

УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТЕПЕННОГО РЯДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОНОДРОМИИ В СИСТЕМЕ MAPLE

Н. Б. Медведева^a, М. А. Сосновская^b

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

^amedv@csu.ru; ^bmariya.sosnovskaya.1994@mail.ru

Предлагается алгоритм компьютерного вычисления в системе Maple коэффициентов асимптотического ряда преобразования монодромии монодромной особой точки векторного поля на плоскости в случае, когда его диаграмма Ньютона состоит из одного невырожденного ребра. Коэффициенты асимптотического ряда выражаются через несобственные интегралы от функций, которые строятся по разложению Тейлора векторного поля в особой точке. Ввиду сложности подынтегральных функций вычисление этих интегралов в системе Maple невозможно. В работе получено выражение этих коэффициентов через решение некоторых дифференциальных уравнений. Написана программа в среде Maple, которая вычисляет эти коэффициенты. Приводится пример работы программы.

Ключевые слова: монодромная особая точка, фокус, центр, преобразование монодромии, диаграмма Ньютона, Maple.

Введение

Особая точка аналитического векторного поля на вещественной плоскости является *монодромной*, если для неё определено преобразование монодромии $\Delta^*(\rho)$, переводящее некоторую кривую с вершиной в особой точке (полутрансверсаль) в себя вдоль траекторий векторного поля. Точное определение монодромной особой точки и преобразования монодромии даны в [1]. Монодромная особая точка аналитического векторного поля является либо фокусом, либо центром.

Пусть ρ — параметр на полутрансверсали с вершиной в монодромной особой точке, $\Delta^*(\rho)$ — преобразование монодромии. Если $\Delta^*(\rho) \equiv \rho$, то особая точка — центр. Доказано [1; 2], что при подходящем выборе полутрансверсали $\Delta^*(\rho) = C_1\rho + o(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$, $C_1 > 0$. Неравенство $\ln C_1 \neq 0$ является достаточным условием того, чтобы особая точка была фокусом.

В работе [3] вычислена величина $\ln C_1$ для монодромной особой точки произвольного аналитического векторного поля. Ответ формулируется в терминах диаграмм Ньютона векторных полей, возникающих в процессе раздутия особенностей.

В работах [4–6] вычислен второй член асимптотики преобразования монодромии векторного поля, имеющего диаграмму Ньютона, состоящую из двух рёбер при различных ограничениях на векторное поле. Алгоритм построения формул для коэффициентов асимптотического разложения преобразования монодромии в случае, когда диаграмма Ньютона векторного поля состоит более чем из одного

ребра, восходит к Дюлаку [7; 8] и состоит в следующем: делается раздутие особенности, при этом особая точка заменяется сложным циклом, содержащим седловые особые точки, далее преобразование монодромии разбивается в композицию отображений соответствия для седловых особых точек и участков сложного цикла, не содержащих особых точек. Исследование седловых особых точек довольно непросто и включает построение нормальных форм и первых интегралов в окрестности седла. С целью получения формул для коэффициентов осуществляется предельный переход при стремлении к нулю малых параметров, ограничивающих окрестность седла, что является технически сложной задачей. Поэтому, как уже было отмечено в [9], актуальной задачей в наше время является построение алгоритма вычисления коэффициентов асимптотического разложения преобразования монодромии (отображений соответствия), не содержащего операции предельного перехода, и достаточно простого для реализации на компьютере.

Преобразование монодромии $\Delta^*(\rho)$ может быть разложено в композицию отображений соответствия для четырёх квадрантов в окрестности особой точки.

В [9] выдвинута следующая *гипотеза*: каждому ребру диаграммы Ньютона можно сопоставить некоторый ряд, коэффициенты которого вычисляются рекуррентно и выражаются через интегралы Адамара [10; 11] от функций, выражаемых через компоненты разложения векторного поля на квазиоднородные многочлены, а каждой вершине — некоторое простое отображение, например степенное, таким образом, что коэффициенты формального ряда композиции этих формальных отображений будут совпадать с коэффициентами асимптотического ряда отображения соответствия для первого квадранта.

Эта гипотеза доказана в статье [11] для случая одного ребра диаграммы Ньютона и для случая двух рёбер на уровне первых двух коэффициентов асимптотического разложения преобразования монодромии. Асимптотическое разложение преобразования монодромии получается как композиция асимптотических разложений отображений соответствия для всех четырёх квадрантов.

Случай, когда диаграмма Ньютона состоит из одного ребра, рассматривался в работах многих авторов, например в [12] и [13] предлагаются алгоритмы вычисления коэффициентов асимптотического ряда преобразования монодромии (в данном случае сходящегося) с помощью методов раздутия особенностей, специфических для случая одного ребра диаграммы Ньютона. В статье [11] преобразование монодромии для случая одного ребра исследуется с помощью другого метода раздутия, связанного с диаграммами Ньютона, который является удобным для исследования монодромных особых точек с любыми диаграммами Ньютона и любыми вырождениями [14; 15]. Мы уделяем особое внимание этому случаю, так как он является базовым для общего случая (с многими рёбрами): ряды, соответствующие данному ребру диаграммы Ньютона, о которых говорится в формулировке гипотезы, строятся так, как если бы данное ребро было единственным.

В случае одного ребра диаграммы Ньютона в статье [11] получены формулы для всех коэффициентов степенного ряда отображения соответствия в первом квадранте в виде интегралов Адамара и несобственных интегралов от некоторых функций, которые легко вычисляются на компьютере через коэффициенты тейлоровского разложения векторного поля. Попытка осуществить компьютерное вычисление в системе Maple коэффициентов этого ряда по данным формулам потерпела неудачу в силу сложности подынтегральных функций. Удалось вычислить только первый и второй коэффициенты, да и то лишь в достаточно простых случаях. Поэтому в данной статье предлагается алгоритм вычисления коэффициентов степенного ряда

отображения соответствия в первом квадранте и преобразования монодромии с помощью решения системы дифференциальных уравнений, позволяющий вычислить в системе Maple несколько десятков коэффициентов за обозримое время. В п. 4 приводится пример работы программы.

1. Диаграмма Ньютона

Дадим некоторые определения, связанные с диаграммой Ньютона [1; 12; 15].

Рассмотрим аналитическое векторное поле V (росток векторного поля) в окрестности точки ноль на плоскости, которое определяет динамическую систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y). \quad (1)$$

Определения

1. Рассмотрим тейлоровские разложения

$$yX(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{ij}x^i y^j, \quad xY(x, y) = \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{ij}x^i y^j. \quad (2)$$

Носителем системы (1), а также соответствующего ей векторного поля V называется множество таких пар (i, j) , что $(a_{ij}, b_{ij}) \neq (0, 0)$.

2. Рассмотрим множество $\bigcup_{(i,j)} \{(i, j) + \mathbf{R}_+^2\}$, где \mathbf{R}_+^2 — положительный квадрант, объединение берётся по всем точкам (i, j) , принадлежащим носителю. Граница выпуклой оболочки этого множества состоит из двух открытых лучей и ломаной, которая может состоять и из одной точки. Эта ломаная называется *диаграммой Ньютона* системы (1), а также соответствующего ей векторного поля V . Звенья ломаной называются *рёбрами* диаграммы Ньютона, а их концы — её *вершинами*.

3. *Показателем ребра* диаграммы Ньютона называется положительное рациональное число, равное тангенсу угла между ребром и осью ординат.

4. Рассмотрим ребро ℓ диаграммы Ньютона системы (1) с показателем $\alpha = m/n$, где m/n — несократимая дробь. Члены разложения (2) сгруппируем таким образом, что

$$yX(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x, y), \quad xY(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x, y),$$

где

$$X_k(x, y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} a_{ij}x^i y^j, \quad Y_k(x, y) = \sum_{ni+mj=k+k_0} b_{ij}x^i y^j -$$

квазиоднородные полиномы степени $k + k_0$ с весами n и m переменных x и y соответственно, $k_0 > 0$. Обозначим $F_k(x, y) = nY_k(x, y) - mX_k(x, y)$.

5. Известно [14], что для любого квазиоднородного полинома $R(x, y)$ с весами n и m переменных x и y (m/n — несократимая дробь) справедливо разложение $R(x, y) = Ax^{s_1}y^{s_2} \prod_i (y^n - b_i x^m)^{k_i}$, где b_i — различные ненулевые комплексные числа, $k_i \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$.

Многочлен вида $y^n - b_i x^m$, $b_i \neq 0$, называется *простым делителем* полинома $R(x, y)$.

6. Ребро ℓ диаграммы Ньютона векторного поля называется *невыврожденным*, если многочлен $F_0(x, y)$ не имеет вещественных простых делителей.

Пусть векторное поле V с монодромной особой точкой $(0, 0)$ имеет диаграмму Ньютона, состоящую из одного невырожденного ребра с показателем m/n (несократимая дробь) и имеющую по одной вершине на каждой координатной оси.

В результате замены $x = z^n, y = z^m$ в системе (1) и деления на некоторую степень z получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{z} &= z(X_0(1, w) + zX_1(1, w) + \dots), \\ \dot{w} &= w(F_0(1, w) + zF_1(1, w) + \dots),\end{aligned}$$

которой соответствует уравнение

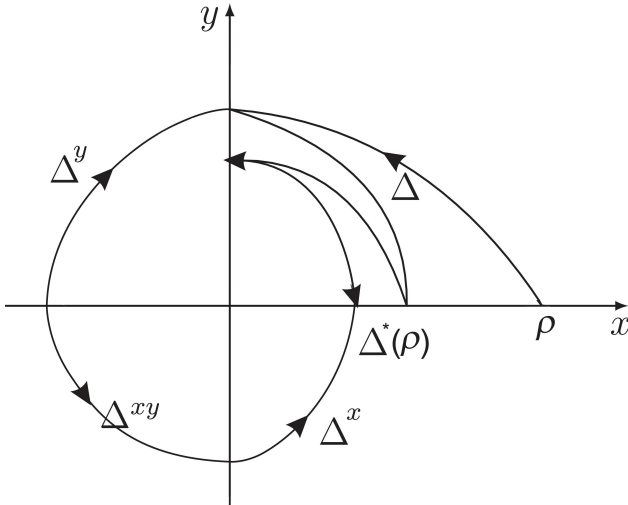
$$\frac{dz}{dw} = \frac{z(X_0(1, w) + zX_1(1, w) + \dots)}{w(F_0(1, w) + zF_1(1, w) + \dots)} = z \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(w)z^k, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_0(w) &= \frac{X_0(1, w)}{wF_0(1, w)}, & \Phi_1(w) &= \frac{F_0(1, w)X_1(1, w) - F_1(1, w)X_0(1, w)}{wF_0^2(1, w)}, \\ \Phi_k(w) &= \frac{P_k(w)}{wF_0(1, w)^{k+1}},\end{aligned}$$

$P_k(w)$ — однородный многочлен степени $k + 1$ с целыми коэффициентами от $X_0(1, w), \dots, X_k(1, w), Y_0(1, w), \dots, Y_k(1, w)$, каждый моном которого содержит по крайней мере одно $X_j(1, w)$, $j \in \{0, \dots, k\}$. Поскольку все $X_j(x, y)$ делятся на y , то $X_0(1, w)$ и все P_k делятся на w , поэтому $\Phi_k(w)$ непрерывны при $w = 0$.

2. Отображения соответствия и преобразование монодромии



Разложение преобразования монодромии
в композицию отображений соответствия

на оси y вдоль траекторий векторного поля V . Помимо векторного поля V (рассматриваемого в первом квадранте плоскости (x, y)) рассмотрим векторные поля V_y, V_x, V_{xy} , полученные в результате отражений плоскости относительно осей y, x , и x, y последовательно. Отображения соответствия для этих векторных полей, аналогичные $\Delta(\rho)$, обозначим $\Delta_y, \Delta_x, \Delta_{xy}$ соответственно (см. рисунок). Тогда преобразование монодромии $\Delta^*(\rho)$ может быть представлено как композиция

$$\Delta^* = \Delta_x^{-1} \circ \Delta_{xy} \circ \Delta_y^{-1} \circ \Delta. \quad (4)$$

В статье [11] получены формулы для коэффициентов асимптотического разложения отображения соответствия $\Delta(\rho)$. Напомним эти формулы.

Пусть $z(w, \rho)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $z(0, \rho) = \rho$. Будем искать его в виде разложения в сходящийся степенной ряд по начальному условию:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(w) \rho^{k+1}, \quad (5)$$

где $C_0(0) = 1$, $C_k(0) = 0$ при $k \geq 1$. Подставляя разложение (5) в уравнение (3) и сравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях ρ получим уравнения относительно $C_k(w)$:

$$\begin{aligned} C'_0(w) &= C_0(w)\Phi_0(w), \\ C'_1(w) &= C_1(w)\Phi_0(w) + \Phi_1(w)C_0^2(w), \\ C'_2(w) &= C_2(w)\Phi_0(w) + \Phi_2(w)C_0^3(w) + 2C_1(w)\Phi_1(w)C_0(w), \\ &\dots \\ C'_k(w) &= C_k(w)\Phi_0(w) + R_k(w), \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_k(w)$ является многочленом от $C_0(w), \dots, C_{k-1}(w), \Phi_1(w), \dots, \Phi_k(w)$ с целыми коэффициентами. Обозначим $\tilde{R}_k(w) = R_k(w)C_0^{-1}(w)$. Функции $\tilde{R}_k(w)$ непрерывны при $w \geq 0$.

В статье [11] доказано, что отображение соответствия в первом квадранте $\Delta(\rho)$, разлагается в сходящийся ряд

$$\Delta(\rho) = c_0 \rho \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho^k \right), \quad (7)$$

где

$$c_0 = \exp \left[\int_0^{\infty} \Phi_0(\xi) d\xi \right], \quad (8)$$

$$c_k = \int_0^{\infty} \tilde{R}_k(\xi) d\xi, \quad k \geq 1, \quad (9)$$

причём под знаком экспоненты стоит интеграл Адамара [10; 11] от функции $\Phi_0(\xi)$. Вычисляя разложения отображений соответствия $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_{xy}$ по формулам (7), (8), (9) и составляя суперпозицию (4), получим разложение в ряд преобразования монодромии. Попытки вычислить коэффициенты c_k по формуле (9) в системе Марле потерпели неудачу в силу сложности подынтегральных функций. Удалось вычислить только коэффициент c_1 , да и то в простых случаях. Поэтому в следующем пункте предлагается способ вычисления коэффициентов c_k через решения некоторых дифференциальных уравнений.

3. Вычисление коэффициентов отображения соответствия через систему дифференциальных уравнений

Положим $F_k(w) = C_k(w)/C_0(w)$ при $k \geq 1$, где $C_k(w)$ являются решениями системы (6) ($k \geq 0$). Тогда

$$F'_k = \frac{C'_k C_0 - C_k C'_0}{C_0^2} = \frac{C_0 R_k}{C_0^2} = \tilde{R}_k.$$

Через $\hat{R}_k(w)$ обозначим результат подстановки выражений $C_i(w) = C_0(w) \cdot F_i(w)$ ($i = 1, \dots, k-1$) в \hat{R}_k . Тогда $\hat{R}_k(w) = \hat{R}_k(w, C_0(w), F_1(w), \dots, F_{k-1}(w))$ является многочленом от C_0, F_1, \dots, F_{k-1} с коэффициентами, которые являются рациональными функциями от w .

Рассмотрим при $w \in [0, 1]$ систему дифференциальных уравнений

$$C_0'(w) = C_0(w)\Phi_0(w), \quad F_k'(w) = \hat{R}_k(w), \quad k \geq 1, \quad (10)$$

с начальными условиями $C_0(0) = 1, F_k(0) = 0$. Положим

$$\Psi_0(x) = \Phi_0\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad \Psi(x) = \Psi_0(x) - \frac{1}{mx}, \quad B_0(x) = C_0\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$T_k(x) = \hat{R}_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad k \geq 1, \quad E_k(x) = F_k\left(\frac{1}{x}\right).$$

Тогда B_0 и E_k удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$B_0'(x) = B_0(x) \cdot \Psi_0(x), \quad E_k'(x) = T_k(x), \quad k \geq 1, \quad (11)$$

с начальными условиями $B_0(1) = C_0(1), E_k(1) = F_k(1)$, где

$$T_k(x) = \hat{R}_k\left(\frac{1}{x}, B_0(x), E_1(x), \dots, E_{k-1}(x)\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Кроме того, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$E_0'(x) = \Psi(x)E_0(x) \quad (12)$$

с начальным условием $E_0(1) = C_0(1) = \exp \int_0^1 \Phi_0(w)dw$. Коэффициенты c_k выражаются через решения систем (10), (11) и дифференциального уравнения (12).

Теорема 1. *Отображение соответствия в первом квадранте $\Delta(\rho)$ разлагается в сходящийся ряд (7), где $c_k = E_k(0)$, $k \geq 0$.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение для c_0 . В [11] показано, что

$$\ln c_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1/\varepsilon} \Phi_0(\xi) d\xi - \frac{1}{m} \ln \varepsilon \right),$$

то есть $\ln c_0$ совпадает с интегралом Адамара от функции $\Phi_0(\xi)$ [10; 11]. Отсюда

$$\begin{aligned} \ln c_0 &= \int_0^1 \Phi_0(\xi) d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{1/\varepsilon} \left(\Phi_0(\xi) + \frac{1}{m\xi} \right) d\xi = \\ &= \int_0^1 \Phi_0(\xi) d\xi + \int_1^{+\infty} \left(\Phi_0(\xi) + \frac{1}{m\xi} \right) d\xi = \ln C_0(1) + \int_1^0 \Psi(x) dx. \end{aligned}$$

Очевидно, что $c_0 = E_0(0)$, поскольку

$$E_0(x) = C_0(1) \exp \int_1^x \Psi(\xi) d\xi.$$

Докажем формулу для c_k при $k \geq 1$. Разобьём интеграл (9) в сумму двух интегралов:

$$c_k = \int_0^1 \tilde{R}_k(\xi) d\xi + \int_1^{+\infty} \tilde{R}_k(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (6), получаем

$$C_0(w) = \exp \int_0^w \Phi_0(\xi) d\xi, \quad C_k(w) = C_0(w) \int_0^w \tilde{R}_k(\xi) d\xi.$$

Из системы (10) следует, что

$$\int_0^1 \tilde{R}_k(\xi) d\xi = F_k(1). \quad (14)$$

Вернёмся ко второму интегралу в формуле (13):

$$\int_1^{+\infty} \tilde{R}_k(\xi) d\xi = \int_1^0 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \tilde{R}_k\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^0 T_k(x) dx = E_k(0) - F_k(1). \quad (15)$$

В итоге из (13), (14) и (15) получаем, что $c_k = E_k(0)$. Теорема доказана. \square

4. Пример

Рассмотрим полиномиальное векторное поле, задающее систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y\dot{x} &= 2x^6y - 20x^7y + 9x^5y^2 + x^4y^2 - 7x^3y^3 - x^2y^3 + 5xy^4 + 10y^4, \\ x\dot{y} &= 8x^9 - 400x^8 + 8x^7y + 144x^6y + 6x^5y^2 - 58x^4y^2 - x^3y^3 + 18x^2y^3 - 9xy^4. \end{aligned}$$

Диаграмма Ньютона данного векторного поля состоит из одного ребра с показателем 2, координаты концов ребра — $(0, 4)$ и $(8, 0)$. Для данного векторного поля многочлен F_0 равен $F_0(x, y) = -20(5x^4 + 2x^2y + y^2)(4x^4 - 3x^2y + y^2)$ и, очевидно, не имеет вещественных простых делителей, то есть единственное ребро является невырожденным.

Уравнение (3) в данном примере имеет вид

$$\frac{dz}{dw} = \frac{-z(5w^3z + 10w^3 - 7w^2z - w^2 + 9wz + w - 20z + 2)}{(19w^4z + 20w^4 - 13w^3z - 20w^3 + 12w^2z + 60w^2 - 48wz - 140w - 8z + 400)}$$

или после разложения по степеням z

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= -\frac{1}{20} \frac{(10w^3 - w^2 + w + 2)z}{(w^4 - w^3 + 3w^2 - 7w + 20)} + \\ &+ \frac{1}{400} \frac{(90w^7 + 91w^6 - 468w^5 + 1233w^4 - 3966w^3 + 5244w^2 - 6504w + 7984)z^2}{(w^4 - w^3 + 3w^2 - 7w + 20)^2} - \\ &- \frac{1}{8000} \frac{(90w^7 + 91w^6 - 468w^5 + 1233w^4 - 3966w^3 + 5244w^2 - 6504w + 7984)}{(w^4 - w^3 + 3w^2 - 7w + 20)^3} \times \end{aligned}$$

$$\times (19w^4 - 13w^3 + 12w^2 - 48w - 8)z^3 + O(z^4).$$

Подставляя $z = \sum_{k=0} C_k(w)\rho^{k+1}$ в это уравнение, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ρ , затем делая подстановку $C_i(w) = F_i(w)C_0(w)$, $i = 1, 2$, получаем систему уравнений

$$C_0'(w) = \frac{(10w^3 - w^2 + w + 2)C_0(w)}{(-20w^4 + 20w^3 - 60w^2 + 140w - 400)},$$

$$F_1'(w) = \frac{(90w^7 + 91w^6 - 468w^5 + 1233w^4 - 3966w^3 + 5244w^2 - 6504w + 7984)C_0(w)}{400(w^2 - 3w + 4)^2(w^2 + 2w + 5)^2},$$

$$F_2'(w) = \frac{1}{8000(w^2 - 3w + 4)^3(w^2 + 2w + 5)^3} (90w^7 + 91w^6 - 468w^5 + 1233w^4 - 3966w^3 + 5244w^2 - 6504w + 7984)C_0(w) \cdot (40F_1(w)w^4 - 19C_0(w)w^4 + 13C_0(w)w^3 - 40F_1(w)w^3 - 12C_0(w)w^2 + 120F_1(w)w^2 + 48C_0(w)w - 280F_1(w)w + 8C_0(w) + 800F_1(w)).$$

Решая эту систему с начальными условиями $C_0(0) = 1$, $F_1(0) = 0$, $F_2(0) = 0$, получаем

$$C_0(1) = 0.986196009166689, \quad F_1(1) = -0.045811970619766246, \\ F_2(1) = 0.005679907328726587.$$

Система уравнений (11) в данном примере имеет вид

$$B_0'(x) = \frac{1}{20} \frac{B_0(x)(2x^3 + x^2 - x + 10)}{x(20x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x + 1)},$$

$$E_1'(x) = \frac{-(7984x^7 - 6504x^6 + 5244x^5 - 3966x^4 + 1233x^3 - 468x^2 + 91x + 90)B_0(x)}{400x(4x^2 - 3x + 1)^2(5x^2 + 2x + 1)^2},$$

$$E_2'(x) = \frac{-1}{8000x(4x^2 - 3x + 1)^3(5x^2 + 2x + 1)^3} (800E_1(x)x^4 + 8B_0(x)x^4 - 280E_1(x)x^3 + 48B_0(x)x^3 + 120E_1(x)x^2 - 12x^2B_0(x) + -40E_1(x)x + 13B_0(x)x + 40E_1(x) - 19B_0(x)) \times \\ \times (7984x^7 - 6504x^6 + 5244x^5 - 3966x^4 + 1233x^3 - 468x^2 + 91x + 90)B_0(x).$$

Решая её с начальными условиями

$$B_0(1) = C_0(1) = 0.986196009166689, \quad E_1(1) = F_1(1) = -0.045811970619766246, \\ E_2(1) = F_2(1) = 0.005679907328726587,$$

получаем $c_1 = E_1(0) = -0.4800726331523877$, $c_2 = E_2(0) = 0.08526273265389325$. Для нахождения c_0 составим уравнение (12):

$$E_0'(x) = -\frac{1}{20} \frac{E_0(x)(200x^3 - 72x^2 + 29x - 9)}{(4x^2 - 3x + 1)(5x^2 + 2x + 1)}$$

с начальным условием $E_0(1) = C_0(1) = 0.986196009166689$. Решая его, находим $c_0 = E_0(0) = 1.19814534412751$.

Найдя коэффициенты c_k , составляем разложение отображения соответствия Δ для первого квадранта:

$$\Delta = c_0\rho \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} c_k\rho^k \right) + O(\rho^{N+1}).$$

Приведём результат вычисления разложения Δ для $N = 20$, оставляя 6 значащих цифр:

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = & 1.19815\rho + 0.575197\rho^2 + 0.102157\rho^3 + 0.00623757\rho^4 + 0.00326775\rho^5 + \\ & + 0.000494051\rho^6 - 0.0000101339\rho^7 + 0.0000587868\rho^8 - 0.00000525073\rho^9 + \\ & + 9.57294 \cdot 10^{-7}\rho^{10} + 0.00000112616\rho^{11} - 4.63040 \cdot 10^{-7}\rho^{12} + 1.55769 \cdot 10^{-7}\rho^{13} - \\ & - 1.41834 \cdot 10^{-8}\rho^{14} - 9.62703 \cdot 10^{-9}\rho^{15} + 7.61322 \cdot 10^{-9}\rho^{16} - 2.77471 \cdot 10^{-9}\rho^{17} + \\ & + 5.40480 \cdot 10^{-10}\rho^{18} + 8.17342 \cdot 10^{-11}\rho^{19} - 1.17066 \cdot 10^{-10}\rho^{20} + O(\rho). \end{aligned}$$

Вычисляя с помощью той же программы разложения для отображений Δ_x , Δ_y и Δ_{xy} , соответствующих отражённым векторным полям, составляем композицию (4) и получаем разложение преобразования монодромии

$$\begin{aligned} \Delta^*(\rho) = & 1.00000\rho + 0.702368\rho^2 + 0.493320\rho^3 + 0.493321\rho^4 + 0.548064\rho^5 + \\ & + 0.631168\rho^6 + 0.735701\rho^7 + 0.830093\rho^8 + 0.851120\rho^9 + 0.658757\rho^{10} - \\ & - 0.0435725\rho^{11} - 1.86250\rho^{12} - 6.01287\rho^{13} - 14.8896\rho^{14} - 33.1608\rho^{15} - \\ & - 69.8515\rho^{16} - 142.302\rho^{17} - 283.679\rho^{18} - 557.198\rho^{19} - 1083.05\rho^{20} + O(\rho^{21}). \end{aligned}$$

Вычисляя корни $(k+1)$ -й степени из $1/|c_k|$, получаем, что радиус сходимости данного ряда приблизительно равен 0.7.

Список литературы

1. **Арнольд, В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения — 1 / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Современ. проблемы математики. Фундам. направления. — 1985. — Т. 1. — С. 7–149.
2. **Медведева, Н. Б.** Главный член преобразования монодромии монодромной особой точки линейен / Н. Б. Медведева // Сиб. мат. журн. — 1992. — Т. 33, № 2. — С. 116–124.
3. **Медведева, Н. Б.** Достаточное условие фокуса для монодромной особой точки / Н. Б. Медведева, Е. В. Мазаева // Тр. Моск. мат. о-ва. — 2002. — Т. 63. — С. 87–114.
4. **Воронин, А. С.** Устойчивость монодромных особых точек с фиксированной диаграммой Ньютона / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Компьютер. науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 34–49.
5. **Воронин, А. С.** Асимптотика преобразования монодромии в случае двух чётных рёбер диаграммы Ньютона / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2011. — № 27 (242). Математика. Механика. Информатика. Вып. 14. — С. 12–26.
6. **Воронин, А. С.** Асимптотика преобразования монодромии в некоторых классах монодромных ростков / А. С. Воронин, Н. Б. Медведева // Изв. РАН. Сер. мат. — 2013. — Т. 77, вып. 2. — С. 35–52.
7. **Дюлак, А.** О предельных циклах / А. Дюлак. — М.: Наука, 1980. — 157 с.
8. **Ильяшенко, Ю. С.** Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений / Ю. С. Ильяшенко // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, вып. 6. — С. 41–78.
9. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости / Н. Б. Медведева // Успехи мат. наук. — 2013. — Т. 68, вып. 5. — С. 147–176.

10. **Адамар, Ж.** Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
11. **Медведева, Н. Б.** Асимптотическое разложение преобразования монодромии / Н. Б. Медведева // Челябин. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 1. — С. 59–72.
12. **Брюно, А. Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. — М. : Наука, 1979. — 254 с.
13. **Варин, В. П.** Отображения последования для некоторых полиномиальных систем дифференциальных уравнений / В. П. Варин // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 7. — С. 2–20.
14. **Березовская, Ф. С.** Асимптотика преобразования монодромии особой точки с фиксированной диаграммой Ньютона / Ф. С. Березовская, Н. Б. Медведева // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1991. — Вып. 15. — С. 156–177.
15. **Медведева, Н. Б.** Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса / Н. Б. Медведева // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 254. — С. 11–100.

Поступила в редакцию 18.05.2017

После переработки 24.06.2017

Сведения об авторах

Медведева Наталия Борисовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: medv@csu.ru.

Сосновская Мария Александровна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariya.sosnovskaya.1994@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 2. P. 181–192.

CALCULATION OF THE POWER SERIES COEFFICIENTS OF A MONODROMY MAP IN THE MAPLE ENVIRONMENT

N.B. Medvedeva^a, M.A. Sosnovskaya^b

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

^amedv@csu.ru; ^bmariya.sosnovskaya.1994@mail.ru.

The article proposes a computer algorithm in Maple for the coefficients calculation of the asymptotic series for the monodromic singular point monodromy transformation of a vector field in the plane, when its Newton diagram consists of one non-degenerate edge. The coefficients of the asymptotic series are expressed in terms of improper integrals for functions, which are based on a Taylor decomposition of the vector field at the singular point. In view of the complexity of the integrands in these integrals their computing in the environment of Maple is impossible. In this paper a method of the calculation of these coefficients using the solving of some differential equations is proposed. The program in the environment of Maple, which calculates these coefficients, is offered. An example of the computing is given.

Keywords: *monodromic singular point, focus, center, monodromy transformation, Newton diagram, Maple.*

References

1. **Arnol'd V.I., Il'yashenko Yu.S.** Obyknovennye differentsial'nye uravneniya — 1. [Ordinary differential equations — 1]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [Results of science and technology. Contemporary problems of mathematics. Fundamental directions], 1985, vol. 1, pp. 7–149. (In Russ.).
2. **Medvedeva N.B.** Principal term of the monodromy transformation of a monodromic singular point is linear. *Siberian Mathematical Journal*, 1992, vol. 33, no. 2, pp. 280–288.
3. **Medvedeva N.B., Mazaeva E.V.** Dostatochnoe uslovie fokusa dlya monodromnoy osoboy tochki [Focus sufficient condition for a monodromic singular point]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Transactions of Moscow Mathematical Society], 2002, vol. 63, pp. 87–114. (In Russ.).
4. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Ustoychivost' monodromnykh osobykh toчек s fiksirovannoy diagrammoy N'yutona [Stability of monodromic singular points with a fixed Newton diagram]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki.* [Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2009, iss. 3, pp. 34–49. (In Russ.).
5. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Asimptotika preobrazovaniya monodromii v sluchaye dvukh chyotnykh ryober diagrammy N'yutona [Asymptotics of the monodromy transformation in the case of two even edges in the Newton diagram]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2011, no. 27, pp. 12–26. (In Russ.).
6. **Voronin A.S., Medvedeva N.B.** Asymptotics of the monodromy transformation in certain classes of monodromy germs. *Izvestiya: Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 253–270.
7. **Dulac H.** Sur les cycles limites. *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 1923, vol. 51, p. 45–188. (In French).
8. **Il'yashenko Yu.S.** Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 1985, vol. 40, no. 6, pp. 1–50.

9. **Medvedeva N.B.** On analytic insolubility of the stability problem on the plane. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 923–950.
10. **Hadamard J.** *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Mineola, Dover Publ., 2003.
11. **Medvedeva N.B.** Asimptoticheskoye razlozheniye preobrazovaniya monodromii [Asymptotic expansion of a monodromy map]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskii zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 1, pp. 59–72. (In Russ.).
12. **Bryuno A.D.** Lokal'nyy metod nelineynogo analiza differentsial'nykh uravneniy [Local method of nonlinear analysis for differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1979. (In Russ.).
13. **Varin V.P.** Poincare map for some polynomial systems of differential equations. *Sbornik: Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 7, pp. 917–934.
14. **Berezovskaya F.S., Medvedeva N.B.** Asimptotika preobrazovaniya monodromii osoboy tochki s fiksirovannoy diagrammoy N'yutona [Monodromy transformation asymptotics of a singular point with a fixed Newton diagram]. *Trudy seminara imeni I.G. Petrovskogo* [Transactions of Petrovskiy workshop], 1991, iss. 15, pp. 156–177. (In Russ.).
15. **Medvedeva N.B.** On the analytic solvability of the problem of distinguishing between center and focus. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 254, no. 1, pp. 7–93.

Accepted article received 18.05.2017

Corrections received 24.06.2017