Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 2. С. 164–180.

УДК 517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17203

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. И. Кожанов[1,a], **Р. Р. Сафиуллова**[2,b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия*
[a] *kozhanov@math.nsc.ru*, [b] *regina-saf@yandex.ru*

Исследуется разрешимость обратных задач определения вместе с решением $u(x,t)$ псевдогиперболического уравнения $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = f(x,t)$ также неизвестного коэффициента a. Доказываются теоремы существования регулярных решений. Отличительной особенностью изучаемых задач является наличие в них новых для рассматриваемого класса уравнений условий переопределения.

Ключевые слова: *псевдогиперболическое уравнение, неизвестный коэффициент, обратные задачи, интегральное переопределение, регулярные решения, существование.*

Введение

Псевдогиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [1], в теории солитонов [2] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник — диэлектрик с туннельной проводимостью — сверхпроводник». Уравнение вида $u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \eta \Delta u_t(x,t) = 0$, $\eta > 0$, описывает процесс распространения возмущений в упруго-вязком стержне, здесь $\eta \Delta u_t$ — малая вязкость [3].

Следует отметить, что краевые задачи для псевдогиперболических уравнений активно исследовались представителями как российских, так и зарубежных математических школ [4–10]. Коэффициенты в уравнениях, их правые части характеризуют, как правило, те или иные условия протекания физических процессов, описываемых уравнениями. Их величины определяются свойствами среды, однако далеко не всегда характеристики среды заранее известны. Задачи, в которых помимо решения требуется определить также какую-либо иную неизвестную величину, входящую в уравнение (или величины), называются обратными задачами.

Изучая теорию обратных задач, следует отметить монографии М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова, С. И. Кабанихина, А. М. Денисова, А. И. Кожанова и др. [11–16]. В работах [17–24] рассматривались обратные задачи для параболических уравнений, в работах [25–30] — для гиперболических уравнений. Разрешимость обратных задач в тех или иных постановках, с теми или иными условиями переопределения для псевдогиперболических уравнений была предметом исследования в работах [31–34].

Данная работа посвящена исследованию нелинейной обратной задачи с неизвестным коэффициентом для псевдогиперболического уравнения четвёртого порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением $u(x,t)$ определить неизвестный коэффициент, представляющий собой постоянную величину (а не функцию!). В работе доказываются теоремы существования регулярных решений. При доказательстве разрешимости исходной обратной задачи используется метод, основанный на переходе от обратной задачи к прямой задаче для нелинейного уравнения высокого порядка. Доказывается её разрешимость и строится решение обратной задачи с помощью решения вспомогательной задачи. Отметим также, что нелинейные обратные задачи для псевдогиперболических уравнений с условием переопределения настоящей статьи и с неизвестным параметром ранее не изучались.

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные функции, определённые при $x \in \overline{\Omega}$ и при $t \in [0,T]$, A — заданное положительное число.

Обратная задача: найти функцию $u(x,t)$ и число a, такие, что для них в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = f(x,t), \tag{1}$$

и при этом для функции $u(x,t)$ выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_\Omega u^2(x,T)dx = A. \tag{4}$$

В данной обратной задаче условия (2) и (3) есть обычные условия первой начально-краевой задачи, условие (4) — условие переопределения. Следует отметить, что в работе [29] исследовалась обратная задача с подобным интегральным условием переопределения, но для гиперболического уравнения второго порядка, в работах [22; 35] изучались также близкие по постановке обратные задачи, но для параболических уравнений.

Хотелось бы отметить, что предложенный ниже метод даёт легко проверяемые в данной задаче условия.

2. Разрешимость обратной задачи

Доказательство разрешимости обратной задачи будет основано на исследовании разрешимости первой начально-краевой (прямой) задачи для некоторого вспомогательного нелинейного интегро-дифференциального («нагруженного» [36]) уравнения. При доказательстве разрешимости задачи для «нагруженного» уравнения используется техника, в основе которой лежат метод срезок, метод неподвижной точки.

Введём ряд дополнительных обозначений:

$$A_0 = \int\limits_\Omega u_0^2(x)dx, \quad B = \int\limits_\Omega u_1^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_i}^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{1x_i}^2(x)dx,$$

$$B_1 = \frac{1}{A - A_0}, \quad B_0 = B \cdot B_1, \quad \beta = \frac{B_1}{B_0}.$$

Пусть всюду ниже выполняется условие

$$A_0 < A. \tag{5}$$

Приведём также неравенство, справедливое для всех $\psi(x)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \psi^2(x)dx \le m_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \psi_{x_i}^2(x)dx, \tag{6}$$

здесь число m_0 определяется лишь областью Ω. Им мы будем пользоваться в дальнейшем.

Далее для фиксированного положительного числа N определим срезающую функцию $G_N(\xi)$:

$$G_N(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} \quad 0 \le \xi \le N, \\ N, & \text{если} \quad \xi > N, \\ 0, & \text{если} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Для фиксированной функции $v(x,t)$ из пространства $W_2^2(Q)$ положим

$$\Phi(v) = \int\limits_\Omega v_t^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i}^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega v_{x_i t}^2(x,T)dx - 2\int\limits_Q f v_t dxdt.$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + [B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(u))]u = f(x,t) \tag{7}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3).

Теорема 1. *Пусть $f(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x), u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и выполняется условие* (5)*. Тогда краевая задача* (2), (3), (7) *имеет решение $u(x,t)$, такое, что $u(x,t), u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $u_{x_i tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $\Delta u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.*

Доказательство. Для доказательства разрешимости задачи (2), (3), (7) применим метод неподвижной точки. Определим линейное пространство V:

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$v_{tt}(x,t) \in L_2(Q), v_{x_i tt}(x,t) \in L_2(Q), \Delta v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\}.$$

Норму в пространстве V определим следующим образом:

$$\|v\|_V^2 = \|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))} +$$

$$+ \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)} + \|\Delta v_{tt}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{x_i tt}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Пространство V с определённой таким образом нормой является банаховым.

Пусть $w(x,t)$ есть функция из пространства V. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + [B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(w))]u = f(x,t) \tag{7_w}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3). Разрешимость краевой задачи (2), (3), (7_w) в пространстве V при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ была установлена в работах [16; 38]. Следовательно, эта задача порождает оператор $\Re$, переводящий пространство V в себя: $\Re(w) = u$. Покажем, что оператор $\Re$ имеет в пространстве V неподвижные точки.

Умножим уравнение (7_w) на функцию u_t и проинтегрируем по цилиндру Q

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \{u_{\tau\tau} - \Delta u - \Delta u_{\tau\tau} + [B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(w))]u\} u_\tau dx d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f u_\tau dx d\tau.$$

Интегрируя по частям, учитывая условия (2), (3), придём к следующему равенству:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\left[B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(w))\right]\int\limits_\Omega u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_1^2(x)dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_i}^2(x)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{1x_i}^2(x)dx + \frac{1}{2}\left[B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(w))\right]\cdot A_0 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f u_\tau dx d\tau.$$

Или, в силу того, что

$$0 \le B_0 - B_1 G_\beta(\Phi(w)) \le B_0, \tag{8}$$

имеем

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)dx \le$$

$$\le \int\limits_\Omega u_1^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_i}^2(x)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{1x_i}^2(x)dx + B_0\cdot A_0 + 2\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f u_\tau dx d\tau.$$

Применяя неравенство Юнга, учитывая вид B, можем получить неравенство

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)dx \le$$

$$\le B + B_0 A_0 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2(x,\tau)dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)dx d\tau. \tag{9}$$

Отсюда, применяя лемму Гроноулла к одному из следствий неравенства (9), придём к соотношению

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)dx d\tau \le N_1\cdot(e^t - 1),$$

где

$$N_1 = B + B_0 A_0 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2(x,\tau)dx d\tau.$$

Вспоминая неравенство (9), будем иметь

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)dx \leq N_1e^t. \tag{10}$$

На следующем шаге умножим уравнение (7_w) на функцию $-\Delta u_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q:

$$-\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \{u_{\tau\tau} - \Delta u - \Delta u_{\tau\tau} + [B_0 - B_1G_\beta(\Phi(w))]u\}\Delta u_\tau dxd\tau = -\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f\Delta u_\tau dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, учитывая условия (2) и (3), будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)dx + \int\limits_\Omega (\Delta u(x,t))^2dx + [B_0 - B_1G_\beta(\Phi(w))]\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)dx+$$

$$+\int\limits_\Omega (\Delta u_t(x,t))^2dx = -2\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f\Delta u_\tau dxd\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{1x_i}^2(x)dx+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_ix_j}^2(x)dx + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_{1x_ix_j}^2(x)dx + [B_0 - B_1G_\beta(\Phi(w))]\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_i}^2(x)dx.$$

Применяя к первому слагаемому правой части равенства неравенство Юнга, учитывая соотношение (8), получим

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)dx + \int\limits_\Omega (\Delta u(x,t))^2dx + \int\limits_\Omega (\Delta u_t(x,t))^2dx \leq \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2dxd\tau + N_2, \tag{11}$$

где

$$N_2 = \int\limits_\Omega \left[\sum_{i=1}^n u_{1x_i}^2(x) + \sum_{i,j=1}^n u_{0x_ix_j}^2(x) + \sum_{i,j=1}^n u_{1x_ix_j}^2(x)\right]dx+$$

$$+B_0\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{0x_i}^2(x)dx + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2dxd\tau.$$

В качестве одного из возможных следствий неравенства (11) можно рассматривать соотношение

$$\int\limits_\Omega (\Delta u_t(x,t))^2dx \leq \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2dxd\tau + N_2.$$

Применяя к нему лемму Гронуолла, можем получить

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2dxd\tau \leq N_2 \cdot (e^t - 1).$$

С учётом последнего, из неравенства (11) получаем вторую априорную оценку

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_it}^2(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}(\Delta u(x,t))^2dx+\int\limits_{\Omega}(\Delta u_t(x,t))^2dx\le N_2\cdot e^t. \qquad (12)$$

Далее умножим уравнение (7_w) на функцию u_{tt}, проинтегрируем по цилиндру Q. Интегрируя по частям в полученном равенстве, используя условие (2), а также применяя неравенство Юнга, придём к соотношению

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2dxd\tau+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau\tau}^2dxd\tau\le\frac{3\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u)^2dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{2\delta^2}\left[B_0-B_1G_\beta(\Phi(w))\right]^2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u^2dxd\tau+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f^2dxd\tau.$$

Отсюда, учитывая соотношения (6) и (8), в силу оценок (10) и (12), взяв $\delta^2=1/2$, будем иметь неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{\tau\tau}^2dxd\tau+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau\tau}^2dxd\tau\le N_3, \qquad (13)$$

где

$$N_3=4\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f^2dxd\tau+N_2(e^t-1)+m_0B_o^2N_1(e^t-1)\right).$$

На последнем шаге умножим уравнение (7_w) на функцию $-\Delta u_{tt}$, проинтегрируем по цилиндру Q. Интегрируя по частям, учитывая условия (2), (3), применяя неравенство Юнга, неравенство (8), оценки (10) и (12), нетрудно прийти к следующему соотношению:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left(\Delta u_{\tau\tau}\right)^2dxd\tau\le\frac{3\delta_1^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left(\Delta u_{\tau\tau}\right)^2dxd\tau+\frac{1}{2\delta_1^2}B_0^2m_0N_1(e^t-1)+$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}N_2(e^t-1)+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f^2dxd\tau.$$

Взяв $\delta_1^2=1/2$, получим четвёртую априорную оценку

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left(\Delta u_{\tau\tau}\right)^2dxd\tau\le N_3. \qquad (14)$$

Исходя из оценок (10), (12)–(14), получим финальную оценку

$$\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_i}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{x_it}^2(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}[\Delta u(x,t)]^2dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[\Delta u_t(x,t)]^2dx+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_{\tau\tau}^2dxd\tau+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u_{x_i\tau\tau}^2dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}(\Delta u_{\tau\tau})^2dxd\tau\leq N.$$

В этой оценке N — постоянная величина, определяемая функциями $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, числами A, T, областью Ω.

Таким образом, получаем, что для всевозможных решений $u(x,t)$ задачи (2), (3), (7_w) будет верна оценка $\|u\|_V\leq N$. Эта оценка показывает, что оператор $\Re$ переводит замкнутый шар радиуса N в себя. Покажем, что этот оператор является непрерывным на V.

Пусть $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность функций из пространства V, сходящаяся в V к функции $w_0(x,t)$, $\{v_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ есть последовательность образов функций $w_m(x,t)$ при действии оператора $\Re$, $v_0(x,t)$ есть образ функции $w_0(x,t)$ при действии оператора $\Re$. Введём обозначения

$$\overline{w}_m(x,t)=w_m(x,t)-w_0(x,t),\quad \overline{v}_m(x,t)=v_m(x,t)-v_0(x,t).$$

Для функции $\overline{v}_m(x,t)$ справедливо уравнение

$$\overline{v}_{mtt}-\Delta\overline{v}_m-\Delta\overline{v}_{mtt}+[B_0-B_1G_\beta(\Phi(w_m))]\overline{v}_m=$$

$$=B_1[G_\beta(\Phi(w_m))-G_\beta(\Phi(w_0))]v_0,\quad (x,t)\in Q,\tag{15}$$

а также выполняются следующие условия:

$$\overline{v}_m(x,0)=\overline{v}_{mt}(x,0)=0,\quad x\in\Omega,\tag{16}$$

$$\overline{v}_m(x,t)|_S=0.\tag{17}$$

Умножая уравнение (15) на функцию $\overline{v}_{mt}(x,t)$, интегрируя по цилиндру Q, учитывая условия (16) и (17), применяя неравенство Юнга, а также неравенство (8), придём к соотношению

$$\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mt}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_i}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_it}^2(x,t)dx\leq$$

$$\leq\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{m\tau}^2dxd\tau+B_1^2[G_\beta(\Phi(w_m))-G_\beta(\Phi(w_0))]^2\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}v_0^2(x,\tau)dxdt.$$

Для функции $G_\beta(\xi)$ выполняется условие Липшица. В силу свойства непрерывности нормы, а также того, что из сильной сходимости следует слабая, при $m\to\infty$ имеет место сходимость $\Phi(w_m)-\Phi(w_0)\to 0$. С учётом этого получим, что при $m\to\infty$

$$\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mt}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_i}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_it}^2(x,t)dx\leq\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{m\tau}^2dxd\tau.$$

Далее, применяя лемму Гроноулла к одному из следствий данного неравенства, при $m\to\infty$ нетрудно прийти к соотношению

$$\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mt}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_i}^2(x,t)dx+\sum_{i=1}^n\int\limits_{\Omega}\overline{v}_{mx_it}^2(x,t)dx\leq 0.\tag{18}$$

На следующем шаге умножим уравнение (15) на функцию $-\Delta\overline{v}_{mt}(x,t)$, проинтегрируем по цилиндру Q. Интегрируя по частям, учитывая условия (16), (17), применяя неравенство Юнга, неравенство (8) и далее лемму Гронуолла, при $m \to \infty$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \overline{v}^2_{mx_it}(x,t)dx + \int\limits_{\Omega} (\Delta\overline{v}_m(x,t))^2 dx + \int\limits_{\Omega} (\Delta\overline{v}_{mt}(x,t))^2 dx \leq 0. \tag{19}$$

Умножив уравнение (15) на функцию $\overline{v}_{mtt}(x,t)$, проинтегрировав по цилиндру Q, учитывая условия (16), (17), оценки (18), (19), при $m \to \infty$ получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \overline{v}^2_{m\tau\tau} dx d\tau + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \overline{v}^2_{mx_i\tau\tau} dx d\tau \leq 0. \tag{20}$$

На последнем шаге, умножив уравнение (15) на функцию $-\Delta\overline{v}_{mtt}(x,t)$, проинтегрировав по цилиндру Q, учитывая (16), (17), оценки (18)–(20), придём к соотношению

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \Delta\overline{v}^2_{m\tau\tau} dx d\tau \leq 0, \tag{21}$$

справедливому при $m \to \infty$. Исходя из неравенств (18)–(21) получаем априорную оценку семейства функций $\{\overline{v}_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве V и сходимость

$$\|\overline{v}_m\|_V \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

из которой и следует, что оператор $\Re$ непрерывен в пространстве V.

Покажем теперь, что оператор $\Re$ компактен. Пусть $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность функций из пространства V. Так как последовательности $\{w_{mt}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{w_{mx_i}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ограничены в пространстве $W_2^1(Q)$, а также в силу теорем о компактности вложений $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \subset L_2(\partial Q)$ (см. [39; 40]) существует подпоследовательность $\{w_{m_k}(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ и функция $w_0(x,t)$ из пространства V, такие, что при $k \to \infty$ будут иметь место сходимости

$$\begin{gathered} w_{m_k}(x,t) \to w_0(x,t) \quad \text{слабо в} \quad W_2^2(Q), \\ \Delta w_{m_kt}(x,t) \to \Delta w_{0t}(x,t) \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q). \end{gathered}$$

Кроме того, функции $w_{m_kt}(x,T)$, $w_{m_kx_i}(x,T)$ и $w_{m_kx_it}(x,T)$ в $L_2(\Omega)$ будут сильно сходиться к функциям $w_{0t}(x,T)$, $w_{0x_i}(x,T)$ и $w_{0x_it}(x,T)$ соответственно.

Пусть, как и ранее, функция $v_m(x,t)$ есть образ функции $w_m(x,t)$ при действии оператора $\Re$, а $v_0(x,t)$ образ функции $w_0(x,t)$. Введём обозначение $\overline{v}_m(x,t) = v_m(x,t) - v_0(x,t)$. Повторяя ряд рассуждений, приводимых при доказательстве непрерывности оператора $\Re$, получим сходимость $\|\overline{v}_{m_k}\|_V \to 0$ при $k \to \infty$.

Таким образом, из любой ограниченной последовательности $\{w_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, принадлежащей пространству V, можно извлечь подпоследовательность $\{w_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что последовательность её образов $\{v_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ будет также сильно сходиться в пространстве V. Следовательно, оператор $\Re$ компактен.

Таким образом, для оператора $\Re$ на множестве V выполнены все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке [40], поэтому у оператора $\Re$ существует по крайней мере одна неподвижная точка. Обозначим эту точку через $u(x,t)$. Для неё выполняется уравнение (7), а также условия (2) и (3).

Для функции $u(x,t)$ выполняется включение $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, а значит, в силу того, что $f(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, функция $u_{tt}(x,t)$ будет также принадлежать данному пространству. Таким образом, функция $u(x,t)$ принадлежит требуемому классу и тем самым будет представлять собой искомое решение краевой задачи (2), (3), (7). Теорема доказана. □

Исследуем разрешимость обратной задачи (1)–(4). При этом важную роль будет играть неравенство $\Phi(u) \geq 0$ для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2), (3), (7).

Приведём утверждение, дающее достаточные условия выполнения этого неравенства. Для этого предварительно введём некоторые дополнительные обозначения:

$$R_1 = [m_0 N_1 (e^T - 1)]^{1/2}, \quad R_2 = (T^2 N_1 e^T + 2TA_0)^{1/2},$$

здесь N_1 — постоянная, определённая выше при доказательстве разрешимости краевой задачи (2), (3), (7_w).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1, функция $f(x,t)$ такова, что $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, а также справедливо соотношение*

$$2\left(\int\limits_Q f_t^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \min(R_1, R_2) \leq 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx - m_0 \int\limits_\Omega f^2(x,T)dx. \tag{22}$$

Тогда для решений $u(x,t)$ краевой задачи $(2), (3), (7)$ *выполняется неравенство* $\Phi(u) \geq 0$.

Доказательство. Введём обозначение

$$I(u) = \int\limits_\Omega u_t^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,T)dx.$$

В силу того, что

$$-\int\limits_Q f \cdot u_\tau dxd\tau = \int\limits_Q f_\tau \cdot udxd\tau - \int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx + \int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx,$$

будем иметь

$$\Phi(u) = I(u) + 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx - 2\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx + 2\int\limits_Q f_\tau udxd\tau. \tag{23}$$

Применяя неравенство Юнга, учитывая соотношение (6), оценим третье слагаемое правой части равенства (23):

$$2\left|\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx\right| \leq \delta^2 \int\limits_\Omega u^2(x,T)dx + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \leq$$

$$\leq \delta^2 m_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx + \frac{1}{\delta^2}\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx.$$

Учитывая вид функции $I(u)$, взяв $\delta^2 = 1/m_0$, получим

$$2\left|\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx\right| \le I(u) + m_0\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx.$$

Четвёртое слагаемое правой части равенства (23) можно оценить двумя способами, а именно,

$$2\left|\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau\right| \le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_Q u^2 dx d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(m_0\sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{x_i}^2 dx d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(m_0 N_1(e^T-1)\right)^{1/2} = 2R_1\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2} \tag{24}$$

или

$$2\left|\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau\right| \le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_Q u^2 dx d\tau\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left[T^2\int\limits_Q u_\tau^2 dx d\tau + 2A_0T\right]^{1/2} \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}\cdot\left[T^2N_1e^T + 2A_0T\right]^{1/2} = 2R_2\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Перепишем равенство (23) в виде

$$-\Phi(u) + I(u) + 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx = 2\int\limits_\Omega f(x,T)u(x,T)dx - 2\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau.$$

Отсюда, используя неравенство (25), имеем

$$-\Phi(u) + I(u) + 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx \le I(u) + m_0\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx - 2\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau$$

или

$$-\Phi(u) + 2\int\limits_\Omega f(x,0)u_0(x)dx - m_0\int\limits_\Omega f^2(x,T)dx \le -2\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau.$$

Учитывая условие (22) теоремы, получим

$$-\Phi(u) + 2\min\{R_1,R_2\}\cdot\left(\int\limits_Q f_\tau^2 dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le -2\int\limits_Q f_\tau u dx d\tau$$

Откуда, в силу неравенств (24), (25), получим $-\Phi(u) \le 0$ или, что то же самое, $\Phi(u) \ge 0$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_0(x), u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *выполняются условия* (5) *и* (22). *Тогда обратная задача* (1)–(4) *имеет решение* $\{u(x,t), a\}$, *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $\Delta u_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{x_i tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $\Delta u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a \geq 0$.

При выполнении условий теоремы 2 краевая задача (2), (3), (7) разрешима и решение этой задачи $u(x,t)$ принадлежит указанному классу.

Умножив уравнение (7) на функцию $u_t(x,t)$ и проинтегрировав полученное равенство по цилиндру Q, придём к соотношению

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,T)dx +$$

$$+[B_0 - B_1 G(\Phi(u))] \int\limits_\Omega u^2(x,T)dx = B + B_0 A_0 - B_1 A_0 G(\Phi(u)) + 2\int\limits_Q f \cdot u_\tau dx d\tau.$$

Отсюда, в силу вида $\Phi(u)$, а также неравенства (8), получим неравенство

$$\Phi(u) + B_1 A_0 G(\Phi(u)) \leq B + B_0 A_0.$$

Так как $G_\beta(\Phi(u)) \leq \Phi(u)$, то $(1 + B_1 A_0) \cdot G_\beta(\Phi(u)) \leq B + B_0 A_0$. Отсюда

$$G_\beta(\Phi(u)) \leq \frac{B + B_0 A_0}{1 + B_1 A_0}.$$

Вспоминая вид B_0 и B_1, получим $G_\beta(\Phi(u)) \leq B$. Но тогда $G_\beta(\Phi(u)) = \Phi(u)$. Следовательно, решение краевой задачи (2), (3), (7) $u(x,t)$ будет являться решением уравнения $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + [B_0 - B_1 \Phi(u)]u = f(x,t)$.

Обозначим $a = B_0 - B_1 \Phi(u)$. Тогда функция $u(x,t)$ и число a будут связаны уравнением (1) в цилиндре Q. Для функции $u(x,t)$ будут выполняться условия (2), (3), число $a \geq 0$. Покажем, что для функции $u(x,t)$ будет также выполняться и условие переопределения (4).

Имеет место равенство $a(A - A_0) = B_0 - B_1 \Phi(u)$. Введём дополнительное обозначение $c = \int\limits_\Omega u^2(x,T)dx$. Тогда справедливо также равенство $a(c - A_0) = B_0 - B_1 \Phi(u)$. Отсюда получаем $a(A - A_0) = a(c - A_0)$, а потому и

$$a(A - c) = 0. \tag{26}$$

Отсюда следует, что либо $a = 0$, либо $A - c = 0$.

Пусть $U_1(x,t)$ — решение краевой задачи (1)–(3) в случае, когда $a = 0$. Если $A = \int\limits_\Omega U_1^2(x,T)dx$, то $U_1(x,T)$ есть решение задачи (1)–(4) при $a = 0$. Таким образом, пару $\{U_1(x,t), 0\}$ можно рассматривать как решение обратной задачи (1)–(4).

Если же $A \neq \int\limits_\Omega U_1^2(x,T)dx$, то $a \neq 0$. Но в этом случае из равенства (26) будет следовать, что $A - c = 0$, а значит, $A = c$. Следовательно, для рассматриваемой нами функции $u(x,t)$ будет выполняться условие переопределения (4). И таким образом, пара $\{u(x,t), a\}$ есть решение исходной обратной задачи (1)–(4).

3. Замечания

1. Следует отметить, что ситуация значительно упрощается в случае, когда $f(x,t) \equiv 0$. В этом случае нет необходимости использовать условие (22), очевидно, что $\Phi(u) \geq 0$, функция же $u_0(x)$ может быть как нулевой, так и ненулевой.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t) \equiv 0$, $u_0(x), u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *и выполняется условие* (5). *Тогда обратная задача* (1)–(4) *имеет решение* $\{u(x,t), a\}$, *такое, что* $u(x,t), u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega))$, $\Delta u_t(x,t) \in L_2(Q)$, $u_{x_itt}(x,t) \in L_2(Q)$, $\Delta u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a \geq 0$.

2. В данной работе исследовался вопрос существования решений обратной задачи (1)–(4) в рассматриваемом нами классе, вопрос же о единственности этих решений не изучался.

3. В качестве примеров, показывающих непустоту множества входных данных, для которых выполняется условие теоремы 2, можно использовать примеры работы [29].

Список литературы

1. **Войт С. С.** Распространение начальных уплотнений в вязком газе // Учёные записки МГУ. Сер. : Механика. 1954. Т. 4, вып. 172. С. 125–142.
2. **Лонгрен К., Скотт Э.** Солитоны в действии. М. : Мир, 1981.
3. **Кириченко С. В.** Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического, псевдогиперболического и смешанного типа : автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук. Самара, 2014.
4. **Кожанов А. И.** Теоремы сравнения и разрешимость краевых задач для некоторых классов эволюционных уравнений типа псевдопараболических и псевдогиперболических. Новосибирск, 1990. (Препринт / СО АН СССР, Ин-т математики, № 17).
5. **Кожанов А. И.** Псевдогиперболические и гиперболические уравнения с растущими младшими членами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Вып. 5. 1999. С. 31–47.
6. **Pulkina L. S.** Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 2012, no. 116. P. 1–9.
7. **Азизбеков Э.** Смешанная задача для нелинейных псевдогиперболических уравнений. LAP Lambert Academic Publ., 2015.
8. **Демиденко Г. В.** Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
9. **Попов Н. С.** О разрешимости пространственных нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестн. СамГУ. 2015. № 3 (125). С. 29–43.
10. **Пулькина Л. С.** Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Изв. вузов. Сер. Математика. 2016. № 9. С. 42–50.
11. **Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.** Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, 1969.
12. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М. : Наука, 1989.
13. **Романов В. Г., Кабанихин С. И.** Обратные задачи геофизики. М. : Наука, 1991.
14. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во МГУ, 1994.
15. **Kozhanov A. I.** Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht : VSP, 1999.
16. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск : Сиб. кн. изд-во, 2009.

17. **Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.** Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York : Marcel Dekker, Inc., 1999.
18. **Belov Yu. Ya.** Inverse Problems for Partial Differntial Equations. Utrecht : VSP, 2002.
19. **Кожанов А. И.** Нелинейные и нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
20. **Кожанов А. И.** Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
21. **Pyatkov S. G.** On some classes of inverse problems for parabolic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2011. Vol. 18, no. 8. P. 917–934.
22. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation // Inverse Problems. 2012. Vol. 28, no. 7. P. 075006.
23. **Камынин В. Л.** Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 207–217.
24. **Пятков С. Г.** О некоторых классах обратных задач с данными переопределения на пространственных многообразиях // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1114–1126.
25. **Аниконов Ю. Е.** Формулы для решения некоторых обратных задач для эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1117–1119.
26. **Амиров А. Х.** Многомерная обратная задача для гиперболического уравнения и связанная с ней спектральная задача // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 2. С. 265–266.
27. **Lorenzi A., Paparoni E.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. Vol. 1, no. 4. P. 331–348.
28. **Kozhanov A. I., Safiullova R. R.** Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2010. Vol. 18, no. 1. P. 1–18.
29. **Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р.** Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфим. мат. журн. 2017. Т. 9, № 1. С. 63–74.
30. **Kozhanov A. I.** Hyperbolic equations with unknown coefficients // Symmetry. 2020. Vol. 12, no. 9. P. 1539.
31. **Lorenzi A., Paparoni E.** Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operetor equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. Vol. 5, no. 19. P. 523–548.
32. **Асанов А. Р.** Обратные задачи для псевдогиперболических уравнений : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 1994.
33. **Мегралиев Я. Т.** О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием // Изв. вузов. Поволж. регион. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1. С. 19–33.
34. **Курманбаева А. К.** Линейные обратные задачи для псевдогиперболических уравнений // Образоват. ресурсы и технологии. 2016. № 2. С. 343–351.
35. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // Inverse Problems Imaging. 2011. Vol. 5, no. 3. P. 695–714.
36. **Нахушев А. М.** Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012.
37. **Кожанов, А. И.** К теории уравнений составного типа : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1993.
38. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988.
39. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973.
40. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М. : Наука, 1980.

Поступила в редакцию 13.03.2022.
После переработки 14.04.2022.

Сведения об авторах

Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru.

Сафиуллова Регина Рафаиловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; e-mail: regina-saf@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 2. P. 164–180.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17203

ON SOME CLASS OF THE PSEUDOHYPERBOLIC EQUATIONS WITH AN UNKNOWN COEFFICIENT

A.I. Kozhanov[1,a], **R.R. Safiullova**[2,b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia*
[a] *kozhanov@math.nsc.ru*, [b] *regina-saf@yandex.ru*

We consider the inverse problems with an unknown coefficient a for a pseudohyperbolic equation $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = f(x,t)$ and investigate the solvability of the problem. We prove the theorems of the existence of the problem's regular solutions. The distinctiveness of the problems is a presence of new overdetermination conditions for the considered class of equations.

Keywords: *pseudohyperbolic equation, unknown coefficient, inverse problem, integral overdetermination, regular solution, existence.*

References

1. **Voyt S.S.** Rasprostranenie nachal'nykh uplotneniy v vyazkom gaze [A distribution of the initial consolidations in the viscous gas]. *Uchyonye zapiski MGU. Ser.: Mekhanika* [Scientists Notes of MSU. Ser.: Mechanics], 1954, vol. 4, no. 172, pp. 125–142. (In Russ.).
2. **Longren K., Skott E.** *Solitony v deystvii* [Solitions in action]. Moscow, Mir Publ., 1981. (In Russ.).
3. **Kirichenko S.V.** *Nelokal'nye zadachi s integral'nymi usloviyami dlya uravneniy giperbolicheskogo, psevdogiperbolicheskogo i smeshannogo tipa* [Nonlocal problems with integral conditions for the hyperbolic, pseudohyperbolic and mixed type equations]. PhD Thesis. Samara, 2014. (In Russ.).
4. **Kozhanov A.I.** *Teoremy sravneniya i razreshimost' kraevykh zadach dlya nekotorykh klassov evolyutsionnykh uravneniy tipa psevdoparabolicheskikh i psevdogiperbolicheskikh* [Theorems of the comparisons and the existence of the boundary-value problems for some classes of pseudoparabolic and pseudohyperbolic evolutionary equations]. Preprint of Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, Institute of Mathematics, no. 17. Novosibirsk, 1990. (In Russ.).
5. **Kozhanov A.I.** Psevdogiperbolicheskie i giperbolicheskie uravneniya s rastushchimi mladshimi chlenami [Pseudohyperbolic and hyperbolic equations with growing younger members]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Fizika* [Bulletin of Chelyabinsk State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Physics], 1999, iss. 5, pp. 31–47. (In Russ.).
6. **Pulkina L.S.** Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 2014, no. 116.
7. **Azizbekov E.** *Smeshannaya zadacha dlya nelineynykh psevdogiperbolicheskikh uravneniy* [A mixed problem for nonlinear pseudohyperbolic equations]. LAP Lambert Academic Publishing, 2015. (In Russ.).
8. **Demidenko G.V.** Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1028–1041.
9. **Popov N.S.** O razreshimosti prostranstvennykh nelokal'nykh kraevykh zadach dlya odnomernykh psevdoparabolicheskikh i psevdogiperbolicheskikh uravneniy [On solvability of nonlocal boundary-value problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Samara State University], 2015, no. 3 (125), pp. 29–43. (In Russ.).

10. **Pul'kina L.S.** A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45.
11. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G.** *Mnogomernye obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy* [Multidimensional inverse problems for differential equations]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1969. (In Russ.).
12. **Romanov V.G.** *Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki* [Inverse problems of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. (In Russ.).
13. **Romanov V.G., Kabanikhin S.I.** *Obratnye zadachi geofiziki* [Inverse problems of geophysics]. Moscow, Nauka Publ., 1991. (In Russ.).
14. **Denisov A.M.** *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Lomonosov Moscow State University, 1994. (In Russ.).
15. **Kozhanov A.I.** *Composite Type Equations and Inverse Problems*. Utrecht, VSP, 1999.
16. **Kabanikhin S.I.** *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk, Siberian Book Publ., 2009. (In Russ.).
17. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York, Marcel Dekker, Inc., 1999.
18. **Belov Yu.Ya.** *Inverse Problems for Partial Differntial Equations*. Utrecht, VSP, 2002.
19. **Kozhanov A.I.** Nelineynye i nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi [Nonlinear and loaded equations and inverse problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational mathematics and mathematical physics], 2004, vol. 44, no. 4, pp. 694–716. (In Russ.).
20. **Kozhanov A.I.** A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem. *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, iss. 6, pp. 784–795.
21. **Pyatkov S.G.** On some classes of inverse problems for parabolic equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2011, vol. 18, no. 8, pp. 917–934.
22. **Lorenzi A., Mola G.** Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 7, p. 075006.
23. **Kamynin V.L.** The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 205–213.
24. **Pyatkov S.G.** On some classes of inverse problems with overdetermination data on spatial manifolds. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 870–880.
25. **Anikonov Yu.E.** Formuly dlya resheniya nekotorykh obratnykh zadach dlya evolyutsionnykh uravneniy [Formulas for solvability some inverse problems for evolutionary equations]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the academy of sciences], 1991, vol. 319, no. 5, pp. 1117–1119. (In Russ.).
26. **Amirov A.H.** Mnogomernaya obratnaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya i svyazannaya s ney spektral'naya zadacha [Multidimensional inverse problem for hyperbolic equation and the spectral problem]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1991, vol. 319, no. 2, pp. 265–266. (In Russ.).
27. **Lorenzi A., Paparoni E.** Identifications of two unknown coefficients in an integro-differential hyperbolic equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 1, no. 4, pp. 331–348.
28. **Kozhanov A.I., Safiullova R.R.** Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 1–18.
29. **Kozhanov A.I., Safiullova R.R.** Determination of parameters in telegraph equation. *Ufa Mathematical journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 62–74.
30. **Kozhanov A.I.** Hyperbolic equations with unknown coefficients. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 9, p. 1539.
31. **Lorenzi A., Paparoni E.** Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operetor equation. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 1993, vol. 5, no. 19, pp. 523–548.

32. **Asanov A.R.** *Obratnye zadachi dlya psevdogiperbolicheskikh uravneniy* [Inverse problems for pseudohyperbolic equations]. PhD thesis. Bishkek, 1994. (In Russ.).
33. **Megraliev Ya.T.** O razreshimosti odnoy obratnoy krayevoy zadachi dlya psevdogiperbolicheskogo uravneniya chetvyortogo poryadka s dopolnitel'nym integral'nym usloviem [On solvability of the inverse problem for the fourth order pseudohyperbolic equation with additional integral condition]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki* [News of universities. Volga region. Ser. Physical and mathematical sciences], 2013, no. 1, pp. 19–33. (In Russ.).
34. **Kurmanbaeva A.K.** Lineynye obratnye zadachi dlya psevdogiperbolicheskikh uravneniy [Linear inverse problems for pseudohyperbolic equations]. *Obrazovatel'nye resursy i tekhnologii* [Educational resources and technologies], 2016, no. 2, pp. 343–351. (In Russ.).
35. **Lorenzi A., Mola G.** Identification of a real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces. *Inverse Problems Imaging*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 695–714.
36. **Nakhushev A.M.** *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and the applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012. (In Russ.).
37. **Kozhanov A.I.** *K teorii uravneniy sostavnogo tipa* [To the theory of composite type equations]. PhD thesis. Novosibirsk, 1993. (In Russ.).
38. **Sobolev S.L.** *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics* Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 2008.
39. **Ladyzhenskaya O., Ural'tseva N.** *Linear and Quasi-Linear Elliptic Equations.* New York, Academic Press, 1968.
40. **Trenogin V.A.** *Funktsianal'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. (In Russ.).

Article received 13.03.2022.
Corrections received 14.04.2022.