Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 43–51.

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Ю. А. Крутова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
julia_74rus@mail.ru

Найдена равномерная асимптотика решения начальной задачи для уравнения $\varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x)$, сингулярно зависящего от малого параметра ε. Уравнения такого вида являются уже хорошо изученными, но данное уравнение представляет собой неисследованный случай поведения. Методом согласования построено трёхмасштабное асимптотическое разложение решения, проведено его обоснование методом верхнего и нижнего решений.

Ключевые слова: *асимптотическое разложение, малый параметр, начальная задача, метод согласования, промежуточное разложение.*

Введение

В 1948 г. академиком А. Н. Тихоновым в работе [1] была впервые рассмотрена сингулярная задача вида

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon), \\ u(0) = A, \end{cases}$$

для которой изучено поведение решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. В области определения на функцию $f(x, u, \varepsilon)$ налагалось ограничение $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, 0) \neq 0$, т. е. $f \sim C \cdot u$ при $x \to 0$. Случай, когда $f = O(1)$ при $x \to 0$, является тривиальным.

Позднее академик А. М. Ильин методом согласования [2] рассмотрел более сложный случай [3, гл. 8] с уравнением вида $\varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon)$, где $f \sim x - u^2$ при $x \to 0$. Начиная с этого случая в структуре асимптотического разложения появляется промежуточный слой между внешним и внутренним асимптотическими разложениями. Отметим, что в случае, когда $f \sim x + u^2$ при $x \to 0$, происходит так называемый «дифференциальный взрыв» и область существования непродолжаемого решения сокращается до размеров порядка ε.

В работе М. И. Русановой [4] построена формальная асимптотика решения задачи Коши в вырожденном случае для уравнения вида $\varepsilon u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$. О. Ю. Хачай в работе [5] изучил асимптотику решения начальной задачи Коши с уравнением $\varepsilon u' = f(x, u)$, где $f(x, u) \sim x - u^k$, $k > 2$ — произвольное натуральное число.

А. М. Ильин и С. Ф. Долбеева [6] исследовали поведение решения задачи Коши в случае, когда ветви многозначной функции, являющейся решением предельного уравнения, пересекаются. На самом деле правая часть $f(x, u, \varepsilon)$ в данной работе также имеет много нулевых производных в нуле, например, функция вида $f(x, u, \varepsilon) = (x - u)^2 (x - 2u)^2$.

В настоящей работе будет рассмотрен неисследованный ранее случай, когда $f(x, u, \varepsilon) \sim x^2 - u^2$ при $x \to 0$. Для упрощения вычислений мы будем исследовать начальную задачу Коши в следующей формулировке:

$$\begin{cases} \varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x), \\ u(0,\varepsilon) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x) > 0$ при $x \geqslant 0$, $f(0) = 1$, $f \in C^\infty[0,+\infty)$. Из устойчивости по Ляпунову следует существование непрерывного решения рассматриваемой задачи на $[0,+\infty)$. Построенное асимптотическое разложение будет иметь ту же структуру асимптотики, что и в случае более общей правой части $f(x,u,\varepsilon)$, имеющей заданное поведение вблизи нуля, однако здесь асимптотические коэффициенты будут построены в явном виде в отличие от предыдущих работ, кроме работы [4].

1. Внешнее разложение

Будем строить асимптотическое разложение решения в виде формального ряда U по степеням малого параметра ε: $U = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$. Подставляя этот ряд в наше уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$\varepsilon^0 : 0 = x^2 - u_0^2,$

$\varepsilon^1 : u_0' = -2u_0u_1 + f(x),$

$\varepsilon^2 : u_1' = -2u_0u_2 - u_1^2,$

$\ldots$

$\varepsilon^k : u_{k-1}' = -2u_0u_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} u_j u_{k-j},$

$\ldots$

Из первого уравнения следует, что $u_0 = \pm x$, выберем $u_0 = x$. (На самом деле наш выбор определяется здесь знаком начального значения $u(0,\varepsilon)$). Из остальных уравнений легко последовательно найти все асимптотические коэффициенты. Например,

$$u_1(x) = \frac{f(x)-1}{2x}, \quad u_2(x) = \frac{4f(x) - f^2(x) - 2xf'(x) - 3}{8x^3} \quad \text{и т. д.}$$

По индукции нетрудно показать, что $u_k \sim x^{1-2k}$ при $x \to 0$ либо некоторые u_k имеют меньшие особенности при $x \to 0$ (например, при $f(0) = 1$ или при $4f(0) - f^2(0) - 2xf'(0) = 3$). Тем не менее очевидно, что начальное условие $u(0,\varepsilon) = 1$ не выполняется даже асимптотически, поэтому вблизи точки $x = 0$ требуется дополнительное внутреннее асимптотическое разложение. Кроме того, поскольку коэффициенты внешнего разложения в общем случае имеют особенности порядка $u_k \sim x^{1-2k}$, то при $x < O(\varepsilon^{1/2})$ ряд U может перестать быть асимптотическим вследствие нарушения условия $\varepsilon^k u_k = o(\varepsilon^{k-1}u_{k-1})$.

2. Внутреннее разложение

Для построения внутреннего разложения введём «внутреннюю» переменную $\xi = x/\varepsilon$. Обозначим $v(\xi,\varepsilon) = u(\varepsilon\xi,\varepsilon)$. В результате такой замены мы получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{d\xi} = \varepsilon^2\xi^2 - v^2 + \varepsilon f(\varepsilon\xi), \\ v(0,\varepsilon) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Внутреннее разложение будем искать в виде формального ряда $V = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi)$. Для нахождения его коэффициентов подставим его в уравнение (2) и приравняем члены при одинаковых степенях ε, предварительно разложив в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\xi^k$.

При подстановке V в начальное условие имеем $v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1$. Отсюда получаем следующие начальные условия: $v_0(0) = 1$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0 \dots$ Таким образом, коэффициенты внутреннего асимптотического разложения могут определяться из следующих начальных задач:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} v_0' = -v_0^2, \\ v_0(0) = 1, \end{cases}$$
$$\varepsilon^1 : \begin{cases} v_1' = -2v_0 v_1 + f(0), \\ v_1(0) = 0, \end{cases}$$
$$\varepsilon^2 : \begin{cases} v_2' = \xi^2 - 2v_0 v_2 - v_1^2 + f'(0)\xi, \\ v_2(0) = 0, \end{cases}$$

$\dots$

$$\varepsilon^k : \begin{cases} v_k' = -2v_0 v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} v_j v_{k-j} + \dfrac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\xi^{k-1}, \\ v_k(0) = 0, \end{cases}$$

$\dots$

Отсюда можно последовательно найти

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi+1}, \quad v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3}\Big(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\Big),$$

$$v_2(\xi) = \Big(-\frac{1}{45}f^2(0) + \frac{1}{5}\Big)\xi^3 + \Big(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{4} + \frac{1}{10}\Big)\xi^2 + \Big(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{6} - \frac{1}{15}\Big)\xi +$$
$$+ \frac{4}{45}f(0) - \frac{f'(0)}{12} + \frac{1}{30} + \Big(-\frac{f^2(0)}{5} + \frac{f'(0)}{12} - \frac{1}{30}\Big)\frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{f^2(0)}{(\xi+1)^3}$$

и другие асимптотические коэффициенты внутреннего разложения.

Отметим, что коэффициенты внутреннего разложения $v_k(\xi) \sim \xi^{2k-1}$ при $\xi \to +\infty$, поэтому при $\xi > O(\varepsilon^{-1/2})$ или $x > O(\varepsilon^{1/2})$ ряд V может перестать быть асимптотическим.

Таким образом, при $x = O(\varepsilon^{1/2})$ и внешнее, и внутреннее разложение в общем случае являются заведомо неверными. Для устранения этой проблемы мы построим промежуточное асимптотическое разложение.

3. Промежуточное разложение

Введём новую переменную $\eta = \varepsilon^{-1/2}x$ и функцию $w(\eta, \varepsilon) = u(\varepsilon^{1/2}x, \varepsilon)$. После такой замены получим следующее уравнение на функцию w:

$$\varepsilon^{1/2}\frac{dw}{d\eta} = \varepsilon\eta^2 - w^2 + \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta). \tag{3}$$

Будем искать промежуточное асимптотическое разложение в виде формального ряда $W = \varepsilon^{1/2}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}w_j(\eta)$. Также разложим в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon^{1/2}\eta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\eta^k$. Подставим данные ряды в уравнение (3):

$$\varepsilon^{1/2}(\varepsilon^{1/2}w_0' + \varepsilon w_1' + \dots) = \varepsilon\eta^2 - (\varepsilon^{1/2}w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)^2 + \varepsilon f(0) + \varepsilon^{3/2}f'(0)\eta + \dots,$$

а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие уравнения.

Во-первых, $\varepsilon^1: w_0' = \eta^2 - w^2 + f(0)$. Данное уравнение относится к разрешимым уравнениям Риккати и имеет явное решение в специальных функциях. Однако, поскольку для упрощения вычислений мы положили $f(0) = 1$, то его общее решение ещё больше упрощается и имеет следующий вид:

$$w_0(\eta) = \eta \text{ или } w_0(\eta) = \eta - \frac{e^{-\eta^2}}{C_0 - \int\limits_0^\eta e^{-t^2}dt},$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Второе уравнение — при $\varepsilon^{3/2}: w_1' = -2w_0w_1 + f'(0)\eta$. Это уже линейное уравнение, имеющее решение

$$w_1(\eta) = \frac{\Big(f'(0)\Big(\frac{1}{2}\,e^{\eta^2}\mathrm{erf}^2(\eta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{erf}(\eta) - \frac{2}{\pi}\,e^{-\eta^2}\Big) + C_1\Big)e^{-\eta^2}}{\mathrm{erf}^2(\eta)} \text{ при } C_0 = 0$$

$$\text{и} \quad w_1(\eta) = \left(C_1 + \int\limits_0^\eta e^{2\int\limits_0^t w_0(\tau)d\tau} f'(0)tdt\right)e^{-2\int\limits_0^\eta w_0(\tau)d\tau} \text{ при } C_0 \neq 0,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Далее при $\varepsilon^2: w_2' = -2w_0w_2 - w_1^2 + \dfrac{f''(0)}{2}\eta^2$. Его решением является функция

$$w_2(\eta) = \frac{1}{\mathrm{erf}^2(\eta)}\Bigg(\int\limits_0^\eta \frac{1}{\mathrm{erf}^2(t)}\Big(-f'^2(0)\Big(\int\limits_0^t \tau e^{\tau^2}\mathrm{erf}^2(\tau)d\tau\Big)^2 e^{-t^2} -$$

$$-2f'(0)\int\limits_0^t \tau e^{\tau^2}\mathrm{erf}^2(\tau)d\tau \cdot C_1e^{-t^2} - C_1^2e^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathrm{erf}^4(t)f''(0)t^2\Big)dt + C_2\Bigg)e^{-\eta^2} \text{ при } C_0 = 0$$

$$\text{и} \quad w_2(\eta) = \left(C_2 + \int\limits_0^\eta e^{2\int\limits_0^t w_0(\tau)d\tau}\Big(\frac{f''(0)}{2}t^2 - w_1^2(t)\Big)dt\right)e^{-2\int\limits_0^\eta w_0(\tau)d\tau} \text{ при } C_0 \neq 0.$$

...

$$\varepsilon^{(k+1)/2}: w_k' = -2w_0w_k - \sum_{j=1}^{k-1} w_jw_{k-j} + \eta^k \cdot \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

...

Как будет показано далее, $C_0 = 0$, тогда $w_k \sim \eta^{-1-k}$ при $\eta \to 0$. Поэтому зона действия ряда W не может быть больше, чем $\varepsilon \ll x \ll 1$. Отметим ещё, что при решении этих уравнений на каждом шаге появляется новая неопределённая постоянная, которую можно определить из условия согласования асимптотических рядов, что мы и сделаем.

4. Согласование

В соответствии с условиями согласования для любых l, m, n должны быть выполнены равенства $A_{l,\xi}A_{m,\eta}W = A_{m,\eta}A_{l,\xi}V$, $A_{m,\eta}A_{n,x}U = A_{n,x}A_{m,\eta}W$, где через $A_{n,x}$

обозначается оператор взятия частичной суммы ряда, записанной от переменной x и содержащей степени ε с показателем до n включительно.

Для определения постоянных C_k достаточно провести согласование только рядов V и W. Следить за согласованием асимптотических рядов удобно, используя специальную таблицу согласования (табл. 1).

Таблица 1

Таблица согласования V и W

$W\backslash V$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	—	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\ldots$
	ξ^{-1}	$\varepsilon\xi/3$	0	$\varepsilon^2 \frac{8}{45}\xi^3$	$\ldots$
$\varepsilon^{1/2}w_0(\eta)$	$\varepsilon^{1/2}\eta^{-1}$	$\varepsilon^{1/2}\eta/3$	0	$\varepsilon^{1/2}\frac{8}{45}\eta^3$	
	$-\xi^{-2}$	$\varepsilon/3$	0	$\varepsilon^2\left(\frac{1}{30}+\frac{f'(0)}{4}\right)\xi^2$	$\ldots$
$\varepsilon w_1(\eta)$	$\varepsilon\frac{C_1\pi}{4}\eta^{-2}$	$-\varepsilon\frac{C_1\pi}{12}$	0	$\varepsilon\left(-\frac{2C_1\pi}{15}+\frac{C_1\pi}{8}+\frac{f'(0)}{4}\right)\eta^2$	
	ξ^{-3}	0	0	$\varepsilon^2\left(\frac{f'(0)}{6}-\frac{2}{15}\right)\xi$	$\ldots$
$\varepsilon^{3/2}w_2(\eta)$	$\varepsilon^{3/2}\eta^{-3}$	$\varepsilon^{3/2}\frac{C_2\pi}{4}\eta^{-2}$	$-\varepsilon^{3/2}\frac{C_2\pi}{12}$	$\varepsilon^{3/2}\left(\frac{f'(0)}{6}-\frac{2}{15}\right)\eta$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Таблица устроена стандартным образом [2, гл. 5]. В верхних и нижних частях клеток стоят равные функции с учётом замены переменой $\xi = \varepsilon^{1/2}\eta$. В столбцы этой таблицы записаны разложения коэффициентов внутреннего разложения $v_i(\xi)$ при $\xi \to +\infty$, а строки — разложения коэффициентов промежуточного разложения $w_j(\eta)$ при $\eta \to 0$. Таким образом определяются $C_0 = 0$, $C_1 = \dfrac{4}{\pi}$, $C_2 = 0$ и т. д. На этом построение формального асимптотического разложения закончено.

Отметим ещё, что ряды W и U также являются согласованными и для них можно построить свою таблицу согласования (табл. 2).

Таблица 2

Таблица согласования U и W

$U\backslash W$	$\varepsilon^{1/2}w_0(\eta)$	$\varepsilon w_1(\eta)$	$\varepsilon^{3/2}w_2(\eta)$	$\ldots$
	$\varepsilon^{1/2}\eta$	0	0	$\ldots$
$u_0(x)$	x	0	0	
	0	$\varepsilon\frac{f'(0)}{2}$	$\varepsilon^{3/2}\eta\frac{f''(0)}{4}$	$\ldots$
$\varepsilon u_1(x)$	0	$\varepsilon\frac{f'(0)}{2}$	$\varepsilon x\frac{f''(0)}{4}$	
	0	0	$-\frac{f'^2(0)+f''(0)}{8\eta}\varepsilon^{3/2}$	$\ldots$
$\varepsilon u_2(x)$	0	0	$-\frac{f'^2(0)+f''(0)}{8\eta}\varepsilon^{3/2}$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

В столбцы табл. 2 записаны разложения

$$w_0(\eta) = \eta + O(e^{-\eta^2}),\ \eta \to +\infty, \quad w_1(\eta) = \frac{f'(0)}{2} + O(e^{-\eta^2}),\ \eta \to +\infty \text{ и т. д.,}$$

а строки — разложения

$$u_0(x) = x, \quad u_1(x) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(0)}{4}x + \frac{f'''(0)}{12}x^2 + O(x^3),\ x \to 0 \text{ и т. д.}$$

5. Обоснование

Воспользуемся методом «нижнего и верхнего решений», описанным, например, в [7]. Обоснование проведём только для двух членов асимптотики, для большего числа его можно провести аналогично. Рассмотрим произвольную начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = 0, \quad x \in I = (x_0, x_1), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{4}$$

где $f \in C(I)$, и введём два определения.

Определение 1. Функцию $\underline{Y}$, имеющую свойства:

1) $\underline{Y}(0) \leqslant y_0$,

2) $\dfrac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}) \leqslant 0$ при $x \in I$, —

назовём *нижним решением начальной задачи* (4).

Определение 2. Функцию $\overline{Y}$, имеющую свойства:

1) $\overline{Y}(0) \geqslant y_0$,

2) $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} - f(x, \overline{Y}) \geqslant 0$ при $x \in I$, —

назовём *верхним решением начальной задачи* (4).

Как известно [8, гл. IV, § 1], из существования нижнего и верхнего решений следует существование единственного решения $y(x)$ задачи (4), удовлетворяющего неравенству

$$\underline{Y}(x) \leqslant y(x) \leqslant \overline{Y}(x) \text{ при } x \in I.$$

Пусть функция $u(x,\varepsilon) \equiv v(\xi,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1/2} w(\eta,\varepsilon)$ является точным решением задачи (1). Обозначим через $V_2 = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$. В качестве нижнего решения задачи (2) возьмём $\underline{V} = V_2 - A\varepsilon^{5/4}$. Тогда

1) $\underline{V}(0,\varepsilon) = v_0(0) + \varepsilon v_1(0) - A\varepsilon^{5/4} = 1 - A\varepsilon^{5/4} \leqslant 1 = v(0,\varepsilon)$, где $v(\xi,\varepsilon)$ — точное решение задачи (2);

2) $\dfrac{d\underline{V}}{d\xi} - \varepsilon^2\xi^2 - \underline{V}^2 + \varepsilon f(\varepsilon,\xi) = -\dfrac{8}{9}\varepsilon^2\xi^2 + \overline{o}(\varepsilon^2\xi^2) - 2A\xi^{-1}\varepsilon^{5/4} + \overline{o}(A\xi^{-1}\varepsilon^{5/4})$.

Следовательно, при достаточно большом A на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция $\underline{V}$ действительно является нижним решением задачи (2).

В качестве верхнего решения возьмём функцию $\overline{V} = V_2 + A\varepsilon^{5/4}$. Аналогично, при достаточно большом A на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция $\overline{V}$ действительно является верхним решением задачи (2).

Таким образом, мы доказали, что $|v(\xi,\varepsilon) - V_2| = O(\varepsilon^{5/4})$ при $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$.

Обозначим через $W_3 = \varepsilon^{1/2} w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta) + \varepsilon^{3/2} w_2(\eta)$. В качестве нижнего решения возьмём функцию $\underline{W} = W_3 - B \cdot \varepsilon^{5/4}$. Тогда при достаточно большом B:

1) $\underline{W}(\varepsilon^{1/4},\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_0(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon^{3/2} w_2(\varepsilon^{1/4}) - B \cdot \varepsilon^{5/4} =$

$$= \varepsilon^{1/2} \cdot \left(\varepsilon^{-1/4} + \frac{1}{3}\varepsilon^{1/4}\right) + \varepsilon \cdot \left(\varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{3}\right) + \varepsilon^{3/2} \cdot \varepsilon^{-3/4} + O(\varepsilon^{5/4}) - B\varepsilon^{5/4} \leqslant$$

$$\leqslant \underline{V}|_{\xi = \varepsilon^{-1/4}} \leqslant w(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon);$$

2) $\varepsilon^{1/2} \dfrac{d\underline{W}}{d\eta} - \varepsilon\eta^2 + \underline{W}^2 - \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta) = O(\eta^3\varepsilon^{5/2}) - 2B\eta\varepsilon^{7/4} \leqslant 0.$

Поэтому функция $\underline{W}$ при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-1/4}]$ является нижним решением задачи (1) с учётом замены переменных.

Аналогично при достаточно большом B функция $\overline{W} = W_3 + B\varepsilon^{5/4}$ является верхним решением задачи (1) при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-1/4}]$.

На оставшемся участке $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$ в качестве нижнего решения возьмём $\underline{U} = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) - C \cdot \varepsilon^{5/4}$. Тогда при достаточно большом C:

1) $\underline{U}\,|_{x=\varepsilon^{1/4}} = u_0(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon u_1(x) - C\cdot\varepsilon^{5/4} \leqslant \underline{W}\,|_{\eta=\varepsilon^{-1/4}} \leqslant u(\varepsilon^{1/4},\varepsilon)$;

2) $\varepsilon\dfrac{d\underline{U}}{dx} - x^2 + \underline{U}^2 - \varepsilon f(x) =$

$$= -2xC\varepsilon^{5/4} + \left(\frac{(f(x)-1)^2}{4x^2} - \frac{f(x)-1}{2x^2} + \frac{f'(x)}{2x}\right) - \frac{f(x)-1}{x}C\varepsilon^{9/4} + C^2\varepsilon^{5/2} \leqslant 0$$

(если $f(x)$ и $f'(x)$ не растут слишком быстро). Следовательно, $\underline{U}$ действительно является нижним решением задачи (1) при $x\in[\varepsilon^{1/4},+\infty)$.

Аналогично при достаточно большом C функция $\overline{U} = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + C\cdot\varepsilon^{5/4}$ является верхним решением при $x\in[\varepsilon^{1/4},+\infty)$.

Отметим, что из существования верхнего и нижнего решений вытекает существование решения задачи. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Существует решение задачи* (1) из класса $C^\infty[0,\infty)$, такое, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ верны следующие равенства:

$$u(x,\varepsilon) = v_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon v_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon^{5/4}),\quad x\in[0,\varepsilon^{3/4}),$$
$$u(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_0\Big(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + \varepsilon w_1\Big(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + \varepsilon^{3/2}w_2\Big(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\Big) + O(\varepsilon^{5/4}),\quad x\in[\varepsilon^{3/4},\varepsilon^{1/4}),$$
$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^{5/4}),\quad x\in[\varepsilon^{1/4},+\infty).$$

Заключение

Мы построили следующее трёхмасштабное разложение:

$$u(x,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to0}{\overset{\text{ас.}}{=}} \begin{cases} v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + \varepsilon^2 v_2(\xi) + \ldots \text{ при } x \ll \varepsilon^{1/2}, \\ \varepsilon^{1/2}w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta) + \varepsilon^{3/2}w_2(\eta) + \ldots \text{ при } \varepsilon \ll x \ll 1, \\ u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots \text{ при } \varepsilon^{1/2} \ll x, \end{cases}$$

где

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi+1},\quad v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3}\Big(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2}\Big),$$

$$v_2(\xi) = \Big(-\frac{1}{45}f^2(0) + \frac{1}{5}\Big)\xi^3 + \Big(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{4} + \frac{1}{10}\Big)\xi^2 + \Big(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{6} - \frac{1}{15}\Big)\xi +$$
$$+ \frac{4}{45}f(0) - \frac{f'(0)}{12} + \frac{1}{30} + \Big(-\frac{f^2(0)}{5} + \frac{f'(0)}{12} - \frac{1}{30}\Big)\frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{f^2(0)}{(\xi+1)^3},$$

$$w_0(\eta) = \eta - \frac{e^{-\eta^2}}{C_0 - \int\limits_0^\eta e^{-t^2}dt},\quad w_1(\eta) = \frac{\Big(\int\limits_0^\eta f'(0)e^{t^2}\Big(\int\limits_0^t e^{-\tau^2}d\tau\Big)^2 dt + \frac{4}{\pi}\Big)e^{-\eta^2}}{\Big(\int\limits_0^\eta e^{-\tau^2}d\tau\Big)^2},$$

$$w_2(\eta) = \frac{1}{\operatorname{erf}^2(\eta)}\left(\int\limits_0^\eta \frac{1}{\operatorname{erf}^2(t)}\left(-f'^2(0)\left(\int\limits_0^t \tau e^{\tau^2}\operatorname{erf}^2(\tau)d\tau\right)^2 e^{-t^2} -\right.\right.$$
$$\left.\left. -2f'(0)\int\limits_0^t \tau e^{\tau^2}\operatorname{erf}^2(\tau)d\tau\cdot\frac{4}{\pi}e^{-t^2} - \frac{16}{\pi^2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}e^{t^2}\operatorname{erf}^4(t)f''(0)t^2\right)dt\right)e^{-\eta^2},$$

$$u_0(x) = x,\quad u_1(x) = \frac{f(x)-1}{2x},\quad u_2(x) = \frac{4f(x) - f^2(x) - 2xf'(x) - 3}{8x^3}.$$

Также проведено обоснование первых членов асимптотики.

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Мат. сб. — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 193–204.
2. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
3. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. — 248 с.
4. **Русанова, М. И.** Асимптотика решения уравнения Риккати / М. И. Русанова // Материалы второй научно-практической конференции Научного общества учащихся Малой академии Челябинского государственного университета / отв. за вып. С. Н. Замоздра. — Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2013. — С. 7–9.
5. **Хачай, О. Ю.** Асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущённого обыкновенного дифференциального уравнения / О. Ю. Хачай // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 270–272.
6. **Ильин, А. М.** Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения / А. М. Ильин, С. Ф. Долбеева // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 98—108.
7. **Васильева, А. Б.** Контрастные структуры в сингулярно возмущённых задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов // Фундамент. и приклад. математика. — 1998. — Т. 4, вып. 3. — С. 799–851.
8. **Чаплыгин, С. А.** Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950. — 103 с.

Поступила в редакцию 14.08.2014
После переработки 03.02.2016

Сведения об авторе

Крутова Юлия Александровна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: julia_74rus@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 43–51.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR CAUCHY PROBLEM

Ju. A. Krutova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
julia_74rus@mail.ru

The solution uniform asymptotics of the initial value problem for equation $\varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x)$ singularly depending on small parameter ε is considered. The equation contains the unexplored case of the right-hand side, though equations of this type are well studied. The three-scale solution asymptotic expansion is constructed by the matching method, justificated by the upper and lower solutions method.

Keywords: *asymptotic expansion, small parameter, initial value problem, matching method, intermediate expansion.*

References

1. **Tikhonov A.N.** O zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra [About dependence of differential equations solutions on a small parameter]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik Mathematics], 1948, vol. 22, no. 2, pp. 193–204. (In Russ.).
2. **Il'in A.M.** *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Translations of Mathematical Monographs. 102. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). ix+281 p. (1992).
3. **Il'in A.M., Danilin A.R.** *Asimptoticheskiye metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
4. **Rusanova M.I.** Asimptotika resheniya uravneniya Rikkati [Asymptotics of Riccati equation solution]. *Materialy vtoroy nauchno-prakticheskoy konferentsii Nauchnogo obshchestva uchashchikhsya Maloy akademii Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of The Second Scientific Conference of Small Academy Students of Chelyabinsk State University]. Chelyabinsk, Izdatel'stvo Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2013. Pp. 7–9. (In Russ.).
5. **Khachay O.Yu.** Asymptotic expansion of the solution of the initial value problem for a singularly perturbed ordinary differential equation. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 282–285.
6. **Il'in A.M., Dolbeeva S.F.** Asimptotika resheniya differentsial'nogo uravneniya s malym parametrom v sluchaye dvukh resheniy predel'nogo uravneniya [Solution asymptotics of a differential equation with a small parameter in the case of two solutions for a limit equation]. *Trudy Instituta Matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS], 2006, vol. 12, no. 1, pp. 98–108. (In Russ.).
7. **Vasil'yeva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.** Kontrastnye struktury v singularno vozmushchyonnykh zadachakh [Contrast structures in singularly perturbed problems]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1998, vol. 4, iss. 3, pp. 799–851. (In Russ.).
8. **Chaplygin S.A.** *Novyy metod priblizhyonnogo integrirovaniya differentsial'nykh uravneniy* [A new method of approximate integration of differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 103 p. (In Russ.).

Article received 14.08.2014
Corrections received 03.02.2016