Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 4. С. 424–433.

УДК 517.926 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17403

ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. О. Мамчуев[1,a], **Т. И. Жабелова**[2,b]

[1] *Институт прикладной математики КБНЦ РАН, Нальчик, Россия*
[2] *Научно-образовательный центр КБНЦ РАН, Нальчик, Россия*
[a] *mamchuev@rambler.ru*, [b] *tanzilyaapp@mail.ru*

Исследуется нелокальная краевая задача для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами. Дробная производная порядка $\alpha \in (0,1]$ понимается в смысле Римана — Лиувилля. Краевые условия связывают следы дробного интеграла от искомой вектор-функции на концах отрезка $[0,l]$. Методом функции Грина получено представление решения, доказана теорема об однозначной разрешимости исследуемой краевой задачи.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений, производные дробного порядка, нелокальная краевая задача, функция Грина.*

Введение

Рассмотрим систему уравнений

$$D_{0x}^{\alpha} u - Au(x) = f(x), \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1}$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана — Лиувилля [1, с. 9], $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ и $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ — соответственно искомая и заданная вектор-функции, A — действительная квадратная матрица порядка n.

В 1954 году J. H. Barrett [2] исследовал начальную задачу для уравнения

$$D_{ax}^{\alpha} y(x) + \lambda y(x) = h(x),$$

$$\lim_{x \to a} D_{ax}^{\alpha - i} y(x) = K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad n - 1 < \mathrm{Re}(\alpha) < n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Системы линейных обыкновенных уравнений дробного порядка впервые были исследованы в работах В. К. Вебера [3–6] и М. И. Иманалиева, В. К. Вебера [7]. В работе [3] в терминах функции Миттаг-Леффлера матричного аргумента было выписано решение задачи Коши для системы уравнений

$$D_{0x}^{\alpha} y(x) = Ay(x), \quad 0 < \alpha \leqslant 2,$$

с постоянной матрицей A. Асимптотическое поведение при $x \to \infty$ различных решений этой системы (в том числе и фундаментальной матрицы) изучено в работах [4] и [7]. Позже В. К. Вебер рассмотрел задачу Коши для неоднородной системы

$$D_{0x}^{\alpha} y(x) = A(x) y(x) + f(x), \quad n - 1 < \alpha \leqslant n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

с непрерывной матрицей-функцией $A(x)$ при $x \geqslant 0$ [5], а в работе [6] построил фундаментальное решение такой системы с постоянной матрицей A в терминах функции Миттаг-Леффлера матричного аргумента. Также в работе [6] приведены примеры некоторых прикладных задач, приводящих к системам уравнений с дробными производными.

А. А. Чикрий и И. И. Матичин в работах [8] и [9], с помощью преобразования Лапласса, получили решения задач Коши для систем уравнений вида (1), с производными Римана — Лиувилля, Герасимова — Капуто и Миллера — Росса. В работах [10] и [11] с помощью матричной функции Миттаг-Леффлера авторы аналитически и численно исследовали решения начальных задач для систем уравнений с дробными производными Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто.

Отметим, что в работах [12] и [13] исследованы краевые задачи для многомерных систем уравнений с частными производными дробного порядка. В работе [14] обращено внимание на то, что в одномерном случае эти результаты совпадают с результатами работы [3].

В работе [15] исследована начальная задача для системы вида (1) с дробными производными Джрбашяна — Нерсесяна. На основе доказанных свойств матричной функции Миттаг-Леффлера было получено общее представление решений исследуемой системы и доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши.

В настоящей работе исследуется нелокальная краевая задача для системы уравнений (1) с краевыми условиями, связывающими следы дробного интеграла от искомой вектор-функции на концах отрезка $[0, l]$. Исследована структура решения краевой задачи, определена и построена соответствующая функция Грина, получено представление решения. Доказаны теорема об однозначной разрешимости исследуемой краевой задачи.

1. Вспомогательные сведения

Оператор D^{ν}_{ax} дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля порядка ν определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D^{\nu}_{ax} g(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\nu)} \int\limits_a^x \frac{g(t)dt}{|x-t|^{\nu+1}}, \quad \nu < 0,$$

при $\nu \geqslant 0$ оператор D^{ν}_{ax} можно определить с помощью рекурсивного соотношения

$$D^{\nu}_{ax} g(x) = \operatorname{sign}(x-a) \frac{d}{dx} D^{\nu-1}_{ax} g(x), \quad \nu \geqslant 0,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Имеют место равенства

$$D^{\nu}_{0x} g(x-t)\eta(x-t) = D^{\nu}_{xt} g(x-t)\eta(x-t), \quad \nu < 0, \tag{2}$$

$$D^{\nu}_{xt} g(x-t) = D^{\nu}_{0z} g(z)\big|_{z=x-t}, \quad \nu < 0, \tag{3}$$

$$D^{\nu}_{lt} g(x-t)\eta(x-t) = D^{\nu}_{0z} g(z)\big|_{z=x-t}, \quad \nu < 1. \tag{4}$$

Регуляризованная дробная производная (производная Герасимова — Капуто) [16; 17] определяется с помощью равенства

$$\partial^{\nu}_{ax} g(x) = \operatorname{sign}^n(x-a) D^{\nu-n}_{ax} g^{(n)}(x), \quad n-1 < \nu \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следующая формула [1, с. 34]

$$\int_a^b f(t) D_{at}^{\alpha} g(t) dt = \int_a^b g(t) D_{bt}^{\alpha} f(t) dt, \quad \nu < 0, \tag{5}$$

известна как формула дробного интегрирования по частям.

Известно [3] (см. также [9; 15]), что решение задачи Коши

$$\lim_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u^0, \quad u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0),$$

для системы (1) имеет вид

$$u(x) = G_0(x) u^0 + \int_0^x G_0(x-t) f(t) dt,$$

где $G_0(x) = x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(Ax^{\alpha})$ — фундаментальное решение системы (1),

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

есть функция Миттаг-Леффлера [18].

Справедливы следующие свойства функции Миттаг-Леффлера матричного аргумента [15]:

$$E_{\alpha,\beta}(Az) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} I + Az E_{\alpha,\beta+\alpha}(Az); \tag{6}$$

$$D_{0x}^{\mu} x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = x^{\beta-\mu-1} E_{\alpha,\beta-\mu}(Ax^{\alpha}), \quad \beta - \mu > 0; \tag{7}$$

$$\left(D_{0x}^{\alpha} - A\right) x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} I, \quad \beta - \alpha \geqslant 0; \tag{8}$$

$$\lim_{x \to 0} x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \beta > 1, \\ I, & \beta = 1, \end{cases} \tag{9}$$

где I — единичная матрица.

2. Постановка задачи и представление решений

Задача 1. *Найти решение системы* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$M \lim_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) + N \lim_{x \to l} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u^*, \quad u^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*), \tag{10}$$

где M и N — заданные постоянные квадратные матрицы порядка n, u^* — заданный постоянный вектор.

Определение 1. *Регулярным решением системы* (1) будем называть функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) в интервале $(0, l)$, такую, что $D_{0x}^{\alpha-1} u(x) \in C[0, l] \cup C^1(0, l)$, $D_{0x}^{\alpha-1} u(x) \in L(0, l)$.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in L(0, l)$, функция $Z(x, t)$, определённая в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < l\}$, такова, что:*

1) $D_{0x}^{\alpha-1} Z(x, t) \in C\left(\overline{\Omega} \setminus \{x = t\}\right)$, $\frac{\partial}{\partial t} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x, t) \in L(0, l)$, $x \in (0, l)$;

2) *функция* $Z(x,t)$ *является решением уравнения*

$$\partial_{lt}^{\alpha} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) - D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) A = 0; \tag{11}$$

3) *при* $x = t$ *функция* $D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t)$ *имеет разрыв:*

$$\lim_{t \to x-0} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) - \lim_{t \to x+0} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) = I. \tag{12}$$

Тогда всякое регулярное решение системы (1) *представимо в виде*

$$u(x) = Z(x,0) D_{00}^{\alpha-1} u - Z(x,l) D_{0l}^{\alpha-1} u + \int\limits_0^l Z(x,t) f(t) dt, \tag{13}$$

где $D_{00}^{\alpha-1} u = \lim\limits_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x)$, $D_{0l}^{\alpha-1} u = \lim\limits_{x \to l} D_{0x}^{\alpha-1} u(x)$.

Доказательство. Умножая обе части уравнения (1) на $D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t)$ и интегрируя его на отрезке $[0, l]$, получим

$$\int\limits_0^l D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) D_{0t}^{\alpha} u(t) dt - \int\limits_0^l D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) A u(t) dt = \int\limits_0^l D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) f(t) dt. \tag{14}$$

Преобразуя первое слагаемое в левой части (14) с использованием форулы интегрирования по частям (5), получим

$$\left(\int\limits_0^x + \int\limits_x^l \right) D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) \frac{d}{dt} D_{0t}^{\alpha-1} u(t) dt = D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) D_{0t}^{\alpha-1} u(t) \Big|_{t=0}^{t=x-} +$$

$$+ D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) D_{0t}^{\alpha-1} u(t) \Big|_{t=x+}^{t=l} - \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) D_{0t}^{\alpha-1} u(t) dt =$$

$$= \left[\lim_{t \to x-0} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) - \lim_{t \to x+0} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) \right] D_{0x}^{\alpha-1} u(x) -$$

$$- D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,0) D_{00}^{\alpha-1} u + D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,l) D_{0l}^{\alpha-1} u - \int\limits_0^l \partial_{lt}^{\alpha} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) u(t) dt.$$

Из последнего равенства с учётом (14) и (12) следует, что

$$D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = D_{0x}^{\alpha-1} \left[Z(x,0) D_{00}^{\alpha-1} u - Z(x,l) D_{0l}^{\alpha-1} u \right] -$$

$$- \int\limits_0^l \left[\partial_{lt}^{\alpha} D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) - D_{0x}^{\alpha-1} Z(x,t) A \right] u(t) dt + D_{0x}^{\alpha-1} \int\limits_0^l Z(x,t) f(t) dt. \tag{15}$$

Действуя на обе части равенства (15) оператором $D_{0x}^{1-\alpha}$ и принимая во внимание (11), приходим к равенству (13). $\square$

3. Функция Грина

Определение 2. Функцию $Z(x,t)$, удовлетворяющую условиям 1)–3) теоремы 1, будем называть *функцией Грина краевой задачи* 1, если

$$M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t) + N\lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t) = 0, \quad \forall t\in(0,l).$$

Обозначим $K = M + ND_{0l}^{\alpha-1}G_0$, $D_{0l}^{\alpha-1}G_0 = \lim\limits_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1}G_0(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* $\det(M + ND_{0l}^{\alpha-1}G_0) \neq 0$, *тогда функция*

$$G(x,t) = G_0(x-t)\eta(x-t) - G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t),$$

где $\eta(x)$ *— функция Хевисайда, есть функция Грина краевой задачи* 1.

Доказательство. 1. В силу формулы (2) получим

$$D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = D_{xt}^{\alpha-1}G_0(x-t)\eta(x-t) - D_{0x}^{\alpha-1}G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t). \tag{16}$$

Из (16) следует, что $G(x,t)$ удовлетворяет условию 1).

2. Используя формулы (3), (6) и (7), получим

$$\begin{aligned}\partial_{lt}^{\alpha}D_{xt}^{\alpha-1}G_0(x-t)\eta(x-t) &= \partial_{xt}^{\alpha}E_{\alpha,1}(A(x-t)^{\alpha})\eta(x-t) = \\ &= D_{xt}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial t}\left[I + A(x-t)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(A(x-t)^{\alpha})\right]\eta(x-t) = \\ &= -D_{xt}^{\alpha-1}A(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(x-t)^{\alpha})\eta(x-t) = \\ &= AE_{\alpha,1}(A(x-t)^{\alpha})\eta(x-t) = D_{0x}^{\alpha-1}G_0(x-t)\eta(x-t)A.\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично с помощью формул (4), (6) и (7) получим

$$\partial_{lt}^{\alpha}D_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) = D_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t)A. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что

$$D_{lt}^{\alpha}D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) - D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t)A = 0. \tag{19}$$

3. Из (16) следуют соотношения

$$\lim_{t\to x-0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = E - G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t),$$

$$\lim_{t\to x+0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = -G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t),$$

которые, в свою очередь, дают равенство

$$\lim_{t\to x-0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) - \lim_{t\to x+0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = E. \tag{20}$$

4. Из равенства (16) с учётом (7) и (9) получим

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = -K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t),$$

$$\lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = D_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) - K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t).$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$\begin{gathered}M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) + N\lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = \\ = ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) - (M+NG_0(l))(M+NG_0(l))^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) = \\ = ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) - ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t) = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Из равенств (19)–(21) следует справедливость теоремы 2. □

4. Теорема существования и единственности

Теорема 3. *Пусть* $\det(M + ND_{0l}^{\alpha-1}G_0) \neq 0$, $f(x) \in C(0,l) \cup L(0,l)$. *Тогда существует единственное регулярное решение задачи* 1. *Решение имеет вид*

$$u(x) = G_0(x)K^{-1}u^* + \int\limits_0^l G(x,t)f(t)dt. \tag{22}$$

Доказательство. Заметим, что

$$G(x,0) = G_0(x)K^{-1}\left[K - ND_{ll}^{\alpha-1}G_0\right] = G_0(x)K^{-1}M, \quad G(x,l) = -G_0(x)K^{-1}N.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$G(x,0)D_{00}^{\alpha-1}u - G(x,l)D_{0l}^{\alpha-1}u = G_0(x)K^{-1}MD_{00}^{\alpha-1}u - G_0(x)K^{-1}ND_{0l}^{\alpha-1}u =$$

$$= G_0(x)K^{-1}\left[MD_{00}^{\alpha-1}u + ND_{0l}^{\alpha-1}\right] = G_0(x)K^{-1}u^*. \tag{23}$$

Таким образом, пользуясь равенствами (15) и (23), заключаем, что любое регулярное решение задачи 1 представимо в виде (22), из чего следует его единственность.

Покажем, что (22) является решением задачи 1. Обозначим первое и второе слагаемые в правой части (22) $u_*(x)$ и $u_f(x)$ соответственно. Из (8) следует

$$D_{0x}^{\alpha}u_*(x) = Au_*(x). \tag{24}$$

Функцию $u_f(x)$ можно записать в виде

$$u_f(x) = \int\limits_0^x G_0(x-t)f(t)dt - G_0(x)K^{-1}N\int\limits_0^l D_{lt}^{\alpha-1}G_0(x-t)f(t)dt = u_f^1(x) + u_f^2(x).$$

Пользуясь равенствами (6) и (7), получим

$$D_{0x}^{\alpha}u_f^1(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x D_{xt}^{\alpha-1}G_0(x-t)f(t)dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \left[I + A(x-t)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(A(x-t)^{\alpha-1}\right)\right]f(t)dt =$$

$$= A\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(A(x-t)^{\alpha}\right)f(t)dt + f(x) = Au_f^1(x) + f(x). \tag{25}$$

В силу равенства (8) имеем

$$D_{0x}^{\alpha}u_f^2(x) = Au_f^2(x). \tag{26}$$

Из (24)–(26) следует, что функция $u(x)$ является решением уравнения (1).

Покажем, что $u(x)$ удовлетворяет условию (10). Нетрудно заметить, что

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}u_*(x) = K^{-1}u^*, \quad \lim_{x\to l}D_{0x}^{\alpha-1}u_*(x) = D_{0l}^{\alpha-1}G_0K^{-1}u^*,$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) = \int\limits_0^l \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t) f(t)dt, \ \lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) = \int\limits_0^l \lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t) f(t)dt.$$

Из последних равенств с учётом (21) получим, что

$$M \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_*(x) + N \lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1} u_*(x) = \left(M + N D_{0l}^{\alpha-1} G_0\right) K^{-1} u^* = u^*, \qquad (27)$$

$$M \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) + N \lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) =$$

$$= \int\limits_0^l \left[M \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t) + N \lim_{x\to l} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t) \right] f(t)dt = 0. \qquad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию (10). Таким образом, доказаны существование и единственность решения задачи 1. □

Список литературы

1. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М. : Физматлит, 2003.
2. **Barrett J. H.** Differential equations of non-integer order // Canadian Journal of Mathematics. 1954. Vol. 6. P. 529–541.
3. **Вебер В. К.** Структура общего решения системы $y^{(\alpha)} = Ay$, $0 < \alpha \leqslant 1$ // Тр. Киргиз. ун-та. Сер. мат. наук. 1976. № 11. С. 26–32.
4. **Вебер В. К.** Асимптотическое поведение решений линейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. 1983. Вып. 16. С. 119–125.
5. **Вебер В. К.** К общей теории линейных систем с дробными производными // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. 1985. Вып. 18. С. 301–305.
6. **Вебер В. К.** Линейные уравнения с дробными производными и постоянными коэффициентами в пространствах обобщённых функций // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. 1985. Вып. 18. С. 306–312.
7. **Иманалиев М. И., Вебер В. К.** Об одном обобщении функции типа Миттаг-Леффлера и его применении // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. 1980. Вып. 13. С. 49–59.
8. **Чикрий А. А., Матичин И. И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Докл. Нац. акад. наук Украины. 2007. № 1. P. 53–55.
9. **Chikriy A. A., Matichin I. I.** Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann — Liouville, Caputo, and Miller — Ross // Journal of Automation and Information Sciences. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1–11.
10. **Matichin I., Onyshchenko V.** Optimal control of linear systems with fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. Vol. 21, no. 1. P. 134–150.
11. **Matichin I., Onyshchenko V.** Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. 2018. Vol. 66, no. 4. P. 495–500.
12. **Мамчуев М. О.** Краевая задача для системы многомерных дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. 2008. Т. 8, № 2 (67). С. 164–175.
13. **Мамчуев М. О.** Краевая задача для многомерной системы уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16, № 2 (67). С. 732–747.

14. **Мамчуев М. О.** Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик : Изд-во КБНЦ РАН, 2013.
15. **Mamchuev M. O.** Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order // Mathematics. 2020. Vol. 8, iss. 9:1475.
16. **Герасимов А. Н.** Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Приклад. математика и механика. 1948. Т. 12. С. 251–260.
17. **Caputo M.** Elasticita e Dissipazione. Bologna : Zanichelli, 1969.
18. **Джрбашян М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966.

Поступила в редакцию 23.08.2022.
После переработки 24.09.2022.

Сведения об авторах

Мамчуев Мурат Османович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; e-mail: mamchuev@rambler.ru.

Жабелова Танзиля Исмаиловна, аспирант Научно-образовательного центра КБНЦ РАН, Нальчик, Россия; e-mail: tanzilyaapp@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 4. P. 424–433.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17403

GREEN'S FUNCTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL FRACTIONAL ORDER EQUATIONS

M.O. Mamchuev[1,a], **T.I. Zhabelova**[2,b]

[1]*Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Nalchik, Russia*
[2]*Scientific and Educational Center of the KBSC RAS, Nalchik, Russia*
[a]*mamchuev@rambler.ru,* [b]*tanzilyaapp@mail.ru*

The paper investigates a nonlocal boundary value problem for a linear system of fractional order ordinary differential equations with constant coefficients. The fractional derivative of order $\alpha \in (0,1]$ is understood in the Riemann — Liouville sense. The boundary conditions connect the traces of the fractional integral of the desired vector function at the ends of the segment $[0,l]$. Using the Green's function method, a representation of the solution is obtained, and a theorem on the unique solvability of the boundary value problem under study is proved.

Keywords: *system of ordinary differential equations, fractional derivative, nonlocal boundary value problem, Green's function.*

References

1. **Nakhushev A.M.** *Drobnoye ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. (In Russ.).
2. **Barrett J.H.** Differential equations of non-integer order. *Canadian Journal of Mathematics*, 1954, vol. 6, pp. 529–541.
3. **Veber V.K.** Struktura obshchego resheniya sistemy $y^{(\alpha)} = Ay$, $0 < \alpha \leqslant 1$ [The structure of a general solution of the system $y^{(\alpha)} = Ay$, $0 < \alpha \leqslant 1$]. *Trudy Kirgizskogo Universiteta. Ser. Matematicheskikh Nauk* [Proceedings of the Kyrgyz University. Series of mathematical sciences], 1976, no. 11, pp. 26–32. (In Russ.).
4. **Veber V.K.** Asimptoticheskoye povedeniye resheniy lineynoy sistemy differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Asymptotic behavior of solutions of a linear system of fractional order differential equations]. *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii* [Research on integro-differential equations in Kyrgyzstan], 1983, no. 16, pp. 119–125. (In Russ.).
5. **Veber V.K.** K obshchey teorii lineynykh sistem s drobnymi proizvodnymi [On the general theory of linear systems with fractional derivatives]. *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii* [Research on integro-differential equations in Kyrgyzstan], 1985, no. 18, pp. 301–305. (In Russ.).
6. **Veber V.K.** Lineinye uravneniya s drobnymi proizvodnymi i postoyannymi koeffitsientami v prostranstvakh obobshchyonnykh funktsiy [Linear equations with fractional derivatives and constant coefficients in spaces of generalized functions]. *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii* [Research on integro-differential equations in Kyrgyzstan], 1985, no. 18, pp. 306–312. (In Russ.).
7. **Imanaliev M.I., Veber V.K.** Ob odnom obobshchenii funktsii tipa Mittag-Lefflera i ego primenenii [On a generalization of a function of Mittag-Leffler type and its application]. *Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii* [Research on integro-differential equations in Kyrgyzstan], 1980, no. 13, pp. 49–59. (In Russ.).

8. **Chikriy A.A., Matichin I.I.** Ob analoge formuly Koshi dlya lineynyh sistem proizvol'nogo drobnogo poryadka [On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order]. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 2007, vol. 1, pp. 53–55. (In Russ.).
9. **Chikriy A.A., Matichin I.I.** Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann — Liouville, Caputo, and Miller — Ross. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2008, vol. 40, no. 6, pp. 1–11.
10. **Matichin I., Onyshchenko V.** Optimal control of linear systems with fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 134–150.
11. **Matichin I., Onyshchenko V.** Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 2018, vol. 66, no. 4, pp. 495–500.
12. **Mamchuev M.O.** Krayevaya zadacha dlya sistemy mnogomernykh differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Boundary value problem for a system of multidimensional differential equations of fractional order]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya* [Bulletin of the Samara State University. Natural Science Series], 2008, vol. 8, no. 2 (67), pp. 164–175. (In Russ.).
13. **Mamchuev M.O.** Boundary value problem for a multidimensional system of equations with Riemann — Liouville fractional derivatives. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2019, vol. 16, pp. 732–747.
14. **Mamchuev M.O.** *Krayevye zadachi dlya uravneniy i sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka* [Boundary value problems for equations and systems of equations with partial derivatives of fractional order]. Nal'chik, Kabardino-Balkar Scientific Center, 2013. (In Russ.).
15. **Mamchuev M.O.** Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 9:1475.
16. **Gerasimov A.N.** Obobshcheniye lineynyh zakonov deformirovaniya i yego primeneniye k zadacham vnutrennego treniya [Generalization of linear deformation laws and its application to problems of internal friction]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1948, vol. 12, pp. 251–260. (In Russ.).
17. **Caputo M.** *Elasticita e Dissipazione*. Bologna, Zanichelli, 1969. (In Italian).
18. **Dzhrbashyan M.M.** *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral transformations and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1966. (In Russ.).

Article received 23.08.2022.
Corrections received 24.09.2022.