МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2023. Т. 8, вып. 1. С. 5–17.

УДК 517.965 DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КЛАССАХ ПЕРВООБРАЗНЫХ ОТ ЛЕБЕГОВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКАХ КРИВЫХ

В. Л. Дильман[a], **Д. А. Комиссарова**[b]

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия
[a]*dilman49@mail.ru*, [b]*komissarovada@susu.ru*

Рассматриваются линейные функциональные уравнения на простых гладких кривых с функцией сдвига бесконечного порядка с неподвижными точками на концах кривой. Цель статьи — исследовать множества решений таких уравнений в гёльдеровских классах функций H_μ, $0 < \mu \leqslant 1$, и в классах первообразных от функций из классов $L_p, p > 1$, с коэффициентами и правыми частями из этих же классов, и поведение решений в окрестности неподвижных точек. Метод исследования использует критерий Ф. Рисса принадлежности функции к классу первообразных от функций из классов $L_p, p > 1$. Для классов решений получены оценки параметров μ и p, зависящие от параметров классов коэффициентов и правых частей исследуемых уравнений и свойств функции сдвига в окрестности неподвижной точки.

Ключевые слова: *линейное функциональное уравнение, функция сдвига бесконечного порядка, класс гёльдеровских функций, класс первообразных от лебеговских функций.*

1. Введение

В работе исследуются свойства решений линейного функционального уравнения вида

$$\psi(\alpha(t)) = g(t)\psi(t) + h(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Решения ψ уравнения (1) и функции g, h рассматриваются на Γ — простой ориентированной кривой на комплексной плоскости с концами a и b. Точки a и b (они могут совпадать между собой) являются единственными неподвижными точками для функции $\alpha(t)$, взаимно однозначно и непрерывно отображающей Γ на себя. Для существования и мощности множества решений уравнения (1) важно, содержит ли кривая Γ концы a и b (или один из них). В работе рассматриваются случаи $\Gamma = [a; b)$ и $\Gamma = [a; b]$.

Уравнение (1) и его обобщения изучались в работах [1–7] и др. В работах [1; 2; 4] исследования проводились в классах непрерывных функций (рассматривались не только линейные уравнения), в [5] функция сдвига имела конечный порядок, в [6] исследования проводились в гёльдеровских классах H_μ, в [7] — в гёльдеровских классах и классах A_p первообразных от функций из классов L_p, $p > 1$, причём в случаях единственности решений. Цель работы — продолжение исследования решений таких уравнений в классах H_μ и A_p, в том числе в случаях бесконечного множества решений.

В связи с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [8; 9] представляет интерес изучение интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями в ядре, одна из которых получается из другой в результате сдвига. Такие уравнения рассматривались в работе [10], где показано, как они могут быть сведены к системе из сингулярных интегральных уравнений и уравнений вида (1). Там отмечено (см. также [6]), что если решение таких интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями разыскивается в некотором функциональном классе K, то решение уравнения (1) следует искать в классе первообразных от K. Поэтому наибольшее внимание в работе уделяется классам A_p, $p > 1$, первообразных от функций из классов L_p, $p > 1$. Коэффициенты и правые части уравнений принадлежат этим же классам. Рассматривается случай, когда на дуге $[a;b)$ или $[a;b]$ уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, а также случай, когда на $[a;b]$ уравнение (1) имеет единственное решение. Доказательство принадлежности решений классу A_p, $p > 1$, использует критерий Ф. Рисса принадлежности функции к этому классу. Для рассматриваемой ситуации этот критерий сформулирован в [7] (лемма 1). Заметим, что в [7, Теорема 1] доказано, что в случае $|g(a)| > 1$ уравнение (1) имеет единственное решение на $[a;b)$, причём, если $g, h \in A_p^{[ab)}$, $p > 1$, то $\psi(t) \in A_p^{[a;b)}$, $p > 1$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

В работе применяются обозначения, использованные в [6] и [7]. Приведём основные из них для удобства.

Класс непрерывных на Γ функций обозначим C^Γ или просто C. Класс функций φ, удовлетворяющих условию Гёльдера на Γ:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < K|t_1 - t_2|^\mu, \quad t_1, t_2 \in \Gamma, \quad 0 < \mu \leqslant 1,$$

обозначим $H_\mu^\Gamma(K)$, или, сокращённо, $H_\mu(K)$ или H_μ; $\tilde{H}_\mu^\Gamma = \bigcap\limits_{0<\nu<\mu} H_\nu^\Gamma$. Класс абсолютно интегрируемых на Γ со степенью p функций обозначим L_p^Γ, или, сокращённо, L_p. Класс первообразных от L_p обозначим A_p; $\tilde{A}_p^\Gamma = \bigcap\limits_{1\leqslant q<p} A_q^\Gamma$.

Рассмотрим линейное функциональное уравнение (1). Пусть $\alpha = \alpha(t)$, $t \in \Gamma$ — отображение кривой Γ на себя со свойствами:

1. α — взаимно однозначное непрерывное отображение кривой Γ на себя с сохранением принятой на Γ ориентации.
2. На Γ не существует других неподвижных точек (н.т.) относительно α, кроме a и b.
3. Для всех $t \in \Gamma$ существует $\alpha'(t) \neq 0$, причём $\alpha' \in H_\theta$ на Γ, $0 < \theta \leqslant 1$.
4. $|\alpha'(a)| \neq 1$, $|\alpha'(b)| \neq 1$.

Будем применять обозначения: $\alpha_0(t) \equiv t$, $\alpha_1(t) \equiv \alpha(t)$, $\alpha_n(t) \equiv \alpha(\alpha_{n-1}(t))$; $\alpha_{-1}(t)$ — отображение, обратное к α: $\alpha_{-1}(\alpha(t)) \equiv \alpha(\alpha_{-1}(t)) = t$, $\alpha_{-n}(t) \equiv \alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$, $t \in \Gamma$, $n = 1, 2, \ldots$

Из условий 1 и 2 следует, что либо для всех $t \in (a;b)$ $\alpha(t) \in (a;t)$, и тогда точка a является притягивающей неподвижной точкой (п.н.т.) для α, а точка b — отталкивающей (о.н.т.), либо для всех $t \in (a;b)$ $\alpha(t) \in (t;b)$, и тогда наоборот, a — о.н.т., а b — п.н.т. для отображения α.

Мы всегда будем считать, что точка a — п.н.т. для отображения α. Для п.н.т. a условие 4 равносильно условию:

4*. $|\alpha'(a)| < 1, |\alpha'(b)| > 1$.

Пусть $c \in (a;b)$. Обозначим через $I_n(c)$ для любых целых n часть дуги $(a;b)$, заключённую между точками $\alpha_n(c)$ и $\alpha_{n-1}(c)$: $I_n(c) = (\alpha_n(c); \alpha_{n-1}(c)]$.

Из уравнения (1) индукцией по натуральному n получаем:

$$\psi(\alpha_n(t)) = \prod_{j=0}^{n-1} g(\alpha_j(t))\psi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} h(\alpha_k(t)) \prod_{j=k+1}^{n-1} g(\alpha_j(t)), \quad n = 2, 3, \dots \tag{2}$$

Подобным образом из (1) можно вывести формулу

$$\psi(\alpha_{-n}(t)) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi(t)}{g(\alpha_{-j}(t))} - \sum_{k=1}^{n} h(\alpha_{-k}(t)) \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{g(\alpha_{-j}(t))}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

На интервале $(a;b)$ любое решение уравнения (1) однозначно определяется его сужением на полуинтервал вида $(\alpha(c); c]$ для любого $c \in (a;b)$.

Лемма 1. *Для любой точки $c \in (a;b)$ и любой функции φ_0, определённой на $(\alpha(c); c]$, существует единственная функция φ, удовлетворяющая уравнению (1), такая, что её сужение на $(\alpha(c); c]$ совпадает с φ_0. Её значение на каждом $I_n(c)$ определяется формулой (2) для положительных n и формулой (3) для отрицательных n, если в этих формулах положить $\psi = \varphi_0$.*

Замечание 1. Если ничем не ограничивать класс решений уравнения (1), множество всех решений этого уравнения имеет мощность множества всех функций, заданных на отрезке, т. е. мощность гиперконтинуума ($\aleph_2$).

Лемма 2. *В условиях леммы 1, если φ_0 непрерывна на $(\alpha(c); c]$ и*

$$\varphi_0(\alpha(c)) = g(c)\varphi_0(c) + h(c), \tag{4}$$

то решение уравнения (1), указанное в лемме 1, непрерывно на $(a;b)$. Если функции φ_0, g, h принадлежат какому-нибудь из классов H_μ, $0 < \mu \leqslant 1$, L_p, $p > 1$, и A_p, $p > 1$, то этим же свойством обладает решение.

Очевидно, условие (4) необходимо и достаточно для непрерывности решения в точках $\alpha_n(c)$, n — целое. «Подключение» хотя бы одного конца отрезка $[a;b]$ принципиально меняет ситуацию. В окрестности конца (н.т. функции сдвига) решение уравнения (1) может быть ограничено, но не иметь конечного предела, или неограничено. Условия непрерывного продолжения решения с интервала $(a;b)$ хотя бы на один конец существенно зависят от значений функций g и h на концах. В некоторых случаях возможность непрерывного продолжения на оба конца определяется равенством итерационных рядов и трудно проверяемо. Неочевидными являются условия принадлежности непрерывных решений классам H_μ, $0 < \mu \leqslant 1$, L_p, $p > 1$ и A_p, $p > 1$.

Введём обозначения

$$G_n(t) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)}, \quad G_0(t) \equiv 1, \quad G_{-n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{g(b)}{g(\alpha_{-j}(t))}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Формулу (2) тогда можно записать в виде

$$\psi(\alpha_n(t)) = G_n(t)\left([g(a)]^n\psi(t) + \sum_{k=0}^{n-1}[g(a)]^{n-1-k}\frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично формула (3) примет вид

$$\psi(\alpha_{-n}(t)) = G_{-n}(t)\left(\frac{\psi(t)}{[g(b)]^n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{h(\alpha_{-k}(t))}{[g(b)]^{n-k+1}G_{-k+1}(t)}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следующая лемма имеет технический характер.

Лемма 3. *Пусть r и r^* — действительные числа, такие, что*

$$|\alpha'(a)| < r < 1, |\alpha'(a)|^{-1} < r^*, \tag{6}$$

$\Gamma = [a; b]$ — кривая, гладкая в некоторой окрестности точки a. Тогда существуют такая окрестность $V(a)$ точки a на кривой Γ и такое натуральное число N (N^*), зависящее только от r (r^*), что для любых точек $t_1, t_2 \in V(a)$ и любых целых $m, n \geqslant N$ ($m, n \geqslant N^*$)

$$|\alpha_n(t_1) - \alpha_m(t_2)| < r|\alpha_{n-1}(t_1) - \alpha_{m-1}(t_2)|,$$

$$|\alpha_{n-1}(t_1) - \alpha_{m-1}(t_2)| < r^*|\alpha_n(t_1) - \alpha_m(t_2)|;$$

существуют действительные числа $K, K_1 > 0$, зависящие только от кривой Γ, такие, что

$$K(r^*)^{-n} < |\alpha_n(t) - a| < K_1 r^n, \quad t \in V(a).$$

Пусть $t \in I_n(c)$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда для некоторых постоянных $K_2, K_3 > 0$, зависящих только от кривой Γ,

$$\log_{r^*}\frac{K_2}{|t-a|} < n < \log_{\frac{1}{r}}\frac{K_3}{|t-a|}. \tag{7}$$

Лемма 4. *Пусть $\Gamma = [a; b]$ — кривая, гладкая в некоторой окрестности $[a; c]$ точки a; пусть $g \in H_\mu$, $g(t) \neq 0$ на $[a; c]$. Тогда последовательность $\{G_n(t), n = 1, 2, \ldots\}$ (функции $G_n(t)$ определены в (5)) равномерно сходится на $[a; c]$, причём*

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t) = G_a(t) \neq 0, \infty.$$

В частности, если функция g непрерывна на $[a; b)$, то и $G_a(t)$ непрерывна на $[a; b)$; $G_a(a) = 1$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\psi(\alpha(t)) - g(t)\psi(t) = 0. \tag{8}$$

Лемма 5. [6, Теорема 1]. *Пусть $\Gamma = [a; b]$ — кривая, ψ — решение уравнения (8), заданного на $[a; b)$, в классе $C^{[a;b)}$. Тогда выполняется следующее.*

1. *Равносильны утверждения:*

   a) *существует $\psi(t)$, такое, что $\psi(a) \neq 0$;*
   b) *для каждого $t \in [a; b)$ существует $\lim_{n\to\infty}[g(a)]^n G_n(t) \neq 0, \infty$.*

2. *Если существует такое решение ψ, что $\psi(a) \neq 0$, то этим же свойством обладают все тождественно не равные нулю решения.*
3. *Равносильны утверждения:*
   a) *существует не равное тождественно нулю решение $\psi(t)$, такое, что $\psi(a) = 0$;*
   b) *существует множество $V \subseteq [a;b)$ с непустой внутренностью, такое, что $\lim_{n\to\infty}[g(a)]^n G_n(t) = 0$ для $t \in V$, причём сходимость на V равномерная (если $V = [a;b)$, то для всех не равных нулю тождественно решений ψ $\psi(t) \neq 0$, $t \in [a;b)$).*
4. *Равносильны утверждения:*
   a) *уравнение (8) не имеет решений, кроме тождественного нуля;*
   b) *не выполняются условия пунктов 1 (b) и 3 (b).*

3. Случай бесконечного множества линейно независимых решений

Пусть $c \in (a;b)$ — любая точка; обозначим через $C_{c,g,h}$ класс функций f, определённых и непрерывных на $I_0(c) = [\alpha(c);c]$ и удовлетворяющих условию

$$f(\alpha(c)) - g(c)f(c) = h(c). \tag{9}$$

Пусть K — некоторый класс функций. Положим по определению

$$K_{c,g,h} = C_{c,g,h} \bigcap K.$$

Теорема 1. *Пусть $g, h \in H_\mu^{[a;b)}$, $g \neq 0$ на $[a;b)$,*

$$|g(a)| < 1. \tag{10}$$

Тогда уравнение (1) разрешимо в классе $C^{[a;b]}$; равенства

$$\psi(a) = h(a)[1 - g(a)]^{-1}, \tag{11}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t))\psi_0(\alpha_{-n}(t)) + \\ \qquad + \sum_{k=0}^{n-1} h(\alpha_{k-n}(t)) \prod_{j=k+1}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t)), & t \in I_n(c),\ n = 2, 3, \ldots \\ g(\alpha_{-1}(t))\psi_0(\alpha_{-1}(t)) + h(\alpha_{-1}(t)), & t \in I_1(c), \\ \psi_0(t), & t \in I_0(c), \\ \prod_{j=1}^{n} \dfrac{\psi_0(\alpha_n(t))}{g(\alpha_{n-j}(t))} - \sum_{k=1}^{n} h(\alpha_{n-k}(t)) \prod_{j=k}^{n} \dfrac{1}{g(\alpha_{n-j}(t))}, & t \in I_{-n}(c), n = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{12}$$

где ψ_0 — произвольная функция класса $C_{c,g,h}$, определяют его общее решение в классе $C^{[a;b)}$. Если $\psi_0 \in H_{\mu_0,c,g,h}$, то $\psi \in \tilde{H}_{\mu_a}^{[a;b)}$,

$$\mu_a = \begin{cases} \min\{\mu, \mu_0\}, & \text{если } |g(a)| \leqslant |\alpha'(a)|, \\ \min\{\mu, \mu_0, \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|\}, & \text{если } |g(a)| > |\alpha'(a)|. \end{cases}$$

Если $\psi_0 \in A_{p_0,c,g,h}$, $g, h \in A_p^{[a;b)}$, *то* $\psi \in \tilde{A}_{p_a}$,

$$p_a = \begin{cases} \min\{p, p_0\}, & \text{если } |g(a)| \leqslant |\alpha'(a)|, \\ \min\{p, p_0, [1 - \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|]^{-1}\}, & \text{если } |g(a)| > |\alpha'(a)|. \end{cases}$$

В любом из этих случаев существует континуум линейно независимых решений.

Замечание 2. Аналог этой теоремы сформулирован (без доказательства) в [7, Теорема 2] для о.н.т. b. В этом случае условие (10) заменяется на условие

$$|g(b)| > 1. \tag{13}$$

Доказательство. Из формул (2) и (3) следует, что формула (12) определяет общее решение уравнения (1) в классе $C^{(a;b)}$, если $\psi_0 \in C_{c,g,h}$ (условие (9) обеспечивает непрерывность функции (12) в точках $\alpha_n(c)$, n — целое).

Предположим сначала, что $h(a) = 0$. Заметим, что (см. ниже, первый шаг доказательства) для функции ψ из (12) $\lim_{t\to a} \psi(t) = 0$, и, таким образом, положив $\psi(a) = 0$, заключаем, что $\psi \in C^{[a;b)}$, т. е. что уравнение (1) разрешимо в классе $C^{[a;b)}$, а формула (12) вместе с $\psi(a) = 0$ определяет общее решение в этом классе. Приступим к доказательству того, что все определённые в (12) функции принадлежат классу $\tilde{H}_{\mu_a}$. Доказательство проведём в три шага.

Первый шаг. Докажем, что если $t \in (a; c]$, для некоторого K^*

$$|\psi(t)| < K^*|t - a|^{\mu'}, \quad \mu' < \mu_a. \tag{14}$$

Первую строку формулы (12), используя обозначения (5), можно записать в виде

$$\psi(t) = G_n(\alpha_{-n}(t)) \left([g(a)]^n \psi_0(\alpha_{-n}(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[g(a)]^{n-1-k} h(\alpha_{k-n}(t))}{G_{k+1}(\alpha_{-n}(t))} \right),$$

$t \in I_n(c)$, $n = 2, 3, \ldots$ Из леммы 4 и этой формулы следует, что если $t \in I_n(c)$, то для некоторого положительного K_1, не зависящего от n,

$$|\psi(t)| < K_1 \left(|g(a)|^n + \sum_{k=0}^{n-1} |g(a)|^{n-1-k} |h(\alpha_{k-n}(t))| \right).$$

Из леммы 3 следует, что для r^*, удовлетворяющего условию (6), и для некоторого положительного K_2, не зависящего от n,

$$|h(\alpha_{k-n}(t))| < K_2|\alpha_{k-n}(t) - a|^{\mu'} \leqslant K_2(r^*)^{(n-k)\mu'}|t - a|^{\mu'},$$

так как $\mu' < \mu_a < \mu$. Поэтому существует такое число $K_3 > 0$, не зависящее от n, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g(a)|^{n-1-k} |h(\alpha_{k-n}(t))| \leqslant K_3|t - a|^{\mu'} \sum_{k=0}^{n-1} (|g(a)| r^{*\mu'})^{n-k}.$$

Поскольку $\mu' < \mu_a \leqslant \log_{\frac{1}{|\alpha'(a)|}} \frac{1}{|g(a)|}$ по условию теоремы, число r^* можно подобрать так, что $|g(a)| r^{*\mu'} < 1$. В этом случае для некоторого положительного K_4

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g(a)|^{n-1-k} |h(\alpha_{k-n}(t))| \leqslant K_4|t - a|^{\mu'},$$

причём K_4 не зависит от n. Из неравенства (7) следует существование постоянных $K_5 > 0$ и $K_6 > 0$, не зависящих от n, таких, что

$$|g(a)|^n < |g(a)|^{\log_{\eta^*} \frac{K_5}{|t-a|}} \leqslant \left(\frac{K_5}{|t-a|}\right)^{\log_{\eta^*} |g(a)|} \leqslant K_6 |t-a|^{\log_{\eta^*} \frac{1}{|g(a)|}},$$

откуда $|g(a)|^n < K_6|t-a|^{\mu'}$ для любого $\mu' < \log_{\frac{1}{|\alpha'(a)|}} \frac{1}{|g(a)|}$, и неравенство (14) доказано для $K^* = K_6$.

Второй шаг. Докажем, что на любой дуге $I_n, n = 1, 2, \ldots,\ \psi \in H(\mu', K_0)$ для любого $\mu' < \mu_0$, причём число K_0 не зависит от номера n. Без ограничения общности можно считать, что точка c выбрана настолько близко к концу a, что можно пользоваться леммой 3, и что дуга $[a; c]$ — стандартная. Пусть числа r и r^* удовлетворяют условиям (6). Легко видеть на основании леммы 3, что если $g, h \in H(\mu, K_7)$, то для некоторого K_8, не зависящего от j, и любого $\mu' \in (0, \mu]$

$$g(\alpha_{-j}(t)),\ h(\alpha_{-j}(t)) \in H\big(\mu', K_8 (r^*)^{j\mu'}\big).$$

Действительно, например,

$$|g(\alpha_{-j}(t_1)) - g(\alpha_{-j}(t_2))| \leqslant K_7 |\alpha_{-j}(t_1) - \alpha_{-j}(t_2)|^{\mu'} < K_7 (r^*)^{j\mu'} |t_1 - t_2|^{\mu'}.$$

Кроме того, можно считать, что $|g(t)| < r$ для всех $t \in [a; c]$. Для некоторых независимых от n положительных постоянных $K_9, K_{10}, K_{11}, K_{12}$ имеем: $|h(t)| < K_9$, поэтому для любого $\mu' \in (0, \mu]$

$$h(\alpha_{k-n}(t)) \prod_{j=k+1}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t)) \in H\big(\mu', K_{10}(n-k) r^{n-k} (r^*)^{(n-k)\mu'}\big),$$

и если $\psi \in H_{\mu_0}$ на I_0, то для $\mu' \leqslant \min\{\mu, \mu_0\}$

$$\psi_0(\alpha_{-n}(t)) \prod_{j=0}^{n-1} g(\alpha_{j-n}(t)) \in H\left(\mu', K_{11} n r^n (r^*)^{n\mu'}\right).$$

Следовательно, для $t \in I_n$ и любого $\mu' : 0 < \mu' < \min\{\mu, \mu_0\}$

$$\psi \in H\left(\mu', K_{12} \sum_{k=0}^{n} k (r_0 r^{*\mu'})^k\right).$$

При достаточно малых $\mu' > 0$ (а именно, при $\mu' < \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|$) числа r и r^* можно подобрать так, что $rr^{*\mu'} < 1$, и в этом случае для всех $t \in I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, и всех μ', таких, что $0 < \mu' < \mu_a$,

$$\psi \in H\left(\mu', K_{12} \sum_{k=0}^{\infty} k (r_0 r^{*\mu'})^k\right) = H(\mu', K_0),$$

причём число K_0 не зависит от n.

Третий шаг. Докажем, что $\psi \in \tilde{H}^{[a;c]}(\mu_a, K)$. Из доказанного на втором шаге следует, что если $t_1 \in I_n, t_2 \in I_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$, то

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < K_{13} |t_1 - t_2|^{\mu'},\ 0 < \mu' < \mu_a,$$

причём K_{13} не зависит от n. Пусть теперь $t_1, t_2 \in [a;c], t_2 \in (a;t_1)$, и точки t_1 и t_2 не принадлежат какой-либо одной дуге I_n или каким-то соседним дугам I_n и I_{n+1}. В этом случае $t_2 \in (a;\alpha(t_1))$, и в силу стандартности дуги $[a;c]$ $|t_1 - t_2| > |t_1 - \alpha(t_1)|$. Так как в силу ограничений на α

$$\lim_{t\to a}\left|\frac{\alpha(t)-t}{t-a}\right| = |1-\alpha'(a)| \neq 0,$$

то в некоторой окрестности точки a для не зависящей от n постоянной $K_{14} > 0$ $|t-a| < K_{14}|\alpha(t)-t|$. Поэтому

$$|\psi(t_1)-\psi(t_2)| \leqslant K_0|t_1-a|^{\mu'} + K_0|t_2-a|^{\mu'} \leqslant 2K_0|t_1-a|^{\mu'} \leqslant \\ \leqslant 2K_0K_{14}^{\mu'}|\alpha(t_1)-t_1|^{\mu'} \leqslant 2K_0K_{14}^{\mu'}|t_1-t_2|^{\mu'}.$$

Следовательно, $\psi \in H^{[a;c]}(\mu', K)$, где $K = \max\{K^*, K_0, K_{13}, 2K_0K_{14}^{\mu'}\}$.

Пусть теперь $h(a) \neq 0$. Введя обозначения

$$\chi(t) = \psi(t) - \frac{h(a)}{1-g(a)}, \quad h_1(t) = h(t) - \frac{h(a)}{1-g(a)}[1-g(t)], \tag{15}$$

сведём уравнение (1) к равносильному уравнению

$$\chi(\alpha(t)) - g(t)\chi(t) = h_1(t), \tag{16}$$

в котором $h_1(a) = 0$, $h_1 \in H_{\mu}^{[a;b)}$. Уравнение (16), как было только что доказано, разрешимо в классе $C^{[a;b)}$ — любое его решение непрерывно продолжается на точку a — и все его решения гёльдеровы на $[a;b)$ с указанным в формулировке теоремы показателем. Поэтому то же утверждение верно для решений уравнения (1), отличающихся на постоянное слагаемое от решений (16). При этом в силу (15)

$$\psi(a) = \chi(a) + \frac{h(a)}{1-g(a)} = \frac{h(a)}{1-g(a)}.$$

Осталось доказать, что если $g, h \in A_p^{[a;b)}, \psi_0 \in A_{p_0,c,g,h}$, то $\psi \in \tilde{A}_{p_a}$. Пусть $\psi \in C^{(a;b)}$ — ограниченное решение уравнения (1), ψ_0 — сужение ψ на $I_0(c)$, и $\psi_0 \in A_{p_0}^{I_0(c)}$. Пусть $g, h \in A_p^{[a;b)}$. Мы покажем, что для некоторого положительного числа K_n на $I_n(c)$ $\psi(t) \in A(p', K_n)$, $1 < p' < p_a$, причём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$ сходится. По критерию Ф. Рисса отсюда будет следовать, что конечны интегралы $\int_{I_n(c)} |\psi'(\tau)|^{p'}|d\tau|$, причём ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{I_n(c)} |\psi'(\tau)|^{p'}|d\tau|$$

сходится, т. е. существует интеграл $\int_{[ac]} |\psi'(\tau)|^{p'}|d\tau|$; иначе говоря, $\psi' \in L_{p'}^{[a;c]}$. Поэтому $\psi \in \tilde{A}_{p_a}^{[a;c]}$.

Итак, покажем, что $\psi \in A(p', K_n)$, причём сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} K_n$. Пусть $|\psi(t)| < M$, если $t \in [a;b]$. Так как $h \in A_p^{[a;c]}$, для любых p', $1 < p' \leqslant p$, конечен интеграл $S_h = \int_{[a;c]} |h'(\tau)|^{p'}|d\tau|$, следовательно, сходится ряд $S_h = \sum_{n=0}^{\infty} S_{h,n}$, где

$$S_{h,n} = \int_{I_n(c)} |h'(\tau)|^{p'}|d\tau|.$$

Так как ψ — решение уравнения (1), имеем равенство

$$|\psi(t)-\psi(t_0)| = |\psi(\alpha_{-1}(t_0))[g(\alpha_{-1}(t))-g(\alpha_{-1}(t_0))]+ \\ + g(\alpha_{-1}(t_0))[\psi(\alpha_{-1}(t))-\psi(\alpha_{-1}(t_0))]+[h(\alpha_{-1}(t))-h(\alpha_{-1}(t_0))]|.$$

Построим по индукции последовательность чисел $\{K_n,\ n=0,1,\dots\}$, такую, что $\psi\in A^{I_n(c)}_{(p',K_n)}$, причём $\sum_{n=1}^{\infty}K_n<\infty$. Пусть K_0 — любое число, такое, что $\psi\in A^{I_0(c)}_{(p',K_0)}$. Пусть $\{t_0,\dots,t_k\}\in I_{n+1}(c)$ и соответственно $\{\alpha_{-1}(t_0),\dots,\alpha_{-1}(t_k)\}\in I_n(c)$. Воспользуемся критерием Ф.Рисса. Получим, используя лемму 3:

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{|\psi(t_{j+1})-\psi(t_j)|^{p'}}{|t_{j+1}-t_j|^{p'-1}}\leqslant \\ \leqslant\sum_{j=0}^{k}|\psi(\alpha_{-1}(t_j))|^{p'}\cdot\frac{|g(\alpha_{-1}(t_{j+1}))-g(\alpha_{-1}(t_j))|^{p'}}{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}\frac{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}{|t_{j+1}-t_j|^{p'-1}}+ \\ +\sum_{j=0}^{k}|g(\alpha_{-1}(t_{j+1}))|^{p'}\cdot\frac{|\psi(\alpha_{-1}(t_{j+1}))-\psi(\alpha_{-1}(t_j))|^{p'}}{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}\frac{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}{|t_{j+1}-t_j|^{p'-1}}+ \\ +\frac{|h(\alpha_{-1}(t_{j+1}))-h(\alpha_{-1}(t_j))|^{p'}}{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}\frac{|\alpha_{-1}(t_{j+1})-\alpha_{-1}(t_j)|^{p'-1}}{|t_{j+1}-t_j|^{p'-1}}\leqslant \\ \leqslant M^{p'}(r^*)^{p'-1}S_{g,n}+r^{p'}(r^*)^{p'-1}K_n+(r^*)^{p'-1}S_{h,n}.$$

Так как $p'<p_a$, то числа r и r^* (см. (6)) можно подобрать так, чтобы число $r_1=\left(rr^{*\frac{p'-1}{p'}}\right)^{p'}$ было меньше единицы, для этого нужно, чтобы $(p'-1)/p'<\log_{r^*}(r^{-1})$. Поэтому для некоторой положительной постоянной M_1

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{|\psi(t_{j+1})-\psi(t_j)|^{p'}}{|t_{j+1}-t_j|^{p'-1}}\leqslant M_1(S_{g,n}+S_{h,n})+r_1K_n,$$

и, таким образом, если положить $A_n=S_{n,g}+S_{n,h}$ (напомним, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ сходится) и $K_{n+1}=M_1A_n+r_1K_n$, то $\psi\in A^{I_{n+1}(c)}(p,K_{n+1})$. Осталось доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty}K_n<\ \infty$. Имеем

$$K_{n+1}=r_1^{n+1}K_0+M_1\sum_{j=0}^{n}r_1^jA_n^{n-j}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=0}^{m}K_{n+1}=K_0\sum_{n=0}^{m}r_1^{n+1}+M_1\sum_{n=0}^{m}A_n\sum_{j=0}^{n-1}r_1^j\leqslant \\ \leqslant K_0\sum_{n=0}^{\infty}r_1^{n+1}+M_1\sum_{n=0}^{m}A_n\sum_{j=0}^{\infty}r_1^j\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}r_1^n\right)\left(K_0+M_1\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right)<\infty.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $m\to\infty$, получим требуемое.

Наконец, из [11, с. 141, упражнение 2] следует, что мощность базисов (в другой терминологии — базисов Гамеля [11, с. 124]) линейных пространств $C_{c,g,h}$, $H_{\mu_0,c,g,h}$ и $A_{p_0,c,g,h}$ равна континууму. Теорема доказана. □

Для непрерывного продолжения решения на точку b требуется условие, аналогичное (10), но с противоположным знаком (для о.н.т.):

$$|g(b)| > 1. \tag{17}$$

Прямым следствием теоремы 1, применённой к обоим концам кривой $\Gamma = [a; b]$, является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $g, h \in H_\mu^{[a;b]}$, $g \neq 0$ *на* $[a; b]$, *и выполняются условия* (10) *и* (17)*. Тогда уравнение* (1) *разрешимо в классе* $C^{[a;b]}$*; формулы* (11), (12) *и* (13), *где* ψ_0 — *произвольная функция класса* $C_{c,g,h}$, *определяют его общее решение в классе* $C^{[a;b]}$. *Если* $\psi_0 \in H_{\mu_0,c,g,h}$, *то* $\psi \in \tilde{H}_{\mu^*}^{[a;b]}$, *где* $\mu^* = \min(\mu_a, \mu_b)$, *число* μ_a *определено в условии теоремы* 1 *и*

$$\mu_b = \begin{cases} \min\{\mu, \mu_0\}, & \text{если } |g(b)| \geqslant |\alpha'(b)|, \\ \min\{\mu, \mu_0, \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|\}, & \text{если } |g(b)| < |\alpha'(b)|. \end{cases}$$

Если $\psi_0 \in A_{p_0,c,g,h}$, $g, h \in A_p^{[a;b]}$, *то* $\psi \in \tilde{A}_{p^*}$, *где* $p^* = \min(p_a, p_b)$, *число* p_a *определено в условии теоремы* 1 *и*

$$p_b = \begin{cases} \min\{p, p_0\}, & \text{если } |g(b)| \geqslant |\alpha'(b)|, \\ \min\{p, p_0, [1 - \log_{|\alpha'(b)|} |g(b)|]^{-1}\}, & \text{если } |g(b)| < |\alpha'(b)|. \end{cases}$$

В любом из этих случаев существует континуум линейно независимых решений.

4. Случай единственности решения

В силу теоремы 1 из [7] единственность решения уравнения 1 на $[a; b)$ обеспечивается условием

$$|g(a)| > 1. \tag{18}$$

Если добавить ещё условие (17), это решение можно непрерывно продолжить на точку b, что даст существование единственного решения на отрезке $[a; b]$. Поэтому прямым следствием теоремы 1 из настоящей работы и теоремы 1 из работы [7] является

Теорема 3. *Пусть* $g, h \in H_\mu$, $g(t) \neq 0$, $t \in [a; b]$, $|g(a)| > 1$, $|g(b)| > 1$*. Тогда существует единственное решение уравнения* (1) *в классе* $C^{[a;b]}$ *. Оно определяется формулами*

$$\psi(a) = \frac{h(a)}{1 - g(a)}, \quad \psi(b) = \frac{h(b)}{1 - g(b)},$$

$$\psi(t) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(\alpha_k(t))}{(g(a))^{k+1} G_{k+1}(t)}, \quad t \in (a; b). \tag{19}$$

Если $\mu < \mu_1 = \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|$, *то* $\psi \in H_\mu^{[a;b]}$, *иначе* $\psi \in H_{\mu_1}^{[a;b]}$.

Если $g, h \in A_p^{[a;b]}$, $p > 1$, *и* $p < p_1 = \dfrac{1}{1 - \log_{|\alpha'(a)|} |g(a)|}$, *то* $\psi \in A_p^{[a;b]}$, *иначе* $\psi \in A_{p_1}^{[a;b]}$.

Замечание 3. Эта теорема сформулирована в [7] (без доказательства). Формула (19) получена в теореме 1 работы [7]. Аналогичный теореме 3 результат получится, если развернуть неравенства (17) и (18). Надо лишь в условиях, определяющих принадлежность решения классам функций, заменить a на b.

Список литературы

1. **Бродский Я. С., Слипенко А. К.** Функциональные уравнения. Киев : Вища школа, 1983.
2. **Kuczma M.** An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Warszawa; Krakow; Katowice : Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.
3. **Лихтарников Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения. СПб. : Лань, 1997.
4. **Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.** Метод инвариантов в теории функциональных уравнений. Киев : Институт математики НАН, 2013.
5. **Иолов М., Авезов Р.** Об одном классе линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. Академии наук Республики Таджикистан. Отд-е физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук. 2019. Т. 177, № 4. С. 7–12.
6. **Дильман В. Л.** Линейные функциональные уравнения в гёльдеровых классах функций на простой гладкой кривой // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика, механика, физика. 2020. Т. 12, № 2. С. 5–12.
7. **Дильман В. Л., Комиссарова Д. А.** Условия существования и единственности решений линейных функциональных уравнений в классах первообразных от лебеговских функций на простой гладкой кривой // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика, механика, физика. 2021. Т. 13, № 4. С. 13–23.
8. **Litvinchuk G. S.** Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Springer Science + Business Media, 2012.
9. **Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S.** Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Springer Science+Business Media, 2014.
10. **Чибрикова Л. И., Дильман В. Л.** О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p, $p > 1$ // Изв. вузов. Математика. 1986. № 4. С. 26–36.
11. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1968.

Поступила в редакцию 19.08.2022.
После переработки 09.01.2023.

Сведения об авторах

Дильман Валерий Лейзерович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: dilman49@mail.ru.

Комиссарова Дарья Амировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: komissarovada@susu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023. Vol. 8, iss. 1. P. 5–17.

DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101

LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE CLASS OF ANTIDERIVATIVES FROM THE LEBESGUE FUNCTIONS ON CURVES SEGMENTS

V.L. Dilman[a], **D.A. Komissarova**[b]

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia
[a]*dilman49@mail.ru*, [b]*komissarovada@susu.ru*

Linear functional equations on simple smooth curves with shift function of infinite order with fixed points at the ends of the curve are considered. The purpose is to study the sets of solutions of such equations in Hölder classes of functions H_μ, $0 < \mu \leqslant 1$, and classes of antiderivatives of functions from the classes L_p, $p > 1$, with coefficients and right-hand sides from the same classes, and to investigate the solutions behavior in a neighborhood of fixed points. The research method uses F. Riesz's criterion for a function belonging to the class of antiderivatives of functions from the L_p, $p > 1$, classes. For solutions classes we obtain estimates of the parameters μ and p depending on parameters of classes of coefficients and right-hand sides in the studied equations and properties of the shift function in a neighborhood of a fixed point.

Keywords: *linear functional equation, infinite order shift function, class of Hölder functions, class of Lebesgue functions antiderivatives.*

References

1. **Brodsiy Ya.S., Slipenko A.K.** *Funktsional'nye uravneniya* [Functional Equations]. Kiyev, Vishcha shkola, 1983. (In Russ.).
2. **Kuczma M.** *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* Warszawa; Krakow; Katowice, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (Polish Scientific Publishers) and Uniwersytet Slaski, 1985.
3. **Likhtarnikov L.M.** *Elementarnoye vvedeniye v funktsional'nye uravneniya* [An elementary introduction to functional equations]. St. Petersburg, Lan', 1997. (In Russ.).
4. **Pelyukh G.P., Sharkovskiy A.N.** *Metod invariantov v teorii funktsional'nykh uravneniy* [Method of invariants in the functional equations theory]. Kiyev, Institute of Mathematics of NAS, 2013. (In Russ.).
5. **Ilolov M., Avezov R.** Ob odnom klasse lineynykh funktsional'nykh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami [On a class of linear functional equations with constant coefficients]. *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan* [News of Academy of Sciences of the Republic of Tadzhikistan], 2019, vol. 177, no. 4., pp. 7–12. (In Russ.).
6. **Dil'man V.L.** Lineynye funktsional'nye uravneniya v gyolderovykh klassakh funktsiy na prostoy gladkoy krivoy [Linear functional equations in the Hölder classes of functions on a simple smooth curve]. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2020, vol. 12, no. 2, pp. 5–12. (In Russ.).
7. **Dil'man V.L., Komissarova D.A.** Usloviya sushchestvovaniya i edinstvennosti resheniy lineynykh funktsional'nykh uravneniy v klassakh pervoobraznykh ot lebegovskikh funktsiy na prostoy gladkoy krivoy [Existence and uniqueness conditions for solutions of linear functional equations in the classes of antiderivatives from Lebesgue functions on a simple smooth curve]. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 13–23. (In Russ.).
8. **Litvinchuk G.S.** *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Springer Science+Business Media, 2012.

9. **Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S.** *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Science+Business Media, 2014.
10. **Chibrikova L.I., Dil'man V.L.** Solutions of an integral equation with generalized logarithmic kernel in L_p, $p > 1$. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1986, vol. 30, no. 4, pp. 33–46.
11. **Kholmogorov A.N., Fomin S.V.** *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1968. (In Russ.).

Accepted article received 19.08.2022.
Corrections received 09.01.2023.