МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 4. С. 388–400.

УДК 517.978.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА С ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ В ФОРМЕ КОЛЬЦА И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА

С. Р. Алеева[1,a], **Г. Р. Березовская**[2,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *ООО «Челяб-Авто», Челябинск, Россия*
[a] *sofochka7782@mail.ru*, [b] *super2609@gmail.com*

Рассматривается однотипная игра, в которой первый игрок имеет интегральное ограничение на управление, у второго игрока — геометрическое ограничение. Цель первого игрока состоит в попадании в область в виде кольца, расположенного вокруг противника, в фиксированный момент времени p при затрате минимального запаса ресурса. Цель второго — избежать этого попадания. Решена задача минимизации запаса ресурса в такой игре.

Ключевые слова: *дифференциальные игры, интегральное ограничение, геометрическое ограничение, форма кольца.*

Введение

Линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания может быть сведена с помощью замены переменных к задаче с простым движением, что показано в [1]. При этом в новой игре вектограммы игроков в каждый момент времени гомотетичны одному и тому же выпуклому симметрическому компакту. Такой класс игр называется классом однотипных игр. Целевые множества игр могут иметь разнообразные формы. Рассматривается дифференциальная игра преследования с целевым множеством в форме кольца и интегральным ограничением. Интегральные ограничения на управление преследователя усложняют построение оптимального управления, так как область достижимости при таких ограничениях нелинейно зависит от потраченного запаса ресурсов. При этом трата ресурсов должна быть минимальна. Решение однотипной задачи с интегральными ограничениями сводится к экстремальной задаче. Рассматриваемая форма целевого множества предполагает, с одной стороны, сближение с объектом преследования не меньше чем на заданное расстояние, с другой стороны — возможность оставаться на «безопасном» расстоянии от противника. В статьях [2; 3] изучалась однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца и геометрическими ограничениями на управления игроков, тогда как в [4] была рассмотрена игра с целевым множеством в форме круга и интегральным ограничением управления первого игрока. Данная работа продолжает исследования, начатые в [5; 6], где решалась задача о минимизации запаса ресурса для разного вида однотипных игр и задача минимизации расстояния [7].

1. Постановка задачи преследования

Первый игрок управляет движением точки x в пространстве $\mathbb{R}^2$, выбирая в каждый момент времени её ускорение, которое ограничено по величине заданным числом $a > 0$. Тогда уравнение движения первого игрока можно записать в виде $\ddot{x} = au$.

Второй игрок управляет движением точки y в пространстве $\mathbb{R}^2$, выбирая в каждый момент времени её скорость, которая ограничена по величине заданным числом $b > 0$. Уравнение движения второго игрока имеет вид $\dot{y} = bv$.

Таким образом, рассматривается динамическая система

$$\begin{cases} \ddot{x} = au, \\ \dot{y} = bv, \end{cases} \tag{1}$$

при фиксированном моменте окончания p цель первого игрока состоит в том, чтобы добиться выполнения условий $\varepsilon_1 \leqslant \|x(p) - y(p)\| \leqslant \varepsilon_2$, где числа $\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1 > 0$ заранее заданы. Цель второго игрока — не допустить выполнения системы этих неравенств. Накладываются следующие ограничения на управления игроков:

$$\mu(t) = \mu_0 - \int_{t_0}^{t} \|u(r)\|^2\, dr \geqslant 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p, \quad \|v\| \leqslant 1.$$

1.1. Переход к однотипной игре

Игра (1) с помощью замены переменных $z = y - x - (p-t)\dot{x}$ сводится к однотипной игре с фиксированным временем окончания p [1] при ограничениях на управления u и v:

$$\begin{cases} \dot{z} = bv - a(p-t)u, \\ \mu(t) = \mu_0 - \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|u(r)\|^2\, dr \geqslant 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p, \\ \|v\| \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Цель игры принимает вид

$$\varepsilon_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2. \tag{3}$$

1.2. Общий вид задачи

Рассмотрим игру (2) в общем виде

$$\begin{cases} \dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad z, u, v \in \mathbb{R}^n, \\ \mu(t) = \mu_0 - \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|u(r)\|^2\, dr \geqslant 0, \quad \mu_0 > 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p, \\ \|v\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Считаем, что функции $a(t)$ и $b(t)$ при $t \leqslant p$ определены, неотрицательны и суммируемы на каждом конечном отрезке. Цель задаётся системой (3).

Для посторoения решения игры определим стратегии игроков и порождаемое ими движение.

Стратегией первого игрока [4; 5] является функция вида

$$u = \varphi(t) w(t, z), \tag{4}$$

где $w(t,z)$ — любая функция, удовлетворяющая равенству $\|w(t,z)\| = 1$. Функция $\varphi \in L_2[t,p]$ неотрицательна, строится в зависимости от начального состояния t_0, z_0,

μ_0 и удовлетворяет неравенству

$$\int_{t_0}^{p} \varphi^2(t)dt \leqslant \mu_0. \tag{5}$$

Стратегия второго игрока [4; 5] — любая функция $v(t,z)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|v(t,z)\| \leqslant 1. \tag{6}$$

Зафиксируем начальный момент времени $t_0 < p$ и возьмём разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{k+1} = p.$$

Для начального состояния $z(t_0) = z_0$, $\mu(t_0) = \mu_0$ и для выбранных стратегий построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \Big(\int_{t_i}^{t} a(r)\varphi(r)dr\Big) \cdot w\big(t_i, z_\omega(t_i)\big) + \\ + \Big(\int_{t_i}^{t} b(r)dr\Big) \cdot v\big(t_i, z_\omega(t_i)\big), \quad t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}. \tag{7}$$

Каждая ломаная удовлетворяет неравенству

$$\big|\|z_\omega(t)\| - \|z_\omega(\tau)\|\big| \leqslant \Big(\int_{\tau}^{t} a^2(r)dr\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \mu_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\tau}^{t} b(r)dr, \quad t \leqslant \tau \leqslant p.$$

Из него следует, что семейство скалярных функций $\|z_\omega(t)\|$ на отрезке $[t_0, p]$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела [8] из любой последовательности можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$ подпоследовательность.

Под реализацией значений $\|\cdot\|$ на движении, порождённом управлениями (4) и (6), понимаем любую функцию, которая является равномерным пределом на отрезке $[t_0, p]$ последовательности функций $\|z_{\omega_n}(t)\|$. Здесь $\|z_{\omega_n}(t)\|$ — последовательность ломаных (7) с диаметром разбиения $d_{\omega_n} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(t_{i+1} - t_i) \to 0$.

2. Задача о минимизации запаса ресурсов

Зафиксируем числа $\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_1 > 0$ и рассмотрим задачу, когда цель первого игрока заключается в минимизации интеграла

$$\int_{t_0}^{p} \varphi^2(t)dt \to \min$$

при условии осуществления неравенств

$$\varepsilon_1 \leqslant \|z(p)\| \leqslant \varepsilon_2. \tag{8}$$

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{cases} g_0(\varphi(\cdot)) = \displaystyle\int_{t_0}^{p} \varphi^2(t)dt \to \min, \quad \varphi(t) \geqslant 0,\ \varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p], \\ g_1(\varphi(\cdot)) = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant p} \displaystyle\int_{t}^{p} \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2, \\ g_2(\varphi(\cdot)) = \displaystyle\int_{t_0}^{p} \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant \|z_0\| - \varepsilon_1, \\ g_3(\varphi(\cdot)) = \displaystyle\int_{t_0}^{p} \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant -\|z_0\| + \varepsilon_2. \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 1. *Решение $\varphi_*(t)$ задачи (9) существует.*

Доказательство. Обозначим значение целевого функционала на решении через g_0. Существует последовательность неотрицательных функций $\varphi_n(t) \in L_2[t_0, p]$, таких, что $\int_{t_0}^p \varphi_n^2(t)dt \to g_0$. Можно считать, что $\int_{t_0}^p \varphi_n^2(t)dt \leqslant \mu_0$. В пространстве $L_2[t_0, p]$ любой шар слабо компактен [8]. Поэтому при переходе к подпоследовательности можно считать, что существует неотрицательная функция $\varphi_*(t) \in L_2[t_0, p]$, такая, что $\int_{t_0}^p \varphi_*^2(t)dt \leqslant \mu_0$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^p \varphi_n(t)\psi(t)dt = \int_{t_0}^p \varphi_*(t)\psi(t)dt \quad \forall \psi \in L_2[t_0, p]. \tag{10}$$

Подставим функции $\varphi_n(t)$ в выражения для $g_1(\varphi(\cdot))$, $g_2(\varphi(\cdot))$, $g_3(\varphi(\cdot))$. Тогда из (10) получим

$$\lim_{n\to+\infty} g_2(\varphi_n(\cdot)) = \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^p \big(b(r) - a(r)\varphi_n(r)\big)dr = g_2(\varphi_*(\cdot)) \leqslant \|z_0\| - \varepsilon_1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} g_3(\varphi_n(\cdot)) = \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^p \big(b(r) - a(r)\varphi_n(r)\big)dr = g_3(\varphi_*(\cdot)) \leqslant -\|z_0\| + \varepsilon_2.$$

Нужно лишь доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} g_1(\varphi_n(\cdot)) = g_1(\varphi_*(\cdot)).$$

Рассмотрим

$$\tilde{a}(r) = \begin{cases} a(r), & t_0 \leqslant r \leqslant t, \\ 0, & t < r \leqslant p. \end{cases}$$

Так как $\tilde{a}(r) \in L_2[t_0, p]$, то из (10) следуют соотношения

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^t a(r)\varphi_n(r)dr = \int_{t_0}^p \tilde{a}(r)\varphi_*(r)dr = \int_{t_0}^t a(r)\varphi_*(r)dr. \tag{11}$$

При любом $t \in [t_0, p]$ имеем

$$\int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi_n(r)\big)dr \leqslant (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2.$$

Используя (9) и (11) при $n \to +\infty$, получим

$$\int_t^p b(r)dr - \int_{t_0}^p a(r)\varphi_*(r)dr + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^t a(r)\varphi_n(r)dr =$$

$$= \int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi_*(r)\big)dr \leqslant (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2.$$

Следовательно, функция $\varphi_*(t)$ является решением задачи (9). □

Обозначим для каждой неотрицательной функции $\varphi \in L_2[t, p]$, удовлетворяющей условию (5),

$$t(\varepsilon_1, \varphi(\cdot)) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } \varepsilon_1 + \displaystyle\int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr > 0 \text{ при всех } t \leqslant p, \\ \inf\Big\{\tau : \tau \leqslant p,\, \varepsilon_1 + \displaystyle\int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr > 0 \text{ при всех } \tau < t \leqslant p\Big\}, \end{cases} \tag{12}$$

$$f_1(t,\varphi(\cdot)) = \begin{cases} \varepsilon_1 + \displaystyle\int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr, & t(\varepsilon_1,\varphi(\cdot)) \leqslant t \leqslant p, \\ 0, \quad t \leqslant t(\varepsilon_1,\varphi(\cdot)), \end{cases} \tag{13}$$

$$f_2(t,\varphi(\cdot)) = \varepsilon_2 - \int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr, \text{ при всех } t \leqslant p, \tag{14}$$

$$t(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varphi(\cdot)) = \begin{cases} -\infty, \text{ если } f_1(t,\varphi(\cdot)) \leqslant f_2(t,\varphi(\cdot)) \text{ при всех } t \leqslant p, \\ \inf\Big\{\tau : \tau \leqslant p,\ f_1(t,\varphi(\cdot)) \leqslant f_2(t,\varphi(\cdot)) \text{ при всех } \tau < t \leqslant p\Big\}. \end{cases} \tag{15}$$

Возьмём решение задачи (9) $\varphi_*(t)$ и введём в рассмотрение, согласно (12)–(15), следующие обозначения:

$$t(\varepsilon_1) = t(\varepsilon_1, \varphi_*(\cdot)), \tag{16}$$

$$f_1(t) = f_1(t, \varphi_*(\cdot)), \tag{17}$$

$$f_2(t) = f_2(t, \varphi_*(\cdot)), \tag{18}$$

$$t(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = t(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varphi_*(\cdot)).$$

Лемма 2. *Существует последовательность неотрицательных функций $\varphi_k(t) \in L_2[t_0,p]$, удовлетворяющих условиям (5), такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} t(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varphi_k(\cdot)) = t(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.*

Доказательство. Возьмём из доказательства леммы 1 минимизирующую последовательность $\varphi_n(t) \in L_2[t_0,p]$, её элементы удовлетворяют всем ограничениям задачи (9). Поэтому, переходя, если это необходимо, к подпоследовательности $\varphi_k(t)$, в силу слабой сходимости (10) имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \int_t^p a(r)\varphi_k(r)dr = \int_t^p a(r)\varphi_*(r)dr \quad \forall t \in [t_0,\ p].$$

Поэтому условия в (15), взятые на $\varphi_k(t)$, переходят в условия в $f_1(t) = f_1(t,\varphi_*(\cdot)) \leqslant f_2(t) = f_2(t,\varphi_*(\cdot))$, записанные на функции $\varphi_*(t)$. □

Замечание 1. Такие же последовательности можно построить и для (16)–(18).

Далее будем рассматривать следующие условия:

$$\begin{cases} t(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \leqslant t_0 \leqslant p, \\ f_1(t_0) \leqslant \|z_0\| \leqslant f_2(t_0). \end{cases} \tag{19}$$

Из [3] следует, что при ограничениях (19) существует правило построения управления первого игрока такое, что при любом допустимом управлении второго игрока для любого реализовавшегося движения $z(t)$ достигается цель (8).

Из (19) следует, что

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant p} \int_t^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2,$$

(условие на $g_1(\varphi(\cdot))$ задачи (9)),

$$\varepsilon_1 + \int_{t_0}^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant \|z_0\| \text{ при } t(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \leqslant t_0 \leqslant p,$$

т. е.

$$\int_{t_0}^p \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant \|z_0\| - \varepsilon_1$$

(условие на $g_2(\varphi(\cdot))$ задачи (9)),

$$-\varepsilon_2 + \int_{t_0}^{p} \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant -\|z_0\| \text{ при } t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \leqslant t_0 \leqslant p,$$

т. е.

$$\int_{t_0}^{p} \big(b(r) - a(r)\varphi(r)\big)dr \leqslant -\|z_0\| + \varepsilon_2$$

(условие на $g_3(\varphi(\cdot))$ задачи (9)).

Перейдём к непосредственному построению решения $\varphi_*(t)$ задачи (9).

Лемма 3. *Пусть заданы числа $t_1 < t_2 \leqslant p$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Решение $\varphi_0(t) \in L_2[t_0, p]$ задачи*

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t)dt \to \min,\ c_1 - \int_{t_1}^{t_2} a(r)\varphi(r)dr \leqslant 0,\ c_2 - \int_{t_1}^{t_2} a(r)\varphi(r)dr \leqslant 0,\ \varphi(t) \geqslant 0 \quad (20)$$

задаётся формулой

$$\varphi_0(t) = \frac{a(t)}{\int_{t_0}^{p} a^2(r)dr} \max\{0, c_1, c_2\}. \quad (21)$$

Доказательство. Если $c_1 \leqslant 0$ и $c_2 \leqslant 0$, то связь в (20) выполняется для любой функции $\varphi(t) \geqslant 0$. Поэтому решением будет являться нулевая функция. Следовательно, формула (21) верна.

Пусть $c_1 \geqslant c_2$ и $c_1 > 0$. Для функции (21) имеем

$$c_1 - \int_{t_1}^{t_2} a(r)\varphi_0(r)dr = c_1 - c_1\Big(\int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr\Big)^{-1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t)dt = \frac{c_1^2 \int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr}{\Big(\int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr\Big)^2} = \frac{c_1^2}{\int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr}.$$

С другой стороны, для любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей ограничениям (20), имеем

$$c_1 \leqslant \int_{t_1}^{t_2} a(r)\varphi(r)dr \leqslant \Big(\int_{t_1}^{t_2} a^2(r)dr\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(r)dr\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда получаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(r)dr \geqslant \int_{t_1}^{t_2} \varphi_0^2(r)dr. \quad (22)$$

Аналогичные рассуждения приводят к фомуле (22) для случая $c_2 \geqslant c_1$ и $c_2 > 0$. □

Теорема 1. *Пусть*

$$\int_{t_0}^{p} b(r)dr - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \leqslant 0, \quad (23)$$

тогда решение задачи (9) *задаётся формулой*

$$\varphi_*(t) = \frac{a(t)}{\int_{t_0}^{p} a^2(r)dr} \max\Big\{0, \int_{t_0}^{p} b(r)dr - \|z_0\| + \varepsilon_1, \int_{t_0}^{p} b(r)dr + \|z_0\| - \varepsilon_2\Big\}. \quad (24)$$

Доказательство. Так как из неравенства (23) следует, что для любой функции $\varphi(t) \geqslant 0$ выполнено ограничение $g_1(\varphi(\cdot))$ в задаче (9), то остаются ограничения $g_2(\varphi(\cdot)) \leqslant \|z_0\| - \varepsilon_1$ и $g_3(\varphi(\cdot)) \leqslant -\|z_0\| + \varepsilon_2$. Применяя лемму 3, получаем формулу (24). □

Пусть далее неравенство (23) не выполнено, тогда существует такое число θ, что

$$\int_t^p b(r)dr - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} > 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < \theta,$$
$$\int_t^p b(r)dr - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \leqslant 0 \text{ при } \theta \leqslant t \leqslant p. \tag{25}$$

Теорема 2. *Пусть существуют числа $\bar\nu \geqslant 0$, $\hat\nu \geqslant 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\psi(t)$, такие, что* $\quad(t_0) = 0$ *и*

$$\int_t^p \Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr \leqslant \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant p, \tag{26}$$
$$\int_{t_0}^p \Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr + \|z_0\| \leqslant \varepsilon_2, \tag{27}$$
$$\int_{t_0}^p \Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr - \|z_0\| \leqslant -\varepsilon_1, \tag{28}$$
$$\int_{t_0}^\tau \psi(r)\Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr = \psi(p)\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}, \tag{29}$$
$$\bar\nu\Big(\int_{t_0}^p \Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr - \|z_0\| + \varepsilon_1\Big) = 0. \tag{30}$$
$$\hat\nu\Big(\int_{t_0}^p \Big(b(r) - a^2(r)\Big(\frac{\bar\nu + \hat\nu + \quad(t)}{2}\Big)\Big)dr + \|z_0\| - \varepsilon_2\Big) = 0. \tag{31}$$

Тогда функция

$$\varphi_*(t) = \frac{a(t)}{2}(\bar\nu + \hat\nu + \psi(t)) \tag{32}$$

является решением задачи (9).

Доказательство. Запишем функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(\varphi(\cdot)) \;\; &= \;\; \int_{t_0}^p (\varphi^2(t) + (\bar\nu + \hat\nu + \psi(t))(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \psi(p)\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} + \\ &+ \;\; \bar\nu(-\|z_0\| + \varepsilon_1) + \hat\nu(\|z_0\| - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Минимум её по всем функциям $\varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ достигается на функции (32). Согласно равенствам (26)–(28) функция (32) удовлетворяет связям в задаче (9). Возьмём любую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую связям в задаче (9). Используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стилтьеса [9], будем иметь

$$\int_{t_0}^p \psi(r)(b(r) - a(r)\varphi(r))dr - \psi(p)\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} =$$
$$= \int_{t_0}^p \Big(\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r))dr - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\Big)d\psi(t) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^p \varphi_*^2(t)dt = L(\varphi_*(\cdot)) \leqslant L(\varphi(\cdot)) \leqslant \int_{t_0}^p \varphi^2(t)dt.$$

□

Теорема 3. *Существуют числа $\bar\nu \geqslant 0$, $\hat\nu \geqslant 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\psi(t)$, такие, что $\psi(t_0) = 0$ и выполнены условия (26)–(31).*

Доказательство. Будем рассматривать последовательность разбиений

$$\omega_n: \ t_0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{k_n}^{(n)} < t_{k_{n+1}}^{(n)} = p,$$

диаметры которых стремятся к нулю, и каждая точка разбиения ω_n является точкой разбиения ω_{n+1}. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{p} \varphi^2(t))dt \to \min, \quad \varphi(t) \geqslant 0,\ \varphi(\cdot) \in L_2[t_0, p],\\
&\int_{t_i^{(n)}}^{p} (b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \leqslant 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k_n,\\
&\int_{t_0}^{p} (b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \|z_0\| + \varepsilon_1 \leqslant 0,\\
&\int_{t_0}^{p} (b(t) - a(t)\varphi(t))dt + \|z_0\| - \varepsilon_2 \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Эта задача имеет решение, которое обозначим $\varphi_n(t)$. Зафиксируем числа $\nu_*^{(n)}$, $\bar\nu^{(n)}$, $\hat\nu^{(n)}$, $\nu_0^{(n)}$,..., $\nu_{k_n}^{(n)}$ и составим функцию Лагранжа для задачи (33)

$$\begin{aligned}
L(\varphi(\cdot)) = \nu_*^{(n)} \int_{t_0}^{p} \varphi^2(t)dt + \bar\nu^{(n)}\Big(\int_{t_0}^{p} (b(t) - a(t)\varphi_n(t))dt - \|z_0\| + \varepsilon_1\Big) +\\
+\hat\nu^{(n)}\Big(\int_{t_0}^{p} (b(t) - a(t)\varphi_n(t))dt + \|z_0\| - \varepsilon_2\Big) +\\
+\sum_{i=0}^{k_n} \nu_i^{(n)}\Big(\int_{t_i^{(n)}}^{p} (b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\Big).
\end{aligned} \tag{34}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\psi_n(t) = \begin{cases}
0, \quad t = t_0,\\
\nu_0^{(n)}, \quad t_0^{(n)} < t \leqslant t_1^{(n)},\\
\nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)}, \quad t_1^{(n)} < t \leqslant t_2^{(n)},\\
\cdots\\
\nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)} + \cdots + \nu_{k_{n-1}}^{(n)}, \quad t_{k_{n-1}}^{(n)} < t \leqslant t_{k_n}^{(n)},\\
\nu_0^{(n)} + \nu_1^{(n)} + \cdots + \nu_{k_n}^{(n)}, \quad t_{k_n}^{(n)} < t \leqslant p.
\end{cases} \tag{35}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k_n} \nu_i^{(n)}\Big(\int_{t_i^{(n)}}^{p} (b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\Big) =\\
&= \int_{t_0}^{p} \psi_n(t)(b(t) - a(t)\varphi(t))dt - \psi_n(p)\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

С помощью (36) выделим в функции Лагранжа (34) слагаемое, содержащее функцию $\varphi(t)$:

$$\int_{t_0}^{p} (\nu_*^{(n)}\varphi^2(t) - a(t)(\bar\nu^{(n)} + \hat\nu^{(n)} + \psi_n(t))\varphi(t))dt. \tag{37}$$

Задача (33) является задачей выпуклого программирования с решением $\varphi_n(t)$. По теореме Куна — Таккера [10] существует ненулевой набор чисел

$$\nu_*^{(n)} \geqslant 0,\ \bar{\nu}^{(n)} \geqslant 0,\ \hat{\nu}^{(n)} \geqslant 0,\ \nu_0^{(n)} \geqslant 0,\ \ldots,\ \nu_{k_n}^{(n)} \geqslant 0 \tag{38}$$

такой, что выполнены условия дополняющей нежёсткости

$$\bar{\nu}^{(n)}\Big(\int_{t_0}^{p}(b(t)-a(t)\varphi_n(t))dt - \|z_0\| + \varepsilon_1\Big) = 0, \tag{39}$$

$$\hat{\nu}^{(n)}\Big(\int_{t_0}^{p}(b(t)-a(t)\varphi_n(t))dt + \|z_0\| - \varepsilon_2\Big) = 0, \tag{40}$$

$$\nu_i^{(n)}\Big(\int_{t_i^{(n)}}^{p}(b(t)-a(t)\varphi_n(t))dt - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2}\Big) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k_n, \tag{41}$$

и условие минимума функции Лагранжа

$$L(\varphi_n(\cdot)) \leq L(\varphi(\cdot)), \quad \forall \varphi(t) \geqslant 0.$$

Минимизируя по $\varphi_n(t) \geqslant 0$ подынтегральное выражение в (37), находим, что

$$2\nu_*^{(n)}\varphi_n(t) = a(t)(\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(t)). \tag{42}$$

Допустим, что $\nu_*^{(n)} = 0$. Так как функция $a(t)$ может обращаться в нуль только на множестве меры нуль, то из формул (36), (38), (42) получим, что все числа (38) равны нулю, что противоречит условию невырожденности множителей Лагранжа.

Пусть $\nu_*^{(n)} = 1$. Тогда из формулы (42) получим равенство

$$\varphi_n(t) = \frac{a(t)}{2}(\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(t)). \tag{43}$$

Покажем, что $\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(p) > 0$. Допустим, что рассматриваемая сумма равна нулю. Тогда из формул (36) и (38) следует, что $\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(t) = 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant p$. Следовательно, $\varphi_n(t) = 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant p$. Подставим эту функцию в последнюю связь (33). Получим неравенство, которое противоречит (25). Из доказанного неравенства и из формулы (36) вытекает, что $\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(t) > 0$ при $t_{k_n}^{(n)} \leqslant t \leqslant p$. Следовательно, учитывая определение числа θ (25), получим, что

$$\int_{t}^{p}(b(r)-a(r)\varphi_n(r))dr - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2} < 0 \ \text{ при } \theta \leqslant t \leqslant p.$$

Зафиксируем число $\tau \in (\theta, p)$. Тогда из условия дополняющей нежёсткости (41) следует, что $\nu_i^{(n)} = 0$ для номеров $i = j, j+1, \ldots, k_n$, где $\theta < t_j^{(n)} < \tau < t_{j+1}^{(n)}$. Поэтому из формулы (35) получим, что $\psi_n(t) = \psi_n(p)$ при $\tau \leqslant t \leqslant p$. Следовательно, учитывая формулу (43), будем иметь

$$\Big(\frac{\bar{\nu}^{(n)} + \hat{\nu}^{(n)} + \psi_n(p)}{2}\Big)\int_{\tau}^{p} a^2(t)dt \leqslant \int_{t_0}^{p}\varphi_n^2(t)dt \leqslant \int_{t_0}^{p}\varphi_*^2(t)dt.$$

Получим, что начиная с какого-то номера все числа $\bar{\nu}^{(n)}$, $\hat{\nu}^{(n)}$ и $\psi_n(p)$ ограничены сверху одним и тем же числом. Согласно второй теореме Хелли [11] из последовательности функций $\psi_n(t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[t_0, p]$ к некоторой функции $\psi(t)$. Из ограниченности последовательностей чисел $\bar{\nu}^{(n)}$, $\hat{\nu}^{(n)}$ следует, что из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Не вводя новых обозначений, считаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \psi(t), \quad \lim_{n\to\infty} \bar{\nu}^{(n)} = \bar{\nu}, \quad \lim_{n\to\infty} \hat{\nu}^{(n)} = \hat{\nu}. \tag{44}$$

Отметим, что функция $\psi(t)$ не убывает, $\psi(t_0) = 0$, $\bar{\nu} \geqslant 0$ и $\hat{\nu} \geqslant 0$. Из формулы (43) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi_*(t). \tag{45}$$

Последовательность функций $a(t)\varphi_n(t)$ ограничена суммируемой на отрезке $[t_0, p]$ функцией $La^2(t)$, где L — некоторое число. Применяя теорему Лебега [11] к неравенствам (33) и учитывая, что диаметр разбиений ω_n стремится к нулю, получим, что предельная функция (45) удовлетворяет связям в задаче (9). Следовательно, функция $\psi(t)$ и числа $\bar{\nu}$, $\hat{\nu}$ (44) удовлетворяют неравенствам (26)–(28). Перейдём к пределам в равенствах (39) и (40). Получим для функции $\psi(t)$ и чисел $\bar{\nu}$, $\hat{\nu}$ равенства (30) и (31). Просуммируем равенства (41), тогда, согласно формуле (36), получим, что

$$\int_{t_0}^{p} \psi_n(t)(b(t) - a(t)\varphi_n(t))dt - \psi_n(p)\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} = 0.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу. Получим, что функция $\psi(t)$ из (44) удовлетворяет равенству (29). □

Список литературы

1. **Красовский, Н. Н.** Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. — М. : Наука, 1974. — 456 с.
2. **Ухоботов, В. И.** Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца / В. И. Ухоботов // Некоторые задачи динамики и управления : сб. науч. тр. / под ред. В. Д. Батухтина. — Челябинск : Челяб. гос. ун-т, 2005. — С. 108–123.
3. **Ухоботов, В. И.** Однотипные дифференциальные игры с терминальным множеством в форме кольца / В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев // Динамика систем и процессы управления : тр. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, 15–29 сент. 2014 г. — Екатеринбург : Изд-во УМЦ УПИ, 2015. — С. 325–332.
4. **Алеева, С. Р.** Однотипная игра с интегральным ограничением первого игрока / С. Р. Алеева, В. И. Ухоботов // Вестн. Челяб. ун-та. — 1999. — № 1 (4). Сер. 3: Математика. Механика. — С. 16–29.
5. **Алеева, С. Р.** Моделирование гарантированного результата в задачах управления движением с интегральными ограничениями в условиях воздействия помех : дис. канд. …физ.-мат. наук / С. Р. Алеева. — Челябинск : Челяб. гос. ун-т, 2002. — 145 с.
6. **Алеева, С. Р.** Об одной дифференциальной игре с интегральным ограничением / С. Р. Алеева // Математика. Механика. Информатика : материалы Всерос. науч. конф., Челябинск, 19–22 сент. 2006 г. / отв. ред. С. В. Матвеев. — Челябинск : Челяб. гос. ун-т, 2007. — С. 7–13.
7. **Алеева, С. Р.** Гарантированный результат в задаче минимизации расстояния с интегральным ограничением / С. Р. Алеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2012. — № 26 (280). Математика. Механика. Информатика. Вып. 15. — С. 41–48.
8. **Люстерник, А. А.** Элементы функционального анализа / А. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Наука, 1965. — 520 с.

9. **Рисс, Ф.** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — М. : Мир, 1979. — 289 с.
10. **Иоффе, А. Д.** Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
11. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1972. — 496 с.

Поступила в редакцию 09.10.2017
После переработки 02.11.2017

Сведения об авторах

Алеева Сюзанна Рифхатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: sofochka7782@mail.ru.

Березовская Гульназ Раулевна, магистр прикладной математики и информатики, ООО «Челяб-Авто», Челябинск, Россия; e-mail: super2609@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 4. P. 388–400.

DIFFERENTIAL GAME WITH A TARGET SET IN THE RING FORM AND AN INTEGRAL CONSTRAINT OF THE FIRST PLAYER CONTROL

S.R. Aleeva[1,a], **G.R. Berezovskaya**[2,b]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *LLC «Chelyab-Avto», Chelyabinsk, Russia*
[a] *sofochka7782@mail.ru*, [b] *super2609@gmail.com*

One-type game, in which the first player has an integral control constraint, the second player has a geometric constraint, is considered. The goal of the first player is to hit the area in the form of a ring located around the opponent at a fixed moment of time p with the minimum resource reserve. The second player's goal is to avoid this hit. The problem of resource minimization in such a game was solved.

Keywords: *differential game, integral control constraint, geometric control constraint, ring form target set.*

References

1. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p. (In Russ.).
2. **Ukhobotov V.I.** Odnotipnaya differentsial'naya igra s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa [One-type differential game with a terminal set in the form of a ring]. *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya* [Some problems of dynamics and control], collection of scientific papers, ed. V.D. Batukhtin. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2005. Pp. 108–123. (In Russ.).
3. **Ukhobotov V.I., Izmest'yev I.V.** Odnotipnyye differentsial'nyye igry s terminal'nym mnozhestvom v forme kol'tsa [One-type differential games with a terminal set in the form of a ring]. *Dinamika sistem i protsessy upravleniya* [Systems dynamics and control processes. Proceedings of the International Conference, dedicated to the 90th anniversary of the Acad. N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, September 15–29, 2014]. Yekaterinburg, Publishing House of the UIC UPI, 2015. Pp. 325–332. (In Russ.).
4. **Aleeva S.R., Ukhobotov V.I.** Odnotipnaja igra s integral'nym ogranicheniyem pervogo igroka [One-type game with an integral constraint of the first player]. *Vestnik Chelyabinskogo universiteta* [Bulletin of Cheljabinsk University], 1999, no. 1 (4), pp. 16–29. (In Russ.).
5. **Aleeva S.R.** *Modelirovaniye garantirovannogo rezul'tata v zadachakh upravleniya dvizheniyem s integral'nymi ogranicheniyami v usloviyakh vozdeystviya pomekh* [Modelling of the guaranteed result in traffic control problems with integral constraints in the presence of interference effects. PhD thesis]. Cheljabinsk State University. Chelyabinsk, 2002. 145 p. (In Russ.).
6. **Aleeva S.R.** Ob odnoy differentsial'noy igre s integral'nym ogranicheniyem [On a differential game with an integral constraint]. *Matematika. Mehanika. Informatika* [Mathematics. Mechanics. Informatics. Proceedings of the scientific conference, Chelyabinsk, 19–22 September, 2006]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2007. Pp. 7–13. (In Russ.).
7. **Aleeva S.R.** Garantirovannyy rezul'tat v zadache minimizatsii rasstoyaniya s integral'nym ogranicheniyem [Guaranteed results in the problem of the distance minimizing with an integral constraint]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Cheljabinsk State University], 2012, no. 26 (280), pp. 41–48. (In Russ.).

8. **Lyusternik A.A., Sobolev V.I.** *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 520 p. (In Russ.).
9. **Riss F., Sekefalvi-Nad' B.** *Functional analysis.* New York, Ungar Publ., 1955.
10. **Ioffe A.D., Tikhomirov V.M.** *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [The theory of extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russ.).
11. **Kolmogorov A.N., Fomin S.V.** *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the function theory and functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 496 p. (In Russ.).

Accepted article received 09.10.2017
Corrections received 02.11.2017