Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 3. С. 277–286.

УДК 517.977 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17302

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ВО ВРЕМЕННЫ́Х ШКАЛАХ ДВУХ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ

Н. Н. Петров[a], **Е. С. Можегова**[b]

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
[a]*kma3@list.ru*, [b]*mozhegovalena@yandex.ru*

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая уравнениями в заданной временно́й шкале. Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями или поимка двух убегающих. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: *дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, временна́я шкала.*

Введение

В задачах конфликтного взаимодействия управляемых объектов наряду с методами, ориентированными на построение оптимальных стратегий [1; 2], существуют подходы, нацеленные на гарантированный результат. К таким подходам относятся, в частности, метод Л. С. Понтрягина [3] и метод разрешающих функций [4–6], позволяющий эффективно использовать технику многозначных отображений для получения необходимых результатов. Метод разрешающих функций, предложенный для исследования дифференциальных игр, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, находит применение для анализа конфликтного взаимодействия управляемых объектов, движение которых описывается, в том числе, уравнениями с дробными производными, уравнениями во временны́х шкалах. Б. Олбах и С. Хилгер в работах [7; 8] предложили подход к исследованию дифференциальных и разностных уравнений с единых позиций. Оказывается, что некоторым результатам, полученным отдельно для каждой из этих теорий, можно придать больший характер общности, если допустить возможность задания динамических систем на произвольных замнутых подмножествах $\mathbb{R}$, названных временны́ми шкалами. Временны́е шкалы находят своё применение при построении различных математических моделей [9; 10]. Неантагонистическая игра N лиц во временно́й шкале

Работа первым автором выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010, и при поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00293.

рассматривалась в работе [11]. Достаточные условия поимки одного убегающего в задаче простого группового преследования в заданной временно́й шкале получены в работе [12]. В работе [13] рассматривалась задача простого преследования группой преследователей группы жёстко скоординированных убегающих в заданной временно́й шкале, где были получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

В данной работе в заданной временно́й шкале рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух убегающих, использующих одно и то же управление. Вводится новое условие поимки. Считается, что поимка произошла, если либо какого-то убегающего ловят два различных преследователя, либо найдутся два преследователя, такие, что один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Получены достаточные условия поимки.

1. Постановка задачи

Определение 1. Непустое замкнутое подмножество $T \subset \mathbb{R}^1$, такое, что $\sup\limits_{t\in T} t = +\infty$, называется *временно́й шкалой.*

Определение 2. Пусть T — временна́я шкала. Функция $\sigma : T \to \mathbb{R}^1$ вида $\sigma(t) = \inf\{s \in T \mid s > t\}$ называется *функцией сдвига.*

Определение 3. Функция $f : T \to \mathbb{R}^1$ называется Δ-*дифференцируемой в точке* $t \in T$, если существует такое число $\gamma \in \mathbb{R}^1$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки t, такая, что неравенство

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

справедливо для всех $s \in T \cap W$. Число γ в этом случае называется Δ-*производной* функции f в точке t, которая будет обозначаться $f^\Delta(t) = \gamma$.

Более подробную информацию о временны́х шкалах можно найти, например, в работах [14; 15].

Пусть задана некоторая временна́я шкала T, $t_0 \in T$. В пространстве $\mathbb{R}^k$, где $k \geqslant 2$, рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, 2)$ $n{+}2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и два убегающих E_1, E_2 с законами движения вида

$$x_i^\Delta = u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V, \tag{1}$$

$$y_j^\Delta = v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, $V = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leqslant 1\}$. Считаем, что $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I, j \in J$.

Введём новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1), (2) получим систему

$$z_{ij}^\Delta = u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v \in V. \tag{3}$$

Δ-измеримую функцию $v : T \to \mathbb{R}^k$ назовём допустимой, если $v(t) \in V$ для всех $t \in T$. Предысторией функции v в момент $t \in T$ будем называть сужение функции v на $[t_0, t) \cap T$. Обозначим $z^0 = \{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\}$ — вектор начальных позиций.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 4. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\mathcal{U}_i$ *преследователя* P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_1, E_2 Δ-измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

Определение 5. В игре $\Gamma(n,2)$ происходит *поимка,* если существуют момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0] \cap T$, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

a) найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$, $j \in \{1, 2\}$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$, такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$;

b) найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0] \cap T$, такие, что $z_{l1}(\tau_1) = 0$, $z_{m2}(\tau_2) = 0$.

Замечание 1. Условие поимки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поимку одного убегающего, либо один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков, и для того, чтобы её вывести из строя, нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

2. Вспомогательные результаты

Определение 6. [16]. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образуют *положительный базис в* $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, такие, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m$.

Обозначим через $\operatorname{Int} X$, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 1. [16]. *Векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *образуют положительный базис в* $\mathbb{R}^k$ *тогда и только тогда, когда* $0 \in \operatorname{Int co}\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Лемма 1. *Пусть* $a_1, \ldots, a_m, c \in \mathbb{R}^k$ *таковы, что для всех* $l \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$ *имеет место включение* $0 \in \operatorname{Int co}\{a_p, p \in J, p \neq l, c\}$. *Тогда для любых* $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ *существует такое число* $\mu > 0$, *что для всех* $l \in J_1 = \{1, 2, \ldots, m+2\}$ *набор векторов* $\{a_p, p \in J_1, p \neq l\}$ *образует положительный базис* $\mathbb{R}^k$, *где* $a_{m+1} = b_1 + \mu c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu c$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда существуют $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$, такие, что для каждого $\mu > 0$ найдётся номер $l(\mu) \in J_1$, для которого набор векторов $\{a_i, i \in J_1, i \neq l(\mu)\}$ не образует положительного базиса $\mathbb{R}^k$. Тогда в силу теоремы 1 получаем, что $0 \notin \operatorname{Int co}\{a_i, i \in J_1, i \neq l(\mu)\}$. Следовательно, существуют последовательность $\{\mu_s\}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_s = +\infty$, и номер $l \in J_1$, для которых для всех s верно

$$0 \notin \operatorname{Int co}\{a_i, i \in J_1, i \neq l\}, \tag{4}$$

где $a_{m+1} = b_1 + \mu_s c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu_s c$. Из (4) следует, что существует последовательность $\{p_s\}$, $p_s \in \mathbb{R}^k$, $\|p_s\| = 1$, такая, что $(a_i, p_s) \leqslant 0$ для всех $i \in J_1$, $i \neq l$. Из последовательности $\{p_s\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Считаем, что последовательность $\{p_s\}$ сама сходится к вектору p. Тогда $\|p\| = 1$.

Если $l \in J$, то имеем

$$(a_i, p_s) \leqslant 0, \ i \in J, \ i \neq l, \ (b_1 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0, \ (b_2 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0.$$

Отсюда получаем, что справедливы неравенства

$$(a_i, p) \leqslant 0,\ i \in J,\ i \neq l,\ (p, c) \leqslant 0.$$

Это означает, что $0 \notin \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq l, c\}$, но это противоречит условию леммы. Если $l = m + 1$, то имеем

$$(a_i, p_s) \leqslant 0,\ i \in J,\ (b_2 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$(a_i, p) \leqslant 0,\ i \in J,\ (p, c) \leqslant 0,$$

но это противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

Введём следующие обозначения:

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \Omega(J) = \{(i_1, i_2) \big| i_1, i_2 \in J, i_1 \neq i_2\},$$

где J — конечное множество натуральных чисел.

Лемма 2. [6, лемма 8.1, с. 89]. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено включение $0 \in \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq l\}$. Тогда*

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(a_i, v) > 0.$$

Лемма 3. *Пусть $a_1, a_2 \ldots, a_m \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено включение $0 \in \operatorname{Intco}\{a_i, i \in J, i \neq l\}$. Тогда существует момент $\tau \in T$, такой, что для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся номера $r, q \in J$, для которых*

$$\int_{t_0}^{\tau} \lambda(a_r, v(s))\Delta s \geqslant 1, \quad \int_{t_0}^{\tau} \lambda(a_q, v(s))\Delta s \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное Δ-допустимое управление убегающих. Тогда имеем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_{t_0}^{t} \lambda(a_j, v(s))\Delta s \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_{t_0}^{t} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\Delta s. \tag{5}$$

Для любых неотрицательных чисел $\gamma_\Lambda(\Lambda \in \Omega(J))$ имеет место неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_m^2} \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\Lambda, \text{ где } C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}.$$

Поэтому

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_{t_0}^{t} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\Delta s \geqslant \frac{1}{C_m^2} \int_{t_0}^{t} \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\Delta s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C_m^2} \int_{t_0}^{t} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\Delta s.$$

В силу леммы 2 справедливо неравенство $\max\limits_{\Lambda\in\Omega(J)}\min\limits_{j\in\Lambda}\lambda(a_j,v)\geqslant\delta>0$ для всех $v\in V$. Следовательно, из (5) получаем

$$\max_{\Lambda\in\Omega(J)}\min_{j\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda(a_j,v(s))\Delta s\geqslant\frac{\delta}{C_m^2}\int_{t_0}^{t}\Delta s.$$

Так как

$$\lim_{t\in T,t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\Delta s=+\infty,$$

то из последнего неравенства следует, что существует $\tau\in T$, для которого справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega(J)}\min_{j\in\Lambda}\int_{t_0}^{\tau}\lambda(a_j,v(s))\Delta s\geqslant 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. □

3. Достаточные условия поимки

Теорема 2. *Пусть существует множество* $I_0\subset I$, $|I_0|=n-2$, *такое, что для всех* $l\in I_0$

$$\operatorname{Intco}\{x_i^0,i\in I_0,i\neq l\}\cap\operatorname{co}\{y_1^0,y_2^0\}\neq\varnothing. \tag{6}$$

Тогда в игре $\Gamma(n,2)$ *происходит поимка.*

Доказательство. Из условия (6) следует [6], что для всех $l\in I_0$ набор

$$\{x_i^0-y_1^0,x_i^0-y_2^0,i\in I_0,i\neq l\}$$

образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Обозначим $c=y_1^0-y_2^0$. Так как $x_i^0-y_2^0=x_i^0-y_1^0+c$, то для всех $l\in I_0$ положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}^0,i\in I_0,i\neq l,c\}$. Считаем, что $I_0=\{1,\ldots,n-2\}$. Из леммы 1 следует, что существует число $\mu>0$, такое, что для всех $l\in I$ векторы $\{w_i^0,i\in I,i\neq l\}$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, где

$$w_i^0=\begin{cases}z_{i1}^0, & \text{если } i\in I_0,\\ z_{n-12}^0+\mu c, & \text{если } i=n-1,\\ z_{n2}^0+\mu c, & \text{если } i=n.\end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 1 получаем, что для всех $l\in I$

$$0\in\operatorname{Intco}\{w_i^0,i\in I,i\neq l\}.$$

Из лемм 2, 3 следует, что число

$$T_0=\min\{t>t_0\big|t\in T,\ \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega(I)}\min_{j\in\Lambda}\int_{t_0}^{t}\lambda(w_j^0,v(s))\Delta s\geqslant 1\}$$

конечно. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Определим функции

$$h_i(t)=1-\int_{t_0}^{t}\lambda(w_i^0,v(s))\Delta s.$$

Предпишем преследователю P_i строить своё управление следующим образом. Если в момент $t \in T$ выполняется неравенство $h_i(t) \geqslant 0$, то полагаем

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(w_i^0, v(t)) w_i^0.$$

Если $\tau \in T$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau) = 0$, то считаем, что $\lambda(w_i^0, v(t)) = 0$ для всех $t > \tau$.

Пусть $\tau \in T$ — первый момент времени, для которого $h_i(\tau) < 0$, а для всех $t \in T$, $t < \tau$ выполняется неравенство $h_i(t) > 0$. Определим число $\tau_i^* = \sup\{t \in T \mid h_i(t) > 0\}$. Тогда $(\tau_i^*, \tau) \cap T = \emptyset$. Действительно, если бы существовал момент $t \in (\tau_i^*, \tau) \cap T$, то выполнялось бы неравенство $h_i(t) > 0$, что невозможно в силу определения числа τ_i^*. Полагаем в этом случае

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda^*(w_i^0, v(\tau)) w_i^0, \text{ где } \lambda^*(w_i^0, v(\tau)) = \frac{h_i(\tau_i^*)}{\sigma(\tau_i^*) - \tau_i^*} = \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau - \tau_i^*}.$$

Отметим, что в данном случае $\lambda^*(w_i^0, v(\tau)) \leqslant \lambda(w_i^0, v(\tau))$, и поэтому $u_i(\tau) \in V$. Тогда

$$1 - \int_{t_0}^{\tau_i^*} \lambda(w_i^0, v(s)) \Delta s - \int_{\tau_i^*}^{\tau} \lambda^*(w_i^0, v(s)) \Delta s = h_i(\tau_i^*) - \int_{\tau_i^*}^{\tau} \frac{h_i(\tau_i^*)}{\tau - \tau_i^*} \Delta s = 0.$$

Тогда из определения управлений убегающих и системы (3) следует, что для всех $t \in [t_0, T_0] \cap T$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_i(t), \ i \in I_0, \\ z_{n-12}(t) = z_{n-12}^0 h_{n-1}(t) - \mu c(1 - h_{n-1}(t)), \\ z_{n2}(t) = z_{n2}^0 h_n(t) - \mu c(1 - h_n(t)). \end{gathered}$$

Из леммы 3 и определения управлений убегающих следует, что существуют номера $l, m \in I$, такие, что $h_l(T_0) = 0$, $h_m(T_0) = 0$. При этом возможны следующие варианты.

1. $l, m \in I_0$. В этом случае преследователи P_l, P_m осуществляют поимку убегающего E_1, что означает, что в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

2. $l \in I_0$, $m \in \{n-1, n\}$. Это означает, что преследователь P_l осуществляет поимку убегающего E_1. Пусть $m = n - 1$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$. Докажем, что

$$y_2(T_0) \in \operatorname{Intco}\{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{7}$$

Так как для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ справедливы следующие равенства

$$z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0), \quad z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c = z_{i1}^0 h_i(T_0) + z_{i2}^0 - z_{i1}^0,$$

то

$$z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, \quad z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}.$$

Из условия теоремы следует, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$.

Следовательно, положительный базис $\mathbb{R}^k$ образуют векторы

$$\left\{\frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}, i \in I_0, i \neq l\right\}.$$

Из условия $h_i(T_0) \in (0,1]$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ получаем, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i1}(T_0), z_{i2}(T_0), i \in I_0, i \neq l\}. \tag{8}$$

Из равенства $z_{n-12}(T_0) = \mu(y_2(T_0) - y_1(T_0))$ получаем, что для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ имеет место равенство

$$z_{i1}(T_0) = x_i(T_0) - y_1(T_0) = x_i(T_0) - y_2(T_0) + y_2(T_0) - y_1(T_0) = z_{i2}(T_0) + \frac{1}{\mu} z_{n-12}(T_0). \tag{9}$$

Из (8), (9) следует, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i2}(T_0), i \in I_0 \cup \{n-1\}, i \neq l\}.$$

Из последнего соотношения и теоремы 1 вытекает (7). Принимая момент T_0 за начальный и используя теорему работы [12], получаем, что преследователи P_i, $i \in I$, $i \neq l$ осуществляют поимку убегающего E_2. Следовательно, в игре $\Gamma(n, 2)$ происходит поимка.

3. $l = n-1$, $m = n$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$, $z_{n2}(T_0) = -\mu c$. Отметим, что для всех $i \in I_0$ $z_{i1}(T_0) = z^0_{i1} h_i(T_0)$. Докажем, что в этом случае для всех $l \in I$ выполняется включение

$$y_2(T_0) \in \operatorname{Intco}\{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{10}$$

Предположим, что существует $l \in I$, для которого

$$y_2(T_0) \notin \operatorname{Intco}\{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{11}$$

Возможны следующие ситуации.

3.1. $l \in I_0$. Из (11) следует, что набор $\{z_{i2}(T_0), i \in I, i \neq l\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Поэтому существует единичный вектор $p \in \mathbb{R}^k$, для которого $(p, z_{i2}(T_0)) \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $i \neq l$.

Из условия $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$ получаем, что $(p, c) \geqslant 0$. Так как для всех $i \in I_0$ $z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c$, то для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ $(p, z_{i1}(T_0)) = (p, z_{i2}(T_0)) - (p, c) \leqslant 0$. Следовательно, $(p, z^0_{i1}) \leqslant 0$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$. Кроме того, из равенства

$$z^0_{i2} = z_{i2}(T_0) + z^0_{i1}(1 - h_i(T_0))$$

и ранее доказанного получим, что $(p, z^0_{i2}) \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $i \neq l$. Получили, что набор $\{z^0_{i1}, z^0_{i2}, i \in I_0, i \neq l\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (10) доказано.

3.2. $l \in \{n-1, n\}$. Считаем, что $l = n$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта **3.1**, получаем, что векторы $\{z^0_{i1}, z^0_{i2}, i \in I_0\}$ не образуют положительного базиса $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (10) доказано.

Принимая момент времени T_0 за начальный и используя результаты работы [13], получим, что найдутся преследователи P_q, P_r, $q \neq r$, осуществляющие поимку убегающего E_2. Теорема доказана. □

Список литературы

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974.
2. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М. : Наука, 1981.
3. **Понтрягин Л. С.** Избранные научные труды. Т. 2. М. : Наука, 1988.
4. **Чикрий А. А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев : Наукова думка, 1992.
5. **Григоренко Н. Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М. : Изд-во МГУ, 1990.
6. **Благодатских А. И., Петров Н. Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск : Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
7. **Aulbach B., Hilger S.** Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale // Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems. 1990. Vol. 59. P. 9–20.
8. **Hilger S.** Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Results in Mathematics. 1990. Vol. 18. P. 18–56.
9. **Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.** Impulsive Differential Equations and Inclusions. New York : Hindawi Publishing, 2006.
10. **Bohner M., Peterson A.** Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Boston : Birkhauser, 2003.
11. **Martins N., Torres D.** Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales // Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization. 2011. Vol. 31, no. 1. P. 23–37.
12. **Петров Н. Н.** Задача простого группового преследования с фазовыми ограничениями во временны́х шкалах // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 249–258.
13. **Петров Н. Н.** Об одной задаче преследования группы убегающих во временных шкалах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. С. 163–171.
14. **Guseinov G. S.** Integration on time scales // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. Vol. 285, no. 1. P. 107–127.
15. **Cabada A., Vivero D. R.** Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives // Mathematical and Computer Modelling. 2006. Vol. 43, no. 1–2. P. 194–207.
16. **Петров Н. Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

Поступила в редакцию 07.04.2022.
После переработки 07.07.2022.

Сведения об авторах

Петров Николай Никандрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия; e-mail: kma3@list.ru.

Можегова Елена Сергеевна, аспирантка кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия; e-mail: mozhegovalena@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 3. P. 277–286.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17302

ON A SIMPLE PURSUIT PROBLEM ON TIME SCALES OF TWO COORDINATED EVADERS

N.N. Petrov[a], **E.S. Mozhegova**[b]

Udmurt State University, Izhevsk, Russia
[a]*kma3@list.ru,* [b]*mozhegovalena@yandex.ru*

In the finite-dimensional Euclidean space, the problem of simple pursuit of two evaders by a group of pursuers is considered, described by equations on a given time scale. It is assumed that all evaders use the same control. The pursuers use counterstrategies based on information about the initial positions and the control history of the evaders. The set of admissible controls is a unit ball centered at zero, target sets are the origin. The goal of the pursuers' group is to capture at least one evader by two pursuers or to capture two evaders. In terms of initial positions and game parameters a sufficient condition for the capture is obtained. In the study, the method of resolving functions is used as a basic one, which allows obtaining sufficient conditions for the solvability of the approach problem in some guaranteed time.

Keywords: *differential game, group pursuit, evader, pursuer, time scale.*

References

1. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow, Nauka Publ., 1974. (In Russ.).
2. **Subbotin A.I., Chentsov A.G.** *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981. (In Russ.).
3. **Pontryagin L.S.** *Izbrannye nauchnye trudy* [Selected scientific works]. Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1988. (In Russ.).
4. **Chikrii A.A.** *Conflict-controlled processes.* Boston, London, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1997.
5. **Grigorenko N.L.** *Matematicheskiye metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods of control a few dynamic processes]. Moscow, Moscow State University, 1990. (In Russ.).
6. **Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.** *Konfliktnoye vzaimodeistviye grupp upravlyaemykh obiektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk, Udmurt State University, 2009. (In Russ.).
7. **Aulbach B., Hilger S.** Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale. *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems*, 1990, vol. 59, pp. 9–20.
8. **Hilger S.** Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results in Mathematics*, 1990, vol. 18, pp. 18–56.
9. **Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.** *Impulsive Differential Equations and Inclusions.* New York, Hindawi Publishing, 2006.
10. **Bohner M., Peterson A.** *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Boston, Birkhäuser, 2003.

The work was carried out by the first author with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of state task No. 075-01265-22-00, project FEWS-2020-0010, and with the support of the Russian Foundation for Basic Research within the framework of scientific project 20-01-00293.

11. **Martins N., Torres D.** Necessary conditions for linear noncooperative N-player delta differential games on time scales. *Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2011, vol. 31, no. 1, pp. 23–37.
12. **Petrov N.N.** The problem of simple group pursuit with phase constraints in time scales. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta: Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 249–258.
13. **Petrov N.N.** Matrix resolving functions in a linear problem of group pursuit with multiple capture. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 185–196.
14. **Guseinov G.S.** Integration on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, vol. 285, no. 1, pp. 107–127.
15. **Cabada A., Vivero D.R.** Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral; application to the calculus of Δ-antiderivatives. *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, vol. 43, no. 1–2, pp. 194–207.
16. **Petrov N.N.** About controllability of autonomous systems. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations], 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617. (In Russ.).

Article received 07.04.2022.
Corrections received 07.07.2022.