Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 1. С. 88–98.

УДК 517.977

ВЕСОВЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ, ОТВЕЧАЮЩИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Э. Л. Шишкина

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
ilina_ dico@mail.ru

Рассмотрены обобщённые функции, отвечающие квадратичной форме с комплексными коэффициентами, приспособленные для работы с дифференциальными операторами, содержащими оператор Бесселя. Получены формулы для фундаментального решения итерированного ультрагиперболического оператора, где вместо вторых производных используются операторы Бесселя.

Ключевые слова: *весовые обобщённые функции, фундаментальное решение, оператор Бесселя, B-ультрагиперболический оператор.*

Вводные сведения

И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в книге [1] предложена идея нахождения фундаментальных решений дифференциальных операторов второго порядка посредством изучения коэффициентов рядов Лорана обобщённых функций, отвечающих квадратичной форме, соответствующей рассматриваемому оператору. Этот метод удобен тем, что, имея информацию о вычетах указанной обобщённой функции, можно получить решение уравнения, содержащее итерированный оператор и в зависимости от соотношения, связывающего порядок итерации и размерность пространства, это будет либо фундаментальное решение, либо решение однородного уравнения. Так, для получения фундаментального решения ультрагиперболического оператора рассматриваются обобщённые функции, порождённые квадратичной формой $P = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$. В данной статье мы рассматриваем обобщённые функции, приспособленные для работы с ультрагиперболическими операторами и их степенями, где вместо каждой второй производной действует дифференциальный оператор Бесселя, т. е. операторами вида

$$\Box_\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\gamma_p}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\gamma_{p+1}}{x_{p+1}}\frac{\partial}{\partial x_{p+1}} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} + \frac{\gamma_{p+q}}{x_{p+q}}\frac{\partial}{\partial x_{p+q}},$$

где $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p+q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Оператор $\Box_\gamma$ мы называем *B-ультрагиперболическим оператором* (см. [2], а также [3; 4]).

Приведём некоторые определения, следуя работе [2]. Пусть

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n,\ x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

Ω — открытое множество в $\mathbb{R}_n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\Omega_+ = \Omega \bigcap \mathbb{R}_n^+$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \bigcap \overline{\mathbb{R}}_n^+$, где

$$\overline{\mathbb{R}}_n^+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}_n^+$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}_n^+$. Мы рассмотрим множество $C^\infty(\Omega_+)$, состоящее из бесконечно дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^\infty(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^\infty(\Omega_+)$, таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывно продолжаются на гиперплоскость $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Функции $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть *чётными по переменным* x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, если $\frac{\partial^{2k+1}\varphi}{\partial x_i^{2k+1}}|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых k (см. [2, с. 21]). Класс $C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^\infty(\overline{\Omega}_+)$, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Через $\overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ будем обозначать класс финитных функций из $C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$. Функции из $\overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ будем называть пробными функциями и использовать обозначения $\overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ и $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_+(\overline{\mathbb{R}}_n^+)$.

Определим K как произвольный компакт в $\mathbb{R}_n$, симметричный относительно гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и положим $K_+ = K \cap \overline{\mathbb{R}}_n^+$. Обобщённая функция u на $\overline{\Omega}_+$ есть линейная форма на $\mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$, такая, что для любого компакта $K_+ \subset \overline{\Omega}_+$ существуют такие константы C и k, что

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha \varphi|, \qquad \varphi \in \overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(K_+),$$

где $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, $D_{x_j} = i\frac{\partial}{\partial x_j}$, i — мнимая единица, $j = 1, 2, \dots, n$. Множество всех обобщённых функций на $\overline{\Omega}_+$ обозначим $\mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ (см. [2, с. 11] и [5, с. 34]).

Пусть мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ состоит из фиксированных положительных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$. Пространство $L_p^\gamma(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, таких, что если $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, то

$$\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного числа $p \geq 1$ $L_p^\gamma(\Omega_+)$-норма функции $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$ определяется формулой

$$||f||_{L_p^\gamma(\Omega_+)} = \left(\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Через $L_{p,\text{loc}}^\gamma(\Omega_+)$ будем обозначать множество функций u, определённых почти всюду на $\overline{\Omega}_+$, таких, что $u\varphi \in L_p^\gamma(\Omega_+)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$. Каждой функции $u \in L_{1,\text{loc}}^\gamma(\Omega_+)$ сопоставляется *регулярная весовая обобщённая функция* $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$, действующая по правилу

$$(u, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\Omega_+} u(x)\, f(x)\, x^\gamma\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+).$$

Все остальные обобщённые функции $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ будем называть *сингулярными весовыми обобщёнными функциями.*

Часть шара $|x| \leq r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2}$, принадлежащую $\mathbb{R}_n^+$, будем обозначать $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ состоит из части сферы $S_r^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : |x| = r\}$ и из частей координатных гиперплоскостей $x_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$ при $|x|\leq r$,

$$|S_1^+(n)|_\gamma=\int\limits_{S_1^+(n)}\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}dS=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$$

(см. [6, с. 20, формула (1.2.5)], где надо положить $N=n$).

В этой работе будет использоваться весовая обобщённая функция δ_γ (см. [2]):

$$(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma=\varphi(0),\quad \varphi\in\mathcal{D}_+.$$

Для удобства будем также писать

$$(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\delta_\gamma(x)\varphi(x)x^\gamma dx=\varphi(0).$$

Пусть $p,q\in\mathbb{N}$, $n=p+q$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x',x'')\in\mathbb{R}_n^+$, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$, $x''=(x_{p+1},x_{p+2},\ldots,x_{p+q})$ и

$$P=|x'|^2-|x''|^2,\quad |x'|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2,\quad |x''|^2=x_{p+1}^2+x_{p+2}^2+\cdots+x_{p+q}^2. \tag{1}$$

Для функции $\varphi\in\mathcal{D}_+$, равной нулю в окрестности начала координат, весовая обобщённая функция $\delta_\gamma(P)$, сосредоточенная на части конуса $P=0$, принадлежащей $\mathbb{R}_n^+$, определяется посредством весового функционала вида (см. [7–9])

$$(\delta_\gamma(P),\varphi)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\delta_\gamma(|x'|^2-|x''|^2)\varphi(x)x^\gamma dx. \tag{2}$$

Если же функция $\varphi\in\mathcal{D}_+$, то $(\delta_\gamma(P),\varphi)_\gamma$ понимается как регуляризованное значение интеграла в (2).

Весовая обобщённая функция $P_{\gamma,+}^\lambda$ определяется формулой (см. [8])

$$(P_{\gamma,+}^\lambda,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\{P(x)>0\}^+}P^\lambda(x)\varphi(x)x^\gamma dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}_+, \tag{3}$$

где $\{P(x)>0\}^+=\{x\in\mathbb{R}_n^+ : P(x)>0\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Следуя [1], $P_{\gamma,-}^\lambda$ определим формулой

$$(P_{\gamma,-}^\lambda,\varphi)_\gamma=\int\limits_{\{-P(x)>0\}^+}(-P(x))^\lambda\varphi(x)x^\gamma dx,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_+. \tag{4}$$

Вычеты $P_{\gamma,\pm}^\lambda$ в особых точках выражаются через весовую обобщённую функцию (2).

1. Весовые обобщённые функции, порождённые квадратичными формами с комплексными коэффициентами

Рассмотрим пространство всех квадратичных форм диагонального вида с коэффициентами $g_k\in\mathbb{C}$, $k=1,2,\ldots,n$:

$$\mathscr{P}(x)=\sum_{k=1}^n g_kx_k^2. \tag{5}$$

Квадратичную форму $\mathscr{P}$ можно записать в виде $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$, где P_1, P_2 — квадратичные формы с вещественными коэффициентами.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Если квадратичная форма $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$ имеет положительно определённую мнимую часть P_2, то можно определить однозначную аналитическую функцию от λ:

$$\mathscr{P}^\lambda = e^{\lambda(\ln|\mathscr{P}|+i\arg\mathscr{P})}, \quad 0 < \arg\mathscr{P} < \pi.$$

Сопоставим функции $\mathscr{P}^\lambda$ обобщённую весовую функцию $\mathscr{P}^\lambda_\gamma = (P_1 + iP_2)^\lambda_\gamma$, определённую формулой

$$(\mathscr{P}^\lambda_\gamma, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} \mathscr{P}^\lambda(x)\varphi(x)x^\gamma dx.$$

Поскольку мы положили $0 < \arg\mathscr{P} < \pi$, то обобщённая весовая функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ находится в верхней комплексной полуплоскости. Далее так как обобщённая весовая функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ аналитически зависит не только от λ, но и от коэффициентов квадратичной формы g_r, $r = 1, 2, \ldots, n$, то $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ является аналитической функцией всех квадратичных форм вида $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$, где форма P_2 положительно определена. В силу единственности аналитического продолжения обобщённая весовая функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ однозначно определяется своими значениями на множестве квадратичных форм вида $\mathscr{P} = iP_2$. Поэтому вместо $\mathscr{P} = P_1 + iP_2$ будем рассматривать форму $\mathscr{P} = iP_2 = \sum\limits_{k=1}^n g_k x_k^2$. Это означает, что $g_k = ib_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и форма $P_2(x) = \sum\limits_{k=1}^n b_k x_k^2$ положительно определена. Тогда

$$(\mathscr{P}^\lambda_\gamma, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} \left(\sum_{k=1}^n ib_k x_k^2\right)^\lambda \varphi(x)x^\gamma dx = e^{i\frac{\pi\lambda}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} \left(\sum_{k=1}^n b_k x_k^2\right)^\lambda \varphi(x)x^\gamma dx. \tag{6}$$

Учитывая, что $b_k = -ig_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, перейдём в равенстве (6) от $\sqrt{b_k}x_k$ к x_k и получим

$$(\mathscr{P}^\lambda_\gamma, \varphi)_\gamma = \eta_\gamma(g)e^{i\frac{\pi\lambda}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^+_n} r^{2\lambda}\,\varphi_g(x)x^\gamma dx,$$

где $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, g_k — коэффициенты формы (5), $k = 1, 2, \ldots, n$, $\eta_\gamma(g) = \prod\limits_{k=1}^n (-ig_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}}$, $r^{2\lambda} = \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^\lambda$, $\varphi_g(x) = \varphi\left(\frac{x_1}{\sqrt{-ig_1}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{-ig_n}}\right)$.

Весовой функционал $(r^{2\lambda}, \varphi)_\gamma$ рассмотрен в работе [10] (см. также [11] и [12]). В частности, из [10] известно, что в точках $\lambda = -\frac{n+|\gamma|+2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, весовой функционал $r^{2\lambda}$ имеет простые полюсы. Вычет этого функционала в точке $\lambda = -\frac{n+|\gamma|}{2}$ равен

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}} [(r^{2\lambda}, \varphi)_\gamma] = |S^+_1(n)|_\gamma\,\delta_\gamma(x).$$

Поэтому $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ также имеет простые полюсы в точках $\lambda = -\frac{n+|\gamma|+2p}{2}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}} \mathscr{P}^\lambda_\gamma = \eta_\gamma(g)e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S^+_1(n)|_\gamma\,\delta_\gamma(x). \tag{7}$$

Введём в рассмотрение дифференциальный оператор

$$\mathcal{B}_{\gamma,g} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

где g_k — коэффициенты квадратичной формы (5). Имеем

$$\mathcal{B}_{\gamma,g}\mathscr{P}_\gamma^{\lambda+1}=4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}. \tag{8}$$

Применяя формулу (8) k раз, получим

$$\mathcal{B}^k_{\gamma,g}\mathscr{P}_\gamma^{\lambda+k}=4^k(\lambda{+}1)\dots(\lambda{+}k)\left(\lambda{+}\frac{n{+}|\gamma|}{2}\right)\dots\left(\lambda{+}\frac{n{+}|\gamma|}{2}{+}k{-}1\right)\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}=$$

$$=\left.\frac{1}{4^k(\lambda{+}1)...(\lambda{+}k)\left(\lambda{+}\frac{n+|\gamma|}{2}\right)...\left(\lambda{+}\frac{n+|\gamma|}{2}{+}k{-}1\right)}\right|_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}\mathcal{B}^k_{\gamma,g}\mathscr{P}_\gamma^{\lambda+k},$$

откуда, применяя формулу (7), найдём вычет $\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}$ в точке $\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}=\frac{\eta_\gamma(g)e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^kk!\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma. \tag{10}$$

Формула (10) получена для квадратичной формы $\mathscr{P}=iP_2=\sum\limits_{k=1}^n g_kx_k^2$, принадлежащей мнимой оси. Продолжим формулу (10) аналитически на всю верхнюю полуплоскость всех квадратичных форм $\mathscr{P}=P_1+iP_2$, $P_1=\sum\limits_{k=1}^n a_kx_k^2$, $P_2=\sum\limits_{k=1}^n b_kx_k^2$, где P_2 положительно определена. Коэффициенты оператора $\mathcal{B}_{\gamma,g}$ аналитически выражаются через коэффициенты квадратичной формы $\mathscr{P}$, а именно: они равны $\frac{1}{g_k}$, поэтому аналитическое продолжение оператора $\mathcal{B}_{\gamma,g}$ известно. Аналитическое продолжение функции $\eta_\gamma(g)$ на всю верхнюю полуплоскость имеет вид

$$\eta_\gamma(g)=\prod_{k=1}^n(b_k(1-i\mu_k))^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},\quad \mu_k=\frac{a_k}{b_k}. \tag{11}$$

Следовательно, если $\mathscr{P}(x)=P_1{+}iP_2=\sum\limits_{k=1}^n g_kx_k^2=\sum\limits_{k=1}^n(a_k+ib_k)x_k^2$, $a_k,b_k\in\mathbb{R}$, $k=1,2,\dots,n$, является квадратичной формой с положительно определённой мнимой частью, то весовая обобщённая функция $\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}$ представляет собой регулярную аналитическую функцию от λ всюду, за исключением точек $\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k=0,1,2,\dots$, в которых $\mathscr{P}_\gamma^{\lambda}$ имеет простые полюсы.

Аналогично можно рассмотреть и нижнюю полуплоскость $\mathscr{P}(x)=P_1{-}iP_2=\sum\limits_{k=1}^n g_kx_k^2=\sum\limits_{k=1}^n(a_k-ib_k)x_k^2$. В этом случае аналитическое продолжение функции $\eta_\gamma(g)$ на всю нижнюю полуплоскость имеет вид

$$\eta_\gamma(g)=\prod_{k=1}^n(b_k(1+i\mu_k))^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},\quad \mu_k=\frac{a_k}{b_k}. \tag{12}$$

Таким образом, из (10) получаем две формулы. Первая — для вычетов весовой обобщённой функции $(P_1+iP_2)^\lambda_\gamma$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P_1+iP_2)^\lambda_\gamma=\frac{e^{-i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n(b_k-ia_k)^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\ \mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma. \tag{13}$$

Вторая — для вычетов весовой обобщённой функции $(P_1-iP_2)^\lambda_\gamma$:

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P_1-iP_2)^\lambda_\gamma=\frac{e^{i\frac{\pi(n+|\gamma|)}{4}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n(b_k+ia_k)^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\ \mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma. \tag{14}$$

В (13) и (14) квадратичная форма $P_2=\sum\limits_{k=1}^n b_kx_k^2$ положительно определена.

2. Весовые обобщённые функции $(\mathbf{P}+\mathbf{i0})^\lambda_\gamma$ и $(\mathbf{P}-\mathbf{i0})^\lambda_\gamma$

На основе предыдущего пункта построим весовые обобщённые функции $(P+i0)^\lambda_\gamma$ и $(P-i0)^\lambda_\gamma$. Через эти функции выражается фундаментальное решение для итерированного оператора $(\square_\gamma)^k$, где $\square_\gamma=\sum\limits_{k=1}^p B_{\gamma_k}-\sum\limits_{j=p+1}^n B_{\gamma_j}$, $k=1,2,\ldots$, и кроме того, они используются для построения вещественных степеней B-ультрагиперболического оператора $\square_\gamma$.

Рассмотрим невырожденную квадратичную форму с вещественными коэффициентами

$$P=\sum_{k=1}^n a_kx_k^2,\quad a_k\in\mathbb{R}.$$

При этом форма P имеет в каноническом представлении p положительных слагаемых и q отрицательных, $p+q=n$. Пусть $\mathscr{P}=P+iP'$, где P' — положительно определённая квадратичная форма с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности будем полагать, что

$$P'=\varepsilon(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),\quad \varepsilon>0.$$

Пусть $\mathscr{P}^\lambda_\gamma=(P+iP')^\lambda_\gamma$. Тогда весовые обобщённые функции $(P+i0)^\lambda_\gamma$ и $(P-i0)^\lambda_\gamma$ при $\mathrm{Re}\lambda>0$ определим формулами

$$(P+i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to0}(P+iP')^\lambda_\gamma,\quad (P-i0)^\lambda_\gamma=\lim_{\varepsilon\to0}(P-iP')^\lambda_\gamma,$$

в которых предельный переход осуществляется под знаком интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\mathscr{P}^\lambda\varphi x^\gamma dx$.

При $\mathrm{Re}\lambda<0$, $\lambda\neq-k$, $\lambda\neq-\frac{n+|\gamma|}{2}-k+1$, $k\in\mathbb{N}$ для определения $(P+i0)^\lambda_\gamma$ и $(P-i0)^\lambda_\gamma$ сначала применяется формула (9), а затем осуществляется предельный переход при $\varepsilon\to0$.

Весовые обобщённые функции $(P+i0)^\lambda_\gamma$ и $(P-i0)^\lambda_\gamma$ могут быть выражены через весовые обобщённые функции $P^\lambda_{\gamma,+}$ и $P^\lambda_{\gamma,-}$, определённые формулами (3) и (4) соответственно:

$$(P+i0)^\lambda_\gamma=P^\lambda_{\gamma,+}+e^{\pi\lambda i}P^\lambda_{\gamma,-}, \tag{15}$$

$$(P-i0)^\lambda_\gamma = P^\lambda_{\gamma,+} + e^{-\pi\lambda i} P^\lambda_{\gamma,-}. \tag{16}$$

Действительно, при $\mathrm{Re}\lambda>0$ весовым функционалам $(P^\lambda_{\gamma,+},\varphi)_\gamma$ и $(P^\lambda_{\gamma,-},\varphi)_\gamma$ соответствуют функции

$$P^\lambda_{\gamma,+}=\begin{cases} P^\lambda, & P>0;\\ 0, & P\leq 0,\end{cases} \qquad P^\lambda_{\gamma,-}=\begin{cases} 0, & P\geq 0;\\ (-P)^\lambda, & P<0,\end{cases}$$

где P определяется формулой (1). Тогда

$$(P\pm i0)^\lambda_\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}(P\pm i\varepsilon|x|)^\lambda_\gamma = \begin{cases} P^\lambda, & P\geq 0;\\ e^{\pm\lambda\pi i}|P|^\lambda, & P<0.\end{cases}$$

В силу единственности аналитического продолжения формулы (15) и (16) можно использовать и при $\mathrm{Re}\lambda\leq 0$, а при $\lambda=-k$, $k\in\mathbb{N}$ весовая обобщённая функция $\mathscr{P}^\lambda_\gamma$ не имеет полюсов, поэтому $(P\pm i0)^\lambda_\gamma$ в этом случае вводится по формулам (15) и (16). Таким образом, весовые обобщённые функции $(P\pm i0)^\lambda_\gamma$ являются аналитическими функциями от λ для любого комплексного λ, за исключением точек $\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k$, $k=0,1,2,\ldots$, в которых имеются простые полюсы с вычетами

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P\pm i0)^\lambda_\gamma = \lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P\pm i\varepsilon|x|)^\lambda_\gamma.$$

Поскольку форма P имеет в каноническом представлении p положительных слагаемых и q отрицательных, то из (11) и (12) получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{k=1}^n(\varepsilon-ia_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} = \prod_{k=1}^n|a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}}(-i)^{-\frac{p+|\gamma'|}{2}}\,i^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}(p+|\gamma'|-q-|\gamma''|)}\prod_{k=1}^n|a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{k=1}^n(\varepsilon+ia_k)^{-\frac{1+\gamma_k}{2}} = \prod_{k=1}^n|a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}}i^{-\frac{p+|\gamma'|}{2}}\,(-i)^{-\frac{q+|\gamma''|}{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}(-p-|\gamma'|+q+|\gamma''|)}\prod_{k=1}^n|a_k|^{-\frac{1+\gamma_k}{2}},$$

где $|\gamma'|=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_p$, $|\gamma''|=\gamma_{p+1}+\gamma_{p+2}+\cdots+\gamma_{p+q}$. Тогда, применяя формулы (13) и (14), будем иметь

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P+i0)^\lambda_\gamma = \frac{e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n|a_k|^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma(x) \tag{17}$$

и

$$\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}-k}(P-i0)^\lambda_\gamma = \frac{e^{i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{4^k k!\prod\limits_{k=1}^n|a_k|^{\frac{1+\gamma_k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+k\right)}\,\mathcal{B}^k_{\gamma,g}\delta_\gamma(x).$$

3. Фундаментальное решение B-ультрагиперболического уравнения

Пусть $x\in\mathbb{R}^+_n$, $n=p+q$, $p,q\in\mathbb{N}$. Будем искать фундаментальное решение уравнений

$$\Box^k_\gamma u = f, \tag{18}$$

где $\Box_\gamma$ — однородный линейный дифференциальный оператор вида

$$\Box_\gamma = B_{\gamma_1}+\cdots+B_{\gamma_p}-B_{\gamma_{p+1}}-\cdots-B_{\gamma_{p+q}},$$

где $p+q=n$, $\gamma=(\gamma',\gamma'')$, $\gamma'=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p)$, $\gamma''=(\gamma_{p+1},\gamma_{p+2},\ldots,\gamma_{p+q})$, $B_{\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2,\ldots,n$, $k\in\mathbb{N}$.

Фундаментальным решением уравнения (18) будем называть обобщённую весовую функцию u, такую что

$$\square_\gamma^k u=\delta_\gamma. \tag{19}$$

Теорема 1. *За исключением случая, когда $n+|\gamma|=2,4,6,\ldots$ и $k\geq\frac{n+|\gamma|}{2}$, функции*

$$u=(-1)^k\frac{e^{\pm i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P\pm i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$$

являются фундаментальными решениями уравнения $\square_\gamma^k u=f$ в смысле (19). *Если же $n+|\gamma|=2,4,6,\ldots$ и $k\geq\frac{n+|\gamma|}{2}$, то функция $(P+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=(P-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ является решением однородного уравнения $\square_{\gamma',\gamma''}^k u=0$.*

Доказательство. Из соотношения (9), имеем

$$\square_\gamma^k(P+i0)^{\lambda+k}=4^k(\lambda{+}1)\ldots(\lambda{+}k)\left(\lambda{+}\frac{n{+}|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(\lambda{+}\frac{n{+}|\gamma|}{2}{+}k{-}1\right)(P+i0)^\lambda.$$

Переходя к пределу при $\lambda\to-\frac{n+|\gamma|}{2}$ в последнем равенстве и используя формулу (17) при $k=0$, получим

$$\square_\gamma^k(P+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!\lim_{\lambda\to-\frac{n+|\gamma|}{2}}\left(\lambda{+}\frac{n{+}|\gamma|}{2}\right)(P+i0)^\lambda=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!\operatorname*{res}_{\lambda=-\frac{n+|\gamma|}{2}}(P+i0)^\lambda=$$

$$=4^k\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)(k-1)!e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}|S_1^+(n)|_\gamma\,\delta_\gamma(x).$$

Если число $n{+}|\gamma|$ чётное и $k\geq\frac{n+|\gamma|}{2}$, то среди множителей $\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)$ найдётся равный нулю и, следовательно, $\square_\gamma^k(P{+}i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}=0$ и $u=(P{+}i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ есть решение однородного уравнения $\square_\gamma^k u=0$. При всех остальных значениях $n{+}|\gamma|$ и k функция

$$u=(-1)^k\frac{e^{i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P+i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k} \tag{20}$$

является фундаментальным в смысле (19) решением уравнения (18). В (20) были использованы соотношения

$$\left(1-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\ldots\left(k-\frac{n+|\gamma|}{2}\right)=(-1)^k\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)=$$

$$=(-1)^k\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}.$$

Аналогично можно показать, что если число $n+|\gamma|$ чётное и $k \geq \frac{n+|\gamma|}{2}$, то $u = (P-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$ есть решение однородного уравнения $\Box_\gamma^k u = 0$. При всех остальных значениях $n+|\gamma|$ и k функция

$$u = (-1)^k \frac{e^{-i\frac{\pi(q+|\gamma''|)}{2}}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-k\right)}{4^k(k-1)!|S_1^+(n)|_\gamma \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}-1\right)}(P-i0)^{-\frac{n+|\gamma|}{2}+k}$$

является фундаментальным в смысле (19) решением уравнения (18). □

Отметим, что в [13] было получено фундаментальное решение (18), выраженное через вещественнозначные функции. Однако там не был учтён случай, когда $n+|\gamma| = 2,4,6,\ldots$ и $k \geq \frac{n+|\gamma|}{2}$. Кроме того, полученные в данной статье представления фундаментальных решений являются наиболее удобными с точки зрения обобщений на случай произвольного вещественного параметра k.

Список литературы

1. **Гельфанд, И. М.** Обобщённые функции и действия над ними : учеб. пособие / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов — М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 440 с.
2. **Киприянов, И. А.** Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.
3. **Ляхов, Л. Н.** Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 516–528.
4. **Ляхов, Л. Н.** Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л. Н. Ляхов, И. П. Половинкин, Э. Л. Шишкина // Докл. Акад. наук. — 2014. — Т. 459, № 5. — С. 533–538.
5. **Hörmander, L.** The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I. / L. Hörmander. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2003. — 440 p.
6. **Ляхов, Л. Н.** B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк : Липец. гос. пед. ун-т, 2007. — 232 с.
7. **Шишкина, Э. Л.** Весовые обобщённые функции и фундаментальное решение B-ультрагиперболического уравнения / Э. Л. Шишкина // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы 68-й науч. конф. «Герцен. чтения — 2015» / ред. В. Ф. Зайцев, В. Д. Будаев, А. В. Флегонтов. — СПб. : Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена, 2015. — С. 125–128.
8. **Shishkina, E. L.** On weighted generalized functions associated with quadratic forms / E. L. Shishkina // Проблемы анализа. — 2016. — Т. 5 (23), вып. 2. — С. 52–68.
9. **Шишкина, Э. Л.** Обобщённая весовая функция $P^\lambda_{\gamma,+}$, отвечающая квадратичной форме / Э. Л. Шишкина // Мат. форум. Исслед. по мат. анализу, дифференц. уравнениям и их прил. (Итоги науки. Юг России). — 2016. — Т. 10, ч. 2. — С. 88–102.
10. **Шишкина, Э. Л.** Обобщённая весовая функция r^λ / Э. Л. Шишкина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2006. — № 1. — С. 215–221.
11. **Киприянов, И. А.** Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным / И. А. Киприянов, Л. А. Иванов // Тр. семинара С. Л. Соболева. Акад. наук СССР, Сиб. отд. — 1981. — № 1. — С. 55–77.
12. **Ляхов, Л. Н.** Пространство B-потенциалов Рисса / Л. Н. Ляхов // Докл. Акад. наук. — 1994. — Т. 334, № 3. — С. 278–280.

13. **Sajğlam, A.** On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves / A. Sajğlam, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya // Selçuk J. of Applied Mathematics. — 2009. — Vol. 10, no. 1. — P. 85–93.

Поступила в редакцию 12.01.2017
После переработки 24.03.2017

Сведения об авторе

Шишкина Элина Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: ilina_dico@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 1. P. 88–98.

WEIGHTED DISTRIBUTION CORRESPONDING TO QUADRATIC FORM WITH COMPLEX COEFFICIENTS

E. L. Shishkina

Voronezh State University, Voronezh, Russia
ilina_dico@mail.ru

Certain types of weighted distributions associated with quadratic form with complex coefficients are considered. These distributions adopted for the work with differential operators containing the Bessel operator. The formulas are obtained for the fundamental solution of the iterated ultra-hyperbolic equation with Bessel operators instead of the second derivatives.

Keywords: *weighted distributions, fundamental solution, Bessel operator, B-ultra-hyperbolic operator.*

References

1. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.** *Generalized Functions. Vol. I. Properties and Operations.* Academic Press., 1964. 423 p.
2. **Kipriyanov I.A.** *Singulyarnye ellipticheskiye krayevye zadachi* [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 200 p. (In Russ.).
3. **Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L.** On a Kipriyanov problem for a singular ultrahyperbolic equation. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 513–525.
4. **Lyakhov L.N., Polovinkin I.P., Shishkina E.L.** Formulas for the solution of the Cauchy problem for a singular wave equation with Bessel time operator. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, iss. 3, pp. 737–742.
5. **Hörmander L.** *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2003. 440 p.
6. **Lyakhov L.N.** *B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nym uravneniyam s B-potentsial'nymi yadrami* [B-hypersingular integrals and its applications to Kipriyanov's functional classes and to integral equations with B-potential kernels]. Lipetsk, Lipetsk State Pedagogical University Publ., 2007. 232 p. (In Russ.).

7. **Shishkina E.L.** Vesovye obobshchyonnye functsii i fundamental'noe reshenie B-ul'tragiperbolicheskogo uravneniya [Weighted distribution and the fundamental solution of the B-ultrahyperbolic equation]. *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya* [Some actual problems of mathematics and mathematical education]. St. Petersburg, Gertsen Russian State Pedagogical University Publ., 2015. Pp. 125–128. (In Russ.).
8. **Shishkina E.L.** On weighted generalized functions associated with quadratic forms. *Issues of Analysis*, 2016, vol. 5 (23), iss. 2, pp. 52–68.
9. **Shishkina E.L.** Obobshchyonnaya vesovaya funktsiya $P^{\lambda}_{\gamma,+}$, otvechayushchaya kvadratichnoy forme [Weighted distribution $P^{\lambda}_{\gamma,+}$ corresponding to a quadratic form]. *Matematicheskiy forum. Issledovaniya po matematicheskomu analizu, differentsial'nym uravneniyam i ikh prilozheniyam (Itogi nauki. Yug Rossii)* [Mathematical forum. Research on mathematical analysis, differential equations and their applications (Scientific results. The South of Russia)], 2016, vol. 10, pt. 2, pp. 88–102. (In Russ.).
10. **Shishkina E.L.** Obobshchyonnaya vesovaya funktsiya r^{λ} [Weighted distribution r^{λ}]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya fizika, matematika* [Herald of Voronezh State University. Series physics, mathematics], 2006, no. 1, pp. 215–221. (In Russ.).
11. **Kipriyanov I.A., Ivanov L.A.** Poluchenie fundamental'nykh resheniy dlya odnorodnykh uravneiy s osobennostyami po neskol'kim peremennym [Obtaining of fundamental solutions for homogeneous equations with singularities with respect to several variables]. *Akademiya nauk SSSR, Sibirskoye otdeleniye. Trudy seminara S.L. Soboleva* [Academy of Sciences of USSR, Siberian Branch. Proceedings of S.L. Sobolev's workshop], 1981, no. 1, pp. 55–77. (In Russ.).
12. **Lyakhov L.N.** Prostranstvo B-potentsialov Rissa [Riezs B-potentials space]. *Doklady akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 1994, vol. 334, no. 3, pp. 278–280. (In Russ.).
13. **Sajğlam A., Yıldırım H., Sarıkaya M. Z.** On the product of the ultra-hyperbolic Bessel operator related to the elastic waves. *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 2009, vol. 10, no. 1, pp. 85–93.

Accepted article received 12.01.2017
Corrections received 24.03.2017