*Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 2. С. 234–253.*

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17206

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

**С. Г. Пятков**[a], **В. А. Баранчук**[b]

*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия*
[a]*s_pyatkov@ugrasu.ru*, [b]*vladinho@mail.ru*

Рассматривается вопрос о корректности в пространствах Соболева обратных задач об определении граничной функции, входящей в граничное условие типа Робина в параболическом случае. Получена теорема существования и единственности решения. Доказательство основано на получаемых априорных оценках и методе продолжения по параметру. Метод является конструктивным, и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи.

**Ключевые слова:** *обратная задача, тепломассоперенос, параболическое уравнение, граничное условие Робина.*

## Введение

Мы исследуем обратные задачи об определении граничных режимов, возникающие в задачах тепломассопереноса. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u$, $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\Gamma$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$Bu|_S = g(t,x) \ \ (S = (0,T) \times \Gamma), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где $Bu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(t,x)u$, $\nu$ — внешняя единичная нормаль к $\Gamma$, и условиями переопределения

$$u(t,b_i) = \psi_i(t) \ (i = 1,2,\dots,r), \tag{3}$$

где $b_i \in \Gamma$, $\{b_i\}_{i=1}^{r}$ — некоторый набор точек. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), и неизвестной функции $g(t,x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_i(t)\Phi_i(t,x)$, где функции $\Phi_i$ заданы, а функции $\alpha_i$ считаются неизвестными.

Обратные задачи о нахождении неизвестных граничных режимов, в частности задачи конвективного теплообмена, являются классическими. Они возникают в самых различных задачах математической физики: описание различных процессов тепломассопереноса, проектирование тепловой защиты, идентификация и моделирование теплопереноса в теплозащитных материалах и покрытиях, моделирование свойств и тепловых режимов многоразовой тепловой защиты аэрокосмических аппаратов, исследование композитных материалов, определение потоков парниковых газов и т. п. (см. [1–5]).

---

Работа поддержана грантом Российского научного фонда и правительством Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (проект № 22-11-20031).

В настоящее время имеется большое количество работ, посвящённых численному решению задач (1)–(3) в различных постановках, возникающих в приложениях; точки $\{b_i\}$ в (3) могут быть как внутренними [1; 4–13], так и граничными точками [13–16] области $G$. Основной метод построения приближённого решения — сведение задачи к задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала (см., например, [6; 9; 11; 13; 14; 16; 17]). Большое количество работ посвящено также близкой задаче об определении коэффициента теплопередачи $\beta$ с использованием тех же условий переопределения (3), которая в линеаризованной постановке совпадает с задачей (1)–(3) (см. [18–24] и библиографию в этих работах).

Теоретических результатов, посвящённых задаче (1)–(3), крайне мало. В работе [7] получена теорема единственности решения в случае $n = 1$, в этом же случае в работе [12] получена теорема существования и единственности классического решения в задаче об одновременном определении теплового потока и старшего коэффициента в уравнении, зависящего от времени. Однако случай $n = 1$ существенно проще для исследования. Единственная работа, посвящённая задаче (1)–(3) в многомерном случае, есть работа [25] (см. также [26]), где при $Mu = u_t - \Delta u$ и $m = 1$ была доказана теорема существования и единственности классического решения задачи об определении потока и теорема единственности в задаче об определении коэффициента теплопередачи. Доказательство основано на сведении задачи к интегральному уравнению Абеля за счёт выделения главной части функции Грина. По-видимому, перенести результаты с помощью этого метода на случай общих параболических уравнений и систем вряд ли возможно. В данной работе мы опишем другой подход к исследованию задачи (1)–(3) об определении потока $g(t, x)$, основанный на сведении задачи к интегральному уравнению Вольтерры второго рода, в этом случае решение находится методом последовательных приближений. На этой основе можно построить и новый метод численного решения задачи. В пространствах Соболева мы получаем теорему существования и единственности решений. Полученные результаты допускают обобщение, и аналогичная теорема в задаче об определении коэффициента теплопередачи также справедлива.

## 1. Определения и вспомогательные результаты

Пусть $E$ — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ ($G$ — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определённых на $G$ со значениями в $E$ и конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ [27]. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. будем использовать стандартные (см. [27; 28]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [29]. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) мы считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно, $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u, v) = \int_G u(x)v(x)dx$.

Далее мы считаем, что параметр $p > n+2$ зафиксирован. Говорим, что граница $\Gamma$ данной области $G$ принадлежит классу $C^s$, $s \geq 1$ (см. определение в [29, гл. 1], если для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдётся окрестность $U$ (координатная окрестность) этой точки и система координат $y$ (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такая, что ось $y_n$ направлена по внутренней нормали к $\Gamma$ в точке $x_0$ и уравнение части границы $U \cap \Gamma$ имеет вид $y_n = \gamma(y')$, $\gamma(0) = 0$, $|y'| < \delta$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, причём $\gamma \in C^s(\overline{B'_\delta(0)})$ ($B'_\delta(0) = \{y' : |y'| < \delta\}$) и $G \cap U = \{y : |y'| < \delta, 0 < y_n - \gamma(y') < \delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap U =$

$\{y : |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma(y') < 0\}$. Числа $\delta, \delta_1$ для области $G$ фиксированы, причём без ограничения общности считаем, что $\delta_1 > (M+1)\delta$, где $M$ постоянная Липшица функции $\gamma$. Обозначим такой параметр $\delta$ через $\delta_\Gamma$.

Пусть $B_\delta(b_i)$ — шар радиуса $\delta$ с центром в точке $b_i$. Параметр $\delta > 0$ назовём допустимым, если $\overline{B_\delta(b_i)} \cap \overline{B_\delta(b_j)} = \emptyset$ для $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$. Введём обозначения: $Q^\tau = (0,\tau) \times G$, $G_\delta = \cup_i B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap G_\delta$, $S_\delta = (0,T) \times \Gamma_\delta$, $S^\tau = (0,\tau) \times \Gamma$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Далее, не оговаривая это дополнительно, считаем, что допустимый параметр $\delta > 0$, рассматриваемый ниже в условиях на данные, таков, что $\delta < \delta_\Gamma$. Рассматривая задачу (1)–(3), мы предполагаем, что

$$\Gamma \in C^2, \quad \Gamma_\delta \in C^3. \tag{4}$$

Мы будем использовать в пространстве $W_p^s(0,\beta;E)$ $(s \in (0,1),\ \beta > 0,\ E$ — банахово пространство) норму $\|q(t)\|_{W_p^s(0,\beta;E)} = (\|q\|^p_{L_p(0,\beta;E)} + \langle q\rangle^p_{s,\beta})^{1/p}$,

$$\langle q\rangle^p_{s,\beta} = \int_0^\beta \int_0^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2.$$

Если $E = \mathbb{R}$, то мы получим обычное пространство $W_p^s(0,\beta)$. При $s \in (0,1)$ положим $\tilde{W}_p^s(0,\beta;E) = \{q \in W_p^s(0,\beta;E) :\ t^{-s}q(t) \in L_p(0,\beta;E)\}$. Наделим это пространство нормой $\|q(t)\|^p_{\tilde{W}_p^s(0,\beta;E)} = \|\frac{q}{t^s}\|^p_{L_p(0,\beta;E)} + \langle q\rangle^p_{s,\beta}$. Если $s > 1/p$ и $q \in \tilde{W}_p^s(0,\beta;E)$, то $q(0) = 0$ и эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(\alpha,\beta;E)}$ для функций $q(t)$, таких, что $q(0) = 0$ эквивалентны (см. [27, пункт 3.2.6, лемма 1]). Пространства $\tilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G))$ и $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\beta) = \tilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G)) \cap L_p(0,\beta;W_p^{2s}(G))$ при $s \neq 1/p$ состоят из функций $v(t,x)$ из $W_p^s(0,\beta;L_p(G))$ и $W_p^{s,2s}(Q^\beta)$ соответственно, таких, что $v(0,x) = 0$ при $s > 1/p$. Нормы $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\beta)}$, $\|\cdot\|_{\tilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G))}$ определяются естественным образом, например, $\|u\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\beta)} = \left(\|u\|^p_{\tilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G))} + \|u\|^p_{L_p(0,\beta;W_p^{2s}(G))}\right)^{1/p}$. Аналогично определяем пространства $\tilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(\Gamma))$, $\tilde{W}_p^{s,2s}(S^\beta)$. Следующая лемма известна (см. [30, леммы 1–4]).

**Лемма 1.** *Существует постоянная $C$, не зависящая от $\tau \in (0,T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S^\tau)} \leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)},\ s_1 = 1 - 1/2p,$$
$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)} \leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)},\ s_0 = 1/2 - 1/2p,$$

*для всех $v \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$, таких, что $v(x,0) = 0$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к $\Gamma$.*

**Лемма 2.** *Пусть $s \in ((n+2)/2p, 1)$. Тогда произведение $q \cdot v$ функций класса $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ $(\tau \in (0,T])$ снова принадлежит $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, а если $q \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, то $qv \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \leq c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}(\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q^\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q^\tau)}).$$

*Если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то аналогичная оценка имеет вид*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \leq c_1\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

*а если* $v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$, *то*

$$\|qv\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \leq c_2\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)},$$

*где постоянные* $c_i$, $i = 0,1,2$ *не зависят от* $q, v$ *и* $\tau \in (0,T]$. *Если функция* $v(t)$ *строго отделена от нуля в* $Q^\tau$, *т. е.* $\delta_0 = \inf_{(t,x)\in Q^\tau}|v(t,x)| > 0$, *то отношение* $q/v$ *функций класса* $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ $(\tau \in (0,T])$ *снова принадлежит* $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, *а если* $q \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *и* $v \in W_p^{s,2s}(Q^\tau)$, *то* $q/v \in \tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *и*

$$\|q/v\|_{\tilde{W}_p^s(0,\tau)} \leq c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}(\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q^\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q^\tau)}),$$

$$\|q/v\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)} \leq c_0\|q\|_{\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

*где постоянная* $c_0$ *не зависит от функции* $q$ *и* $\tau$. *Множество* $Q^\tau$ *в этих утверждениях может быть заменено на* $S^\tau$. *В случае если* $q$ *зависит только от одной переменной* $t$, *норма* $q$ *в* $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *в этих неравенствах заменяется на норму* $q$ *в* $\tilde{W}_p^s(0,\tau)$. *Если обе функции не зависят от переменной* $x$, *то утверждение остаётся справедливым, но нормы* $\tilde{W}_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *или* $W_p^{s,2s}(Q^\tau)$ *в неравенствах заменяются на нормы* $\tilde{W}_p^s(0,\tau)$ *или* $W_p^s(0,\tau)$ *соответственно.*

Доказательство основано на определении нормы, и фактически оно содержится в доказательстве леммы 1 в [31]. Поэтому мы его опустим.

Оператор $L$ называется эллиптическим, если для некоторой постоянной $\delta_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \forall (t,x) \in Q.$$

Как мы уже отметили, допустимый параметр $\delta < \delta_\Gamma$ считается фиксированным. Приведём условия на исходные данные. Считаем, что выполнены условия

$$a_i \in L_p(Q),\ a_{kl} \in C(\overline{Q}),\ \beta \in W_p^{s_0,2s_0}(S),\ a_{kl}|_\Gamma \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \tag{5}$$

$$a_i \in L_\infty(0,T;W_p^1(G_\delta)),\ a_{kl} \in L_\infty(0,T;W_\infty^1(G_\delta)), \tag{6}$$

где $i = 0,1,\ldots,n$, $k,l = 1,2,\ldots,n$. Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$, положим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x)$.

Мы используем выпрямление границы. Это преобразование $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$, где $y$ — локальная система координат в точке $b_i$. При выполнении условия (4) это преобразование и обратное к нему $y_n = z_n + \gamma(z')$, $y' = z'$ принадлежат классу $C^3$ (т. е. $z = z(y) \in C^3(\overline{U})$). То же самое утверждение имеет место и для преобразований $x = x(y(z)) = x(z)$. Для удобства всюду ниже считаем, что на $\Gamma$ ось $y_n$ локальной системы координат в каждой точке направлена внутрь области $G$.

Пусть $U = \{z : |z'| < \delta, 0 < z_n < \delta_1\}$, $B'_\delta = \{z' : |z'| < \delta\}$. Положим $Q_0^\tau = (0,\tau) \times U$, $Q_0 = (0,T) \times U$ и $S_0^\tau = (0,\tau) \times B'_\delta$, $S_0 = (0,T) \times B'_\delta$.

Считаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G),\ f \in L_p(Q), \tag{7}$$

$$g(0,x) = B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\ g \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \tag{8}$$

$$\beta \in L_p(0,T;W_p^{2-1/p}(\Gamma_\delta)) \cap W_p^1(\Gamma_\delta;W_p^{1/2-1/2p}(0,T)). \tag{9}$$

Пусть $U_i$ — координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma$, выпрямим границу и перейдём к системе координат $z = (z', z_n)$. Тогда мы также предполагаем, что

$$\nabla_{z'} \varphi_k g(t, x^k(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0) \ (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{10}$$

$$\nabla_{z'} \varphi_i f(t, x^i(z)) \in L_p(Q_0), \ \nabla_{z'} \varphi_i u_0(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U),$$
$$\nabla_{z'} a_{kl}(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0) \ \ (k, l = 1, 2 \ldots, n, \ i = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Отметим, что условия (10), (11) не зависят от введённой локальной системы координат $y$ и системы координат $z$. Например, последнее включение в условии (11) эквивалентно тому, что для любого гладкого (например, класса $C^2$) касательного к $\Gamma_0$ векторного поля $\tau = (\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau} \in W_p^{s_0, 2s_0}((0, T) \times \Gamma_\delta), \quad (i, j = 1, 2 \ldots, n).$$

Последнее эквивалентно тому, что $\frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau} \in W_p^{s_0, 2s_0}((0, T) \times (B_\delta(b_i) \cap \Gamma))$ для всех $i$. В свою очередь $\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial \tau}$ для некоторого такого векторного поля $\tau$. Приведём вспомогательный результат. Условия (10), (11) могут быть переписаны и в терминах переменных $x$, но удобнее оставить их в вышеприведённой форме.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* (5), (7), (8) *и* $\Gamma \in C^2$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1), (2), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q)$, *причём справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S)}). \tag{12}$$

*Если* $u_0 \equiv 0$, *то для любого* $\tau \in (0, T]$ *существует единственное решение* $u \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$ *задачи* (1), (2), *при этом оно удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \leq C_1(\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S^\tau)}),$$

*где постоянная* $C_1$ *не зависит от* $\tau$.

*Доказательство.* Вначале считаем, что $\tau = T$. Утверждение о разрешимости задачи (1), (2) в классе $u \in W_p^{1,2}(Q)$ вытекает из теоремы 2.1 [28]. В случае произвольного $\tau \in (0, T]$ доказательство осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 в [30]. Поэтому мы его не приводим. □

В формулировке следующей теоремы в каждой точке $b_i$ и соответствующей окрестности $U_i$ мы будем использовать преобразование выпрямления границы и локальную систему координат $z$.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (4)–(11). *Тогда на промежутке* $(0, \tau)$ *существует единственное решение* $u$ *задачи* (1), (2), *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q^\tau)$, *причём* $\nabla_{z'} \varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_0^\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. *Если* $u_0 \equiv 0$, *то решение удовлетворяет оценке*

$$\sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'} \varphi_i u(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^\tau)} \leq C_1(\|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S^\tau)} + \|f\|_{L_p(Q^\tau)} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} (\|\nabla_{z'} \varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)} + \|\nabla_{z'} \varphi_i g(x^i(z', 0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\tau)}),$$

*где постоянная $C_1$ не зависит от $\tau \in (0,T]$ и $f, g, u_0$.*

*Доказательство.* Доказательство использует метод конечных разностей (см. лемму 4.6 гл. 2 в [3] и теорему 4, п. 4, §3, гл. 3 в [32]). Рассуждения совпадают с теми, которые приведены в первой половине доказательства теоремы 4, п. 3, §2, гл. 4 в [32]. Поэтому мы остановимся только на основных моментах.

Возьмём точку $b_i \in \Gamma$. Умножая уравнение на $\varphi_i$, для $v = \varphi_i u$, имеем:

$$Mv = v_t - Lv = \varphi_i f + [\varphi_i, L]u = \tilde{f},\ v\big|_{t=0} = \varphi_i u_0(x),\ Bv\big|_S = \varphi_i g - [\varphi_i, B]u,$$

где $[\varphi_i, L]u = \varphi_i Lu - L(\varphi_i u) = -2\sum_{l,k=1}^n a_{lk} u_{x_k}\varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk} u\varphi_{ix_l x_k} - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_{ix_k} u$ и $[\varphi_i, B]u = -\sum_{k,l=1}^n a_{kl}\nu_k\varphi_{ix_l} u$. Перейдём к локальной системе координат $y$ и обозначим полученные коэффициенты через $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_i$. Оператор $B$ будет иметь тот же вид (изменятся фактические координаты вектора $\nu$). Выпрямим границу преобразованием $z_n = y_n - \gamma(y')$, $z' = y'$ и перейдём к новым координатам $z$ в уравнении. Получим задачу

$$\begin{aligned} Mv = v_t - \tilde{L}v = \tilde{f},\quad v\big|_{t=0} = v_0(z) = \varphi_i(x^i(z))u_0(x^i(z)),\\ \tilde{B}v\big|_{z_n=0} = \varphi_i g(t, x^i(z',0)) - [\varphi_i, B]u(t, x^i(z',0)) = \tilde{g}(t,z'), \end{aligned}\tag{13}$$

где $\tilde{L}$, $\tilde{B}$ — операторы $L, B$, записанные в системе координат $z$. Обозначим коэффициенты $\tilde{L}$ через $c_{kl}, c_k$, оператор $\tilde{B}$ запишется в виде $\tilde{B}u = \sum_{k=1}^n b_k(t,z')u_{z_k} + \beta u$, где $b_n = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{k,l}\nu_k\nu_l|_{z_n=0}$. Уравнение рассматривается для $z \in U$. Пусть $\Delta_j v(z) = (v(z+e_j\eta) - v(z))/\eta$ ($e_j$ — $j$-й координатный вектор), где $|\eta| < \delta/8$ и $j \le n-1$. Тогда функция $w = \Delta_j v$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} w_t - \tilde{L}(t,z,D)w = -[\tilde{L}, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{f} = \tilde{f}_0,\\ \tilde{B}w|_{z_n=0} = [\tilde{B}, \Delta_j]v + \Delta_j\tilde{g} = \tilde{g}_0,\quad w|_{t=0} = \Delta_j v_0 = \tilde{u}_{01}, \end{aligned}\tag{14}$$

где $[\tilde{L}, \Delta_j]v = -\sum_{k,l=1}^n \Delta_j c_{kl}(t,z)v_{z_k z_l}(t, z+e_j\eta) - \sum_{k=1}^n \Delta_j c_k(t,z)v_{z_k}(t,z+e_j\eta) - \Delta_j c_0(t,z)v(t,z+e_j\eta)$, $[\tilde{B}, \Delta_j]v = -\sum_{k=1}^n \Delta_j b_k v_{z_k}(t, z'+e_j\eta, 0) + \Delta_j\beta v(t, z'+e_j\eta, 0)$. Эти равенства получаются, если мы применим оператор $\Delta_j$ в (13). Вернёмся к переменным $x$ и продолжим все функции в (14) нулём вне $U_i \cap G$. Тогда функция $w \in W_p^{1,2}(Q)$ есть решение задачи (1), (2) с некоторыми новыми правыми частями в граничном условии и уравнении, т. е.

$$Mw = w_t - Lw = \tilde{f}_0\ \ \big((t,x)\in Q\big),\quad w\big|_{t=0} = \tilde{u}_{01},\quad Bw\big|_S = \tilde{g}_0.$$

Ссылаясь на теорему 1, заключаем, что справедлива оценка

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \le C_1(\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\tilde{g}_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)} + \|\tilde{u}_{01}\|_{W_p^{2-2/p}(G)}).\tag{15}$$

В случае $u_0 = 0$ дополнительно имеем, что

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \le C_2(\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q^\tau)} + \|\tilde{g}_0\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}),\tag{16}$$

где постоянная $C_2$ уже не зависит от параметра $\tau$.

Далее необходимо показать, что нормы правых частей оцениваются постоянными, не зависящими от параметра $\eta \in (0, \delta/8)$. Получаемые ценки более или менее стандартны. Мы используем условия на данные, теоремы вложения и леммы 1, 2, а также представления вида

$$\Delta_j v_0 = \frac{1}{\eta}\int_{z_j}^{z_j+\eta} v_{0z_j}(z_1,\dots,z_{j-1},\xi,z_{j+1},\dots,z_n)\,d\xi =$$
$$= \int_0^1 v_{0z_j}(z_1,\dots,z_{j-1},z_j+\tau\eta,z_{j+1},\dots,z_n)\,d\tau = \int_0^1 v_{0z_j}(z+e_j\tau\eta)\,d\tau.$$

В частности, можно показать, что

$$\|\tilde{u}_{01}\|_{W_p^{2-2/p}(G)} \le c'\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0(x^i(z))\|_{W_p^{2-2/p}(U)}, \tag{17}$$

где правая часть не зависит от $\eta$. Аналогично

$$\|\tilde{g}_0\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)} \le c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g(t,x^i(z',0))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)}), \tag{18}$$

где опять постоянная $c$ не зависит от $\eta$. При получении этой оценки мы используем лемму 7.2 в [33], в соответствии с которой включение $u\in W_p^{s_1,2s_1}(S_0^\tau)$ влечёт, что $u_{z_j}\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)$ и справедлива соответствующая оценка. Третья необходимая нам оценка имеет вид

$$\|\tilde{f}_0\|_{L_p(Q^\tau)} \le c(\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)}), \tag{19}$$

где постоянная $c$ не зависит от $\eta$. Теперь оценки (15), (17)–(19) гарантируют оценку

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} \le C_3(\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)} +$$
$$+\|\nabla_{z'}\varphi_i g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}),$$

где постоянная $C_3$ не зависит от $\eta$. В частности, используя (12) с $T=\tau$, имеем неравенство

$$\|\Delta_j v(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_0^\tau)} \le C_4(\|\nabla_{z'}\varphi_i u_0\|_{W_p^{2-2/p}(U)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)} +$$
$$+\|\nabla_{z'}\varphi_i g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}),$$

где постоянная $C_4$ не зависит от $\eta$. В силу произвольности $j$ и известных свойств конечных разностей (см. лемму 4.11 в [29] или теорему 4, п. 4, §3, гл. 3 в [32]) заключаем, что для всех $j=1,2,\dots,n-1$ существуют обобщённые производные $v_{z_j}\in W_p^{1,2}((0,\tau)\times U)$. Утверждение теоремы об оценке на произвольном малом промежутке времени $(0,\tau)$ получается повторением рассуждений с использованием оценки (16). Получим оценку вида

$$\|\Delta_j v(t,z)\|_{W_p^{1,2}(U)} \le C_5(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(0,\tau;L_p(U))} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} +$$
$$+\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}),$$

где постоянная $C_5$ не зависит от $\tau$. Далее рассмотрим последовательность $\eta_k\to 0$ при $k\to\infty$. Выбирая подпоследовательность, если необходимо, можем считать, что соответствующие последовательности $v_{kj}=(v(t,z+\eta_k e_j)-v(t,z))/\eta_k$ сходятся слабо в $L_p(Q_0^\tau)$ вместе со своими производными к функции $v_{z_j}$, и тогда, используя неравенство вида $\|v_j\|\le\liminf_{k\to\infty}\|v_{kj}\|$, получим оценку

$$\|v_{z_j}(t,z)\|_{W_p^{1,2}(U)} \le C_8(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_0^\tau)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_0^\tau)} +$$
$$+\|f\|_{L_p(Q^\tau)} + \|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}),$$

из которой и вытекает оценка из утверждения теоремы. □

## 2. Основные результаты

Пусть $p \in (n+2, \infty)$. Приведём условия на исходные данные. Ряд этих условий мы уже сформулировали в предыдущем пункте. Считаем, что функции $\Phi_i(t,x)$ при всех $i$ обладают свойствами

$$\Phi_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S),\ \nabla_{z'}\Phi_i(t, x^j(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\ i,j = 1,2,\ldots,r. \tag{20}$$

Пусть $\Phi(t)$ — матрица с элементами $\phi_{ij} = \Phi_j(t,b_i)$ $(i,j = 1,2,\ldots,r)$. В силу теорем вложения $\Phi_i(t,b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$ (включение вытекает из результатов §6.3 и теоремы 1 на с. 424 в [34]). Дополнительные условия на данные имеют вид

$$|\det \Phi| \geq \delta_1 > 0\ \forall t \in [0,T], \tag{21}$$

$$\psi_i \in W_p^{s_1}(0,T),\ u_0(b_i) = \psi_i(0)\ (i = 1,2,\ldots,r), \tag{22}$$

где $\delta_1$ — некоторая положительная постоянная. Однако это не все условия, гарантирующие разрешимость задачи. Возьмём первое из равенств (2) в точке $(0,b_j)$. Имеем

$$Bu_0 = \frac{\partial u_0(b_j)}{\partial N} + \beta(0,b_j)u_0(b_j) = g(0,b_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(0)\Phi_i(0,b_j),\ j = 1,2,\ldots,r. \tag{23}$$

Из этой системы в силу условия (21) однозначно определяются величины $\alpha_i(0)$. Тогда, если решение задачи существует, то выполнено равенство

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial N} + \beta(0,x)u_0(x) = g(0,x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(0)\Phi_i(0,x)\ \forall x \in G, \tag{24}$$

где постоянные $\alpha_j(0)$ — решение системы (23). Положим $g_0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(0)\Phi_i(t,x)$. Считая, что условия теорем 1, 2 выполнены, построим решение $w_0$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial N} + \beta(t,x)u(t,x) = g_0, \quad (t,x) \in S.$$

Отметим, что в силу условия (20) и леммы 2 $g_0 \in W_p^{s_0,2s_0}(S)$, $\nabla_{z'} g_0(x^j(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_0)$ для всех $j$, и, таким образом, условия теорем 1, 2 будут выполнены. Сделаем замену $u = v + w_0$ в (1)–(3). Функция $v$ есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{25}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta v = \tilde{g} = g - g_0, \tag{26}$$

$$v(t,b_i) = \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0(t,b_i). \tag{27}$$

Имеем равенства $\tilde{g} = \sum_{i=1}^{r} g_i\Phi_i(t,x)$, $g_i = \alpha_i(t) - \alpha_i(0)$. Положим $\vec{g} = (g_1,\ldots,g_r)$. Сформулируем основной результат.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия* (4)–(7), (9), (11), (20)–(22), (24). *Тогда существует единственное решение $u$ задачи* (1)–(3), *такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$, причём $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_0)$, $i = 1,2,\ldots,r$.*

*Доказательство.* Чтобы установить утверждение, достаточно доказать разрешимость вспомогательной задачи (25)–(27). Фиксируя $\vec{g} \in W_p^{s_0}(0,T)$ и решая задачу

(25), (26), мы тем самым построим отображение $\vec{g} \to v(\vec{g})$. Функция $v$ обладает свойствами, указанными в формулировках теорем 1, 2. Мы сведём вопрос разрешимости задачи (25)–(27) к вопросу разрешимости приведённого ниже операторного уравнения относительно вектора $\vec{g}$, разрешимость которого устанавливается при помощи метода продолжения по параметру.

Кроме отображения $\vec{g} \to v(\vec{g})$, нам понадобится ещё одно отображение. Пусть $v$ — решение задачи (25), (26). Фиксируя $k$ и умножая уравнение (25) на $\varphi_k$, имеем

$$Mw = w_t - Lw = [\varphi_k, L]v = f_{0k}, \quad w = \varphi_k v, \quad w\big|_{t=0} = 0, \tag{28}$$

где $[\varphi_k, L]v = \varphi_k Lv - L(\varphi_k v) = -2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}\varphi_{kx_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v\varphi_{kx_ix_i} - \sum_{i=1}^n a_i\varphi_{kx_i}v$. Сделав замену переменных $x = x^k(z)$, перепишем (28) в виде

$$w_{kt} - b_{nn}(t,z)w_{kz_nz_n} = \sum_{i+j<2n} b_{ij}w_{kz_iz_j} + \sum_{i=1}^n b_iw_{kz_i} + b_0w_k + f_{0k} = f_k(t,z),\ z \in U, \tag{29}$$

где $w_k = \varphi_k v(t, x^k(z))|_U$. Отметим, что $b_{nn} > 0$ для всех $t, z$ в силу эллиптичности оператора $L$. В силу свойств решения $v$, указанных в теоремах 1, 2, и условий на коэффициенты имеем, что для всех $k$, $f_k \in L_p(Q_0^\tau)$, $\nabla_{z'}f_k(t,z) \in L_p(Q_0^\tau)$ и, более того, $f_k(t,z) \in C^{d_0}(\overline{B'_\delta}; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))$ с $d_0 \le 1-(n-1)/p$ (см. соотношения (5.3), (5.4), (5.8) в [35] и включение (5.7′) в [33]) после, может быть, изменения на множестве меры ноль.

Рассмотрим уравнения

$$\omega_{it}(t,z_n) - b_{nn}(t,0,z_n)\omega_{iz_nz_n} = f_i(t,0,z_n)\ (i = 1,2,\dots,r),\ z_n \in (0,\delta_1). \tag{30}$$

Дополним уравнения (30) начальными и краевыми условиями

$$\omega_i(0,z_n) = 0,\ \omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i(t),\ \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0,\ i = 1,2,\dots,r. \tag{31}$$

Пусть $v(\vec{g})$ — решение задачи (25), (26), построим функции $\omega_i$ как решение задачи (30), (31). Перепишем равенства (26) в окрестности $U_i$ в виде

$$\sum_{j=1}^n b_j(t,z')\partial_{z_j}v(x^i(t,z))|_{z_n=0} + \beta v(x^i(t,z',0)) = \tilde{g}(x^i(t,z',0)). \tag{32}$$

Если функции $v, \vec{g}$ есть решение обратной задачи, то легко увидеть, что $\omega_{iz_n}(t,0) = v_{z_n}(t,b_i)$ при $i = 1,2,\dots,r$. Полагая $z' = 0$ и используя (27), составим систему

$$b_n(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,0)\partial_{z_j}v(x^i(t,z))|_{z_n=0} + \beta v(t,b_i) = \sum_{j=1}^r g_j(t)\Phi_j(t,b_i), \tag{33}$$

$i = 1,2,\dots,r$. Здесь функция $v$ строится как решение задачи (25), (26), а функции $\omega_i$ — как решение задач (30), (31). Это и есть искомая система уравнений для нахождения координат вектора $\vec{g}$. Она также может быть переписана в виде

$$\vec{g} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{g}) = R(\vec{g}), \tag{34}$$

где координаты вектора $\vec{F}$ определены равенствами

$$F_i = b_n(t,0)\omega_{iz_n}(t,0) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,0)\partial_{z_j}v(x^i(t,z))|_{z_n=0} + \beta v(t,b_i),$$

а элементы матрицы $\Phi$ записываются в виде $\phi_{ij} = \Phi_j(t, b_i)$.

Найдём величину $\vec{F}(0)$. В этом случае в силу единственности решения параболической задачи (25), (26) имеем $v(0) = 0$, и тогда $F_i(0) = b_n(t,0)\omega^0_{iz_n}(t,0)$, где функция $\omega^0_i$ есть решение задачи

$$\omega^0_{it}(t, z_n) - b_{nn}(t, 0, z_n)\omega^0_{iz_nz_n} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\omega^0_i(0, z_n) = 0, \ \omega^0_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i(t), \ \omega^0_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Отметим, что лемма 2, условие (21) и условия на гладкость коэффициентов матрицы $\Phi$ гарантируют оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} \leq c\|\vec{F}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)}. \tag{35}$$

Перепишем уравнение (34) в виде

$$\vec{g} = R(\vec{g}) - R(0) + R(0) \tag{36}$$

и далее используем метод продолжения по параметру, заменяя (36) уравнением с параметром вида

$$\vec{g} = \gamma(R(\vec{g}) - R(0)) + R(0), \ \gamma \in [0, 1]. \tag{37}$$

Отметим, что $R(\vec{g}) - R(0)$ — линейный оператор. Если мы получим оценки решений этого уравнения, не зависящие от параметра $\gamma \in [0, 1]$, то отсюда вытекает, что уравнение (37) разрешимо для всех таких $\gamma$, в частности, для $\gamma = 1$ (см. теорему 3.13 гл. 3 в [36]). Имеем $R(0) = \Phi^{-1}\vec{F}(0)$. Соответственно, $R(\vec{g}) - R(0) = \Phi^{-1}(\vec{F}(\vec{g}) - \vec{F}(0))$.

Запишем покоординатно

$$F_i - F_i(0) = b_n(t,0)(\omega_{iz_n}(t,0) - \omega^0_{iz_n}(t,0)) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,0)\partial_{z_j} v(x^i(t,z))|_{z_n=0} + \beta(t,b_i)v(t,b_i),$$

где функция $\omega_i - \omega^0_i$ есть решение задачи (30), (31), где уже $\tilde{\psi}_i(t) \equiv 0$. Из (35), (37) вытекает неравенство

$$\|\vec{g}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} \leq c\sum_{i=1}^{r} \|F_i - F_i(0)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} + c\|\vec{F}(0)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)}, \ \tau \leq T. \tag{38}$$

Отметим, что все коэффициенты $b_i(t, 0)$ и $\beta(t, b_i)$ принадлежат классу $W^{s_0}_p(0, T)$. Например, имеем, что $b_n = \sqrt{1 + |\nabla\gamma|^2}\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{k,l}(y^i(z))\nu_k\nu_l|_{z_n=0}$. Здесь $\nu_k = -\gamma_{z_k}(z')/\sqrt{1 + |\nabla\gamma|^2}$ при $k < n$, $\nu_n = 1/\sqrt{1 + |\nabla\gamma|^2}$ и $\tilde{a}_{k,l}$ — коэффициенты оператора $L$, записанного в системе координат $y$. В силу условий (4), (5), (11) $b_n(t, z') \in W^1_p(B'_\delta; W^{s_0}_p(0, T))$ и, следовательно, $b_n(t, z') \in C^{d_0}(B'_\delta; W^{s_0}_p(0, T))$ с $d_0 \leq 1-(n-1)/p$ после, может быть, изменения на множестве меры ноль (см. соотношения (5.3), (5.4), (5.8) в [35] и включение (5.7′) в [33]), в частности, $b_n(t, 0) \in W^{s_0}_p(0, T)$. Тогда, используя лемму 2, получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} \|F_i - F_i(0)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^{r} \|\omega_{iz_n}(t,0) - \omega^0_{iz_n}(t,0)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} + \right.$$

$$\left. + \|\nabla_{z'} v(x^i(t,z))|_{z_n=0}\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} + \|v(0,b_i)\|_{\tilde{W}^{s_0}_p(0,\tau)} \right),$$

где постоянная $c_1$ не зависит от $\tau$.

Оценим каждое из слагаемых. По теореме 1 и лемме 1 при $n=1$ имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{r}\|\omega_{iz_n}(t,0)-\omega^0_{iz_n}(t,0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\le c_2\sum_{i=1}^{r}\|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))}, \tag{39}$$

где постоянная $c_2$ не зависит от $\tau$. Имеем

$$\|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))}\le c_3\|\tilde{f}_i(t,z)\|_{W_p^s(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}=J,\quad s>(n-1)/p,$$

в силу теорем вложения (см. соотношения (5.3), (5.4), (5.8) в [35] и включение (5.7′) в [33]). Далее используем неравенства, вытекающие из соответствующих интерполяционных теорем (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [37]):

$$J\le c_4\|\tilde{f}_i(t,z)\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}\|\tilde{f}_i(t,z)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))},\quad 2\theta-1=s. \tag{40}$$

Ввиду замечания 5.3 (c) в [37] норма в последнем пространстве может быть определена как

$$\|\tilde{f}_i\|_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}=\sup\{|(\tilde{f}_i,\varphi)|:\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^1_q(B'_\delta;L_q((0,\tau)\times(0,\delta_1)))\},$$

$1/p+1/q=1$, где скобки обозначают продолжение скалярного произведения в $L_2$ до отношения двойственности между соответствующими пространствами. Исходя из определения функции $\tilde{f}_i$ и условий на коэффициенты, имеем

$$\|\tilde{f}_i\|_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}\le c_5\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U))}\le c_6\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}, \tag{41}$$

где постоянная $c_6$ не зависит от $\tau$. Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство (см. [27])

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U))}\le c_7\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;W_p^2(U))}\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;L_p(U))}$$

и оценку

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(U))}\le\tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(U))},$$

вытекающую из формулы Ньютона — Лейбница, а затем оценим полученные нормы через норму в $W_p^{1,2}(Q^\tau)$. Оценки (40), (41) влекут, что

$$\|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))}\le c_8\tau^{(1-\theta)/2}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,z)\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times U)}+\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}), \tag{42}$$

где $c_8$ — постоянная, не зависящая от $\tau$.

Запишем оценки для функции $v$. Фиксируем $\vec{g}\in W_p^{s_0}(0,T)$. По теореме 1 и лемме 2, используя также условия (20), имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}\le C_0\|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}\le C_1\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{43}$$

где постоянная $C_1$ не зависит от $\tau$. По теореме 2 и лемме 2 имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_0^\tau)}\le$$

$$\le C_2\left(\|g\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}+\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i g(t,x^i(z',0))\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S^\tau)}\right)\le C_3\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{44}$$

где постоянная $C_3$ не зависит от $\tau \in (0,T]$. Тогда неравенство (42) можно переписать в виде

$$\|\tilde{f}_i(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le C_4\tau^{(1-\theta)/2}\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Используя (39), получим

$$\sum_{i=1}^{r}\|\omega_{iz_n}(t,0)-\omega^0_{iz_n}(t,0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le C_5\tau^{\beta_1}\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\ \beta_1=(1-\theta)/2. \tag{45}$$

Рассмотрим второе слагаемое $J_2=\sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,0)\partial_{z_j}v(t,x^i(z))|_{z=0}+\beta v(t,b_i)$. В силу леммы 2 имеем

$$\|J_2\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le C_6\left(\|v(t,b_i)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}+\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}v(t,x^i(z))|_{z=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}\right).$$

Каждое из слагаемых, входящих в эту сумму, оценивается одинаково. Отметим, что условие $v(t,x^i(z',0))\in\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}((0,\tau)\times B_{\delta'})$ влечёт, что $\nabla_{z'}v(t,x^i(z',0))\in\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}((0,\tau)\times B_{\delta'})$ и справедлива оценка (см. лемму 7.2 в [33])

$$\|\nabla_{z'}v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}((0,\tau)\times B_{\delta'})}+\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_0,2s_0}((0,\tau)\times B_{\delta'})} \le c\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}((0,\tau)\times B_{\delta'})},$$

где с помощью замены переменных легко убедиться, что постоянная $c$ не зависит от $\tau$. В частности, отсюда вытекает оценка (см. лемму 1)

$$\|v\|_{W_p^1(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le c\|v\|_{\tilde{W}_p^{s_1,2s_1}((0,\tau)\times B_{\delta'})} \le c_1\|v\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times U)} \le c_2\|v\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)}. \tag{46}$$

Далее имеем (см., например, теорему 5.10 в [33])

$$\|\nabla_{z'}v(t,x^i(z))|_{z_n=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_3\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|_{W_p^{s}(B_{\delta'};\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}$$

при $s>(n-1)/p$ (возьмём $s\in(n-1)/p,1)$). Далее, используя интерполяционное неравенство (см. следствие 4.3 и соотношение (3.7) в [37]), лемму 2 и (46), получим

$$\begin{aligned}\|\nabla_{z'}v(t,x^i(z))|_{z_n=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} &\le c_4\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|_{W_p^{s}(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le\\ \le c_5\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|^{\theta}_{W_p^{1}(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))}&\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le\\ \le c_6\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times U^+)}&\|\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))},\ \theta=(1+s)/2.\end{aligned}$$

Непосредственно из определения нормы в пространстве $\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)$ вытекает оценка

$$\|\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le \tau^{1/2}\|\varphi_i v(t,x^i(z',0))\|_{L_p(B'_\delta;\tilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))},$$

которая с учётом предыдущего неравенства и леммы 2 влечёт, что

$$\begin{aligned}&\|\nabla_{z'}v(t,x^i(z))|_{z_n=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le\\ &\qquad\le c_7\tau^{(1-\theta)/2}\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times U)}\|\varphi_i v(t,x^i(z))\|^{1-\theta}_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times U)}.\end{aligned} \tag{47}$$

Ссылаясь на лемму 2 и используя (43), (44), получим оценку

$$\|\nabla_{z'}v(t,x^i(z))|_{z_n=0}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_8\tau^{\beta_2}\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},\ \beta_2=(1-\theta)/2.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в оценке для $\|J_2\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}$, и можно сказать, что

$$\|J_2\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_9\tau^{\beta_2}\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \tag{48}$$

для некоторого $\beta_2 > 0$ и не зависящей от $\tau$ постоянной $c_9$.

Из (38), (45), (48) вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\|F_i - F_i(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{10}\tau^{\beta_0}\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad \beta_0 = \max(\beta_1,\beta_2), \tag{49}$$

где постоянная $c_{10}$ не зависит от $\tau$, а зависит от норм коэффициентов (которые фактически обусловливаются величиной $T$) и постоянных из теорем вложения. Из этой оценки и (35), в частности, следуют оценки

$$\|R(\vec g) - R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{11}\tau^{\beta_0}\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{50}$$

$$\|R(\vec g)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{12}\tau^{\beta_0}\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} + \|R(0)\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{51}$$

где постоянная $c_{12}$ не зависит от параметра $\tau \in (0,T]$. Оценка (50) влечёт тот факт, что любое решение уравнения (37) для всех $\gamma \in [0,1]$ удовлетворяет оценке

$$\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_{11}\tau^{\beta_0}\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)} + \|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

В частности, если $c_{11}\tau_0^{\beta_0} = 1/2$, то для всех $\gamma \in [0,1]$ выполнена оценка

$$\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_0)} \le 2\|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_0)}.$$

Предположим, что мы уже получили оценку вида

$$\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_1)} \le c_0\|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_1)}, \tag{52}$$

равномерную по параметру $\gamma \in [0,1]$. Покажем, что будет справедлива оценка

$$\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_2)} \le c_1\|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_2)},$$

где $\tau_2 = \min(T, \tau_1 + \tau_0)$, с некоторой постоянной $c_1$. Действительно, построим функцию $\vec g^0 = \vec g(t)$ при $t \le \tau_1$ и $\vec g^0 = \vec g(\tau_1)$ при $t \ge \tau_1$. Построенная функция принадлежит $\tilde W_p^{s_0}(0,T)$. Сделаем в уравнении (37) замену $\vec g = \vec{g^0} + \vec a$. Имеем

$$\vec a = \gamma(R(\vec a) - R(0)) + \gamma(R(\vec{g^0}) - R(0)) + R(0) - \vec{g^0} = \gamma(R(\vec a) - R(0)) + R_1. \tag{53}$$

Построенный вектор $\vec a$ обладает тем свойством, что $\vec a(t) = 0$ при $t \le \tau_1$, соответственно, функция $R_1(t)$ также обращается в ноль при $t \le \tau_1$ в силу того, что при $t \le \tau_1$ $\vec g^0$ есть решение системы (37). В силу определения и (52) имеем неравенство

$$\|\vec g^0\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,T)} \le c_2\|\vec g\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_1)} \le c_2c_0\|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_1)}.$$

Тогда в силу (50), (51) вектор функция $R_1$ допускает оценку

$$\|R_1\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_2)} \le c_3\|R(0)\|_{\tilde W_p^{s_0}(0,\tau_2)},$$

где постоянная $c_3$ не зависит от $\tau_2 \in [0,T]$. Имеем, что

$$F_i(\vec a) - F_i(0) = b_n(t,0)(\omega_{iz_n}(t,0) - \omega^0_{iz_n}(t,0)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1} b_j(t,0)\partial_{z_j} v(x^i(t,z))|_{z_n=0} + \beta(t,b_i)v(t,b_i).$$

Опишем функции, входящие в правую часть этого равенства в данном случае. Для данного вектора $\vec{a}$ соответствующее решение $v(\vec{a})$ задачи (25), (26) есть решение задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{54}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta v = \sum_{i=1}^{r} (g_i - g_i^0)\Phi_i, \quad \vec{g}^0 = (g_1^0, \dots, g_r^0). \tag{55}$$

Поскольку правая часть (55) обращается в 0 при $t \le \tau_1$, то решение задачи (54), (55) при $t \le \tau_1$ есть 0, и оно совпадает с решением задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (t,x) \in (\tau_1, T) \times G,$$

$$v|_{t=\tau_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta v = \sum_{i=1}^{r} (g_i - g_i^0)\Phi_i,$$

продолженным нулём при $t \le \tau_1$. Аналогично функции $\tilde{\omega}_i = \omega_i(t,z_n) - \omega_i^0(t,z_n)$ есть решение задач

$$\tilde{\omega}_{it}(t,z_n) - b_{nn}(t,0,z_n)\tilde{\omega}_{iz_nz_n} = f_i(t,0,z_n) \ (i = 1,2,\dots,r), \ z_n \in (0,\delta_1), \tag{56}$$

$$\tilde{\omega}_i(0,z_n) = 0, \ \tilde{\omega}_i|_{z_n=0} = 0, \ \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \ i = 1,2,\dots,r, \tag{57}$$

где функции $f_i$ определены в (29) через соответствующую функцию $v$ и также обращаются в ноль при $t \le \tau_1$. Поэтому решение задачи (56), (57) совпадает с решением задачи

$$\tilde{\omega}_{it}(t,z_n) - b_{nn}(t,0,z_n)\tilde{\omega}_{iz_nz_n} = f_i(t,0,z_n) \ (i = 1,2,\dots,r), \ z_n \in (0,\delta_1), \ t \in (\tau_1, T),$$

$$\tilde{\omega}_i(\tau_1,z_n) = 0, \ \tilde{\omega}_i|_{z_n=0} = 0, \ \tilde{\omega}_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \ i = 1,2,\dots,r,$$

продолженным нулём при $t \le \tau_1$. Таким образом, мы можем рассмотреть уравнение (53) на промежутке $[\tau_1, T]$, и его решение, продолженное нулём при $t \le \tau_1$, совпадёт с решением этого же уравнения на промежутке $[0,T]$.

Повторяя рассуждения, использованные при получении оценки (49), придём к неравенству

$$\|R(\vec{a}) - R(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(\tau_1,\tau)} \le c_{10}(\tau - \tau_1)^{\beta_0}\|\vec{a}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(\tau_1,\tau)}, \tag{58}$$

где без ограничения общности можем считать, что постоянная $c_{10}$ та же самая, что возникла в неравенстве (49). Тогда при $\tau = \tau_2$ в (58) из уравнения (53) получим неравенство

$$\|\vec{a}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(\tau_1,\tau_2)} \le 2\|R_1\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(\tau_1,\tau_2)} \le 2c_3\|R(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)}. \tag{59}$$

Из оценок (52), (59) получим требуемую оценку

$$\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)} = \|\vec{a} + \vec{\beta}^0\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)} \le c_4\|R(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)}.$$

Из доказанного вытекает оценка $\|\vec{g}\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_5\|R(0)\|_{\tilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}$, справедливая для всех $\tau \le T$ и для всех $\gamma \in [0,1]$. В соответствии с методом продолжения по параметру получим, что уравнение (37) разрешимо для всех $\gamma \in [0,1]$.

Мы показали разрешимость системы (34). Построим функцию $v$ как решение задачи (25)–(27). Покажем, что мы нашли решение нашей обратной задачи. Достаточно показать, что у нас выполнены условия переопределения (27). Возьмём равенства (32), взятые в точке $z' = 0$, вычтем их из соответствующих равенств (33) и получим

$$b_n(t,0)(w_{iz_n}(t,0) - v_{z_n}(t, x^i(0))) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{60}$$

Функция $\omega_{0i} = \varphi_i v(x^i(z))$ удовлетворяет уравнению (29). Возьмём в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (30). Получим равенство

$$(w_{it}(t, z_n) - \omega_{0it}(t, x^i(0, z_n))) - b_{nn}(t, 0, z_n)(w_{iz_n z_n} - \omega_{0iz_n z_n}(t, x^i(0, z_n))) = 0, \tag{61}$$

где $i = 1, 2, \ldots, r$. Функция $w_i(t, z_n) - \omega_{0i}(t, x^i(0, z_n))$ удовлетворяет уравнению (61), начальному условию $w_i(0, z_n) - \omega_{0i}(0, x^i(0, z_n)) = 0$ и в силу (60) — граничным условиям

$$w_{iz_n}(t, 0) - \omega_{0iz_n}(t, x^i(0, 0)) = 0, \;\; w_i(t, \delta_1) - \omega_{0i}(t, x^i(0, \delta_1)) = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, r.$$

В силу единственности решений смешанной задачи $w_i(t, z_n) = \omega_{0i}(t, x^i(t, 0, z_n))$. Следовательно, выполнены равенства $w_{0i}(t, x^i(t, 0, 0)) = v(t, b_i) = \tilde{\psi}_i$ для всех $i$. □

## Список литературы


1. **Бородулин А. И., Десятков Б. Д., Махов Г. А., Сарманаев С. Р.** Определение эмиссии болотного метана по измеренным значениям его концентрации в приземном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1997. № 1. С. 66–74.

2. **Ткаченко В. Н.** Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев : Наукова думка, 2008.

3. **Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.** Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. Москва : Янус-К, 2009.

4. **Glagolev M. V., Sabrekov A. F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling // Mathematical Biology and Bioinformatics. 2012. Vol. 7, iss. 1. P. 81–101.

5. **Сабреков А. Ф., Глаголев М. В., Терентьева И. Е.** Определение удельного потока метана из почвы с помощью обратного моделирования на основе сопряжённых уравнений // Мат. биология и биоинформатика: докл. Междунар. конф.; ред. В. Д. Лахно. Т. 7. Пущино : ИМПБ РАН, 2018. Статья № e94.

6. **Abboudi S., Artioukhine E.** Simultaneous estimation of two boundary conditions in a two-dimensional heat conduction problem // Proceeding of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Cambridge, UK, 11–15th July 2005. 9 p.

7. **Onyango T. M., Ingham D. B., Lesnic D.** Restoring boundary conditions in heat conduction // Journal of Engineering Mathematics. 2008. Vol. 62. P. 85–101.

8. **Egger H., Heng Y., Marquardt W., Mhamdi A.** Efficient solution of a three-dimensional inverse heat conduction problem in pool boiling. Aachen Institute for Advanced Study in Computational Engineering Science. Preprint: AICES-2009-4. 06/February/2009.

9. **Alghamdi A. S. A.** Inverse estimation of boundary heat flux for heat conduction model // Journal of King Saud University — Engineering Sciences. 2010. Vol. 21, no. 1. P. 73–95.

10. **Fernandes A. P., de Sousa P. F. B., Borges V. L., Guimaraes G.** Use of 3D-transient analytical solution based on Green's function to reduce computational time in inverse heat conduction problems // Applied Mathematical Modelling. 2010. Vol. 34. P. 4040–4049.
11. **Колесник С. А., Кузнецова Е. Л.** Восстановление тепловых потоков путём решения обратной граничной задачи теплопереноса в анизотропной полосе // Изв. Акад. наук. Энергетика. 2011. № 14. С. 1200–1205.
12. **Hussein M. S., Lesnic D., Ivanchov M. I.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // Computers and Mathematics with Applications. 2014. Vol. 67. P. 1065–1091.
13. **Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В.** К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности // Проблемы машиностроения. 2016. Т. 19, № 1. С. 28–36.
14. **Woodbury K. A., Beck J. V., Najafi H.** Filter solution of inverse heat conduction problem using measured temperature history as remote boundary condition // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 72. P. 139–147.
15. **Knupp D. C., Abreu L. A. S.** Explicit boundary heat flux reconstruction employing temperature measurements regularized via truncated eigenfunction expansions // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 78. P. 241–252.
16. **Wang S., Zhang L., Sun X., Jia H.** Solution to two-dimensional steady inverse heat transfer problems with interior heat source based on the conjugate gradient method // Mathematical Problems in Engineering. 2017. Vol. 2017. Article ID 2861342.
17. **Colaco M. J., Orlande H. R. B.** Inverse natural convection problem of simultaneous estimation of two boundary heat fluxes in irregular cavities // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 47, iss. 6. P. 1201–1215.
18. **Huang C., Ju T.** An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38, no. 5. P. 735–754.
19. **Loulou T., Scott E.** An inverse heat conduction problem with heat flux measurements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2006. Vol. 67, no. 11. P. 1587–1616.
20. **Abreu L. A. S., Colaco M. J., Alves C. J. S., Orlande H. R. B., Kolehmainen V., Kaipio J.** A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3–7, 2013. P. 5422–5432.
21. **Hao D. N., Thanh P. X., Lesnic D.** Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Problems. 2013. Vol. 29. Article ID 095020.
22. **Мацевитый Ю. М., Костиков А. О., Сафонов Н. А., Ганчин В. В.** К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности // Проблемы машиностроения. 2017. Т. 20, № 4. С. 15–23.
23. **Yang L. L., Sun B., Sun X.** Inversion of thermal conductivity in two-dimensional unsteady-state heat transfer system based on finite difference method and artificial bee colony // Applied Sciences. 2019. Vol. 9, no. 22. P. 4824.
24. **Zhuo L., Lesnic D.** Reconstruction of the heat transfer coefficient at the interface of a bi-material // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28, no. 3. P. 374–401.
25. **Костин А. Б., Прилепко А. И.** О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. II // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 11. С. 1519–1528.
26. **Костин А. Б., Прилепко А. И.** О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 107–116.

27. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980.
28. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p$-$L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Mathematische Zeitschrift. 2007. Vol. 257. P. 193–224.
29. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Солонников В. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967.
30. **Белоногов В. А., Пятков С. Г.** О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Изв. вузов. Математика. 2020. № 7. С. 18–32.
31. **Вержбицкий М. А., Пятков С. Г.** О некоторых обратных задачах об определении граничных режимов // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, вып. 2. С. 3–18.
32. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М. : Наука, 1976.
33. **Grisvard P.** Équations différentielles abstraites // Annales Scientifiques De l'École Normale Superieure. 1969. $4^e$ séries. T. 2, no. 3. P. 311–395.
34. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М. : Наука, 1977.
35. **Amann H.** Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications // Mathematische Nachrichten. 1997. Vol. 186. P. 5–56.
36. **Lieberman G. M.** Second Order Parabolic Differential Equations. Singapure : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996.
37. **Amann H.** Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik matematicki. 2000. Vol. 35, no. 1. P. 161–177.

*Поступила в редакцию 04.04.2022.*
*После переработки 13.05.2022.*

### Сведения об авторах

**Пятков Сергей Григорьевич**, профессор, Институт цифровой экономики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; s_pyatkov@ugrasu.ru.

**Баранчук Владислав Александрович**, аспирант, Институт цифровой экономики, Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия; vladinho@mail.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 2. P. 234–253.*

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17206

## IDENTIFICATION OF A BOUNDARY CONDITION IN THE HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEMS

**S.G. Pyatkov**[a], **V.A. Baranchuk**[b]

*Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia*
[a]*s_ pyatkov@ugrasu.ru*, [b]*vladinho@mail.ru*

We consider well-posedness in Sobolev spaces of inverse problems of recovering a function occurring in the Robin boundary condition in the parabolic case. The existence and uniqueness theorem are exhibited. The proof relies on a priori estimates obtained and the method of continuation in a parameter. The method is constructive and the approach allows to develop numerical methods for solving the problem.

**Keywords:** *inverse problem, heat and mass transfer, parabolic equation, Robin boundary condition.*

## References

1. **Borodulin A.I., Desyatkov B.D., Makhov G.A., Sarmanaev S.R.** Assessment of methane emission from measured concentrations in the atmospheric surface layer. *Russian Meteorology and Hydrology*, 1997, no. 1, pp. 49–55.
2. **Tkachenko V.N.** *Matematicheskoye modelirovaniye, identifikatsiya i upravleniye tekhnologicheskimi protsessami teplovoy obrabotki materialov* [Mathematical modeling, identification and control of technological processes of heat treatment of materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2008. (In Russ.).
3. **Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Nenarokomov A.V.** *Obratnye zadachi v issledovanii slozhnogo teploobmena* [Inverse problems in the study of complex heat transfer]. Moscow, Yanus-K Publ., 2009. (In Russ.).
4. **Glagolev M.V., Sabrekov A.F.** Determination of gas exchange on the border between ecosystem and atmosphere: inverse modeling. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2012, vol. 7, iss. 1, pp. 81–101.
5. **Sabrekov A.F., Glagolev M.V., Terentyeva I.E.** Opredeleniye udel'nogo potoka metana iz pochvy s pomoshch'yu obratnogo modelirovaniya na osnove sopryazhyonnykh uravneniy [Determination of the specific flux of methane from soil using inverse modeling based on conjugate equations]. Reports of the International Conference *"Mathematical Biology and Bioinformatics".* Ed. V.D. Lakhno. Vol. 7. Pushchino, IMPB RAS, 2018. Article no. e94. (In Russ.).
6. **Abboudi S., Artioukhine E.** Simultaneous estimation of two boundary conditions in a two-dimensional heat conduction problem. *Proceeding of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Cambridge, UK, 11–15th July 2005, 9 p.
7. **Onyango T.M., Ingham D.B., Lesnic D.** Restoring boundary conditions in heat conduction. *Journal of Engineering Mathematics*, 2008, vol. 62, pp. 85–101.
8. **Egger H., Heng Y., Marquardt W., Mhamdi A.** *Efficient solution of a three-dimensional inverse heat conduction problem in pool boiling.* Aachen Institute for Advanced Study in Computational Engineering Science. Preprint: AICES-2009-4. 06/February/2009.

The work was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Khanty-Mansiysk Autonomous Okrug — Yugra (project no. 22-11-20031).

9. **Alghamdi A.S.A.** Inverse estimation of boundary heat flux for heat conduction model. *Journal of King Saud University — Engineering Sciences*, 2010, vol. 21, no. 1, pp. 73–95.
10. **Fernandes A.P., de Sousa P.F.B., Borges V.L., Guimaraes G.** Use of 3D-transient analytical solution based on Green's function to reduce computational time in inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modeling*, 2010, vol. 34, pp. 4040–4049.
11. **Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L.** The way to reconstruct the heat fluxes by solving the inverse boundary heat exchange problem for the anisotropic stripe. *Thermal Engineering*, 2011, no. 6, pp. 151–158.
12. **Hussein M.S., Lesnic D., Ivanchov M.I.** Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 2014, vol. 67, pp. 1065–1091.
13. **Matsevity Yu.M., Safonov N.A., Ganchin V.V.** K resheniyu nelineynykh obratnykh granichnykh zadach teploprovodnosti [To solving of nonlinear boundary-value inverse heat conduction problems]. *Problemy mashinostroyeniya* [Problems of mechanical engineering], 2016, vol. 19, no. 1, pp. 28–36. (In Russ.).
14. **Woodbury K.A., Beck J.V., Najafi H.** Filter solution of inverse heat conduction problem using measured temperature history as remote boundary condition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2014, vol. 72, pp. 139–147.
15. **Knupp D.C., Abreu L.A.S.** Explicit boundary heat flux reconstruction employing temperature measurements regularized via truncated eigenfunction expansions. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2016, vol. 78, pp. 241–252
16. **Wang S., Zhang L., Sun X., Jia H.** Solution to two-dimensional steady inverse heat transfer problems with interior heat source based on the conjugate gradient method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, vol. 2017, article ID 2861342.
17. **Colaco M.J., Orlande H.R.B.** Inverse natural convection problem of simultaneous estimation of two boundary heat fluxes in irregular cavities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, vol. 47, no. 6, pp. 1201–1215.
18. **Huang C., Ju T.** An inverse problem of simultaneously estimating contact conductance and heat transfer coefficient of exhaust gases between engine's exhaust valve and seat. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, vol. 38, no. 5, pp. 735–754.
19. **Loulou T., Scott E.** An inverse heat conduction problem with heat flux measurements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, vol. 67, no. 11, pp. 1587–1616.
20. **Abreu L.A.S., Colaco M.J., Alves C.J.S., Orlande H.R.B., Kolehmainen V., Kaipio J.** A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites. *22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013)*, November 3–7, 2013. Pp. 5422–5432.
21. **Hao D.N., Thanh P.X., Lesnic D.** Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction. *Inverse Problems*, 2013, vol. 29, article ID 095020.
22. **Matsevity Yu.M., Kostikov A.O., Safonov N.A., Ganchin V.V.** K resheniyu nestatsionarnykh nelineynykh granichnykh obratnykh zadach teploprovodnosti [To solving of non-stationary nonlinear inverse boundary-value heat conduction problems]. *Problemy mashinostroyeniya* [Problems of mechanical engineering], 2017, vol. 20, no. 4, pp. 15–23. (In Russ.).
23. **Yang L.L., Sun B., Sun X.** Inversion of thermal conductivity in two-dimensional unsteady-state heat transfer system based on finite difference method and artificial bee colony. *Applied Sciences*, 2019, vol. 9, no. 22, p. 4824.
24. **Zhuo L., Lesnic D.** Reconstruction of the heat transfer coefficient at the interface of a bi-material. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 374–401.
25. **Kostin A.B., Prilepko A.I.** On some problems of restoring the boundary condition for a parabolic equation. II. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 11, pp. 1515–1525.

26. **Kostin A.B., Prilepko A.I.** On some problems of restoring the boundary condition for a parabolic equation. I. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 113–121.
27. **Triebel H.** *Interpolation theory. Functional spaces. Differential Operators* (Mir, Moscow, 1980).
28. **Denk R., Hieber M., Prüss J.** Optimal $L_p$-$L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data. *Mathematische Zeitschrift*, 2007, vol. 257, pp. 193–224.
29. **Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N., Solonnikov V.A.** *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* Providence, American Mathematical Society, 1968.
30. **Belonogov V.A., Pyatkov S.G.** On the solvability of conjugation problems with conditions of imperfect contact type. *Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 7, pp. 13–26.
31. **Verzhbitsky M.A., Pyatkov S.G.** On some inverse problems on the determination of boundary regimes. *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, iss. 2, pp. 3–18.
32. **Mikhailov V.P.** *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. (In Russ.).
33. **Grisvard P.** Équations différentielles abstraites. *Annales Scientifiques De l'École Normale Superieure*, 1969, 4$^e$ séries, t. 2, no. 3, pp. 311–395.
34. **Nikolsky S.M.** *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. (In Russ.).
35. **Amann H.**, Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications. *Mathematische Nachrichten*, 1997, vol. 186, pp. 5–56.
36. **Lieberman G.M.** *Second Order Parabolic Differential Equations.* Singapure, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1996.
37. **Amann H.** Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces. *Glasnik Matematicki*, 2000, vol. 35, no. 1, pp. 161–177.

*Article received 04.04.2022.*
*Corrections received 13.05.2022.*