61.
3. **Yosida K.** *Functional Analysis.* Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
4. **Krein S.G.** *Linear Differential Equations in Banach Space.* American Mathematical Society, 1971.
5. **Kostin A.V., Kostin V.A.** *K teorii funktsional'nykh prostranstv Stepanova* [On the theory of Stepanov's functional spaces]. Voronezh: Publishing and Printing Center of Voronezh State University, 2007. (In Russ.).
6. **Zeldovich Ya.B., Sokolov D.D.** Fractals, similarity, intermediate asymptotics. *Soviet Physics Uspekhi*, 1985, vol. 28, iss. 7, pp. 608-616.
7. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional Integrals and Derivatives.* Yverdon, Gordon and Breach, 1987.
8. **Fedorov V.E., Turov M.M.** The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann — Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 925–942.
9. **Uchaikin V.V.** *Metody drobnykh proizvodnykh* [Methods of fractional derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. (In Russ.).
10. **Kostin V.A., Alkadi H.** O razreshimosti zadachi bez nachal'nykh usloviy dlya obobschyonnogo uravneniya s drobno-stepennoy summoy [On the solvability of the problem without initial conditions for a generalized equation with a fractional-power sum]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [Bulletin of Voronezh State University. Series: Mathematics. Physics], 2022, no. 3, pp. 82–90. (In Russ.).

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task in the field of science (topic number FZGF-2020-0009).

11. **Da Prato G., Grisvard P.** Sommes d'opérateurs linéaires et équations differentielles opérationelles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1975, vol. 54, pp. 305–387.
12. **Dwight H.B.** *Tables of Integrals and Other Mathematical Data.* New York, The Macmillan Company, 1947.

Article received 05.11.2022.
Corrections received 17.01.2023.