

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИМПУЛЬСНОГО ВИБРОПОГРУЖЕНИЯ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТИ

А. В. Журба^{1,a}, С. Д. Бабошин^{1,b}, Т. И. Костина^{2,c}, П. Рейно де Фитт^{3,d}

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

³Руанский Нормандский университет, Руан, Франция

^aav.zhurba.93@gmail.com, ^bijustbsd@gmail.com, ^ctata_sti@rambler.ru, ^dprf@univ-rouen.fr

Математическая модель функционирования импульсного погружателя состоит из моделей работы самого импульсного погружателя, модели взаимодействия свайного элемента с грунтом в виде силы трения боковой поверхности и лобового сопротивления, которые имеют феноменологический характер. Сам процесс работы погружающего агрегата описан с использованием ряда Максвелла — Фейера, и его оптимальность в смысле коэффициента асимметрии строго доказана. В то же время при использовании оптимальных соотношений при проектировании в обязательном порядке закладываются допуски, которые неизбежны при производстве элементов. Эти несовершенства нарушают форму оптимального импульса. Возникает задача исследования зависимости импульса от отклонений в параметрах и оценки допустимых значений этих отклонений. Для этого применялась программная реализация математической модели процесса функционирования импульсного погружателя, которая легла в основу численного эксперимента. В статье приводятся характерные смоделированные процессы погружения и их анализ.

Ключевые слова: математическое моделирование, импульсный погружатель, импульс Максвелла — Фейера, белый шум.

Введение

В работе [1] представлена задача оптимизации устройства погружения свай в грунт. Характерным отличием данного агрегата является наличие нескольких пар дебалансов, которые позволяют создать положительный импульс, действующий на свайный элемент, в несколько раз больший, чем при классической схеме вибропогружателя [2]. В дальнейшем, благодаря этому принципу, устройство получило название импульсный погружатель. Математическая модель работы импульсного погружателя описана в статье [3], там же поставлена задача оптимизации импульса по коэффициенту асимметрии, представляющему собой отношение максимального к минимальному значению вынуждающей силы на периоде. Данная задача оптимизации была решена и описана в работах [3; 4].

Построенная математическая модель с оптимальными параметрами позволила начать исследования самого процесса погружения, где помимо погружателя в комплексную математическую модель вошли параметры, характеризующие свайный элемент и грунт [5]. Феноменологическая математическая модель бокового и лобового сопротивления были выбраны из стандартов. На основе полученной модели

был разработан программный комплекс, позволяющий проводить численный эксперимент погружения свайных элементов при различных управляющих параметрах и параметрах грунта [6]. Проведено сравнение полученных решений с результатами натуральных экспериментов.

1. Математическая модель работы импульсного погружателя

В данном разделе будет описана математическая модель создания вынуждающей силы импульсного погружателя. Способ погружения свайных конструкций, основанный на эффекте резкого снижения сопротивления погружению свайного элемента при сообщении последнему вибрации, называется вибропогружением. Для импульсного погружателя дополнительным свойством является несимметричность максимальных значений положительной и отрицательной вынуждающих сил, что даёт своего рода импульс, от которого и пошло название импульсный погружатель.

1.1. Вынуждающая сила вибропогружателя

Конструктивная схема вибропогружателя изображена на рис. 1.

При вращении валов 1 с дебалансами 2 на их ось крепления действует центробежная сила, и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается через наголовник 3 свайному элементу 4. Симметрично расположенные дебалансы синхронно вращаются в разные стороны для уравнивания радиальных нагрузок и компенсации горизонтальных сил.

Математическая модель вынуждающей силы вибропогружателя может быть представлена в виде

$$F_{\text{вс}} = 2mn\omega^2 R \cos(\omega t), \quad (1)$$

где $F_{\text{вс}}$ — вынуждающая сила вибропогружателя, n — количество пар дебалансов, m — масса дебаланса, ω — угловая скорость вращения дебалансов (на рисунке их две), R — радиус смещения центра масс дебаланса относительно оси вращения, t — время.

Модифицирование конструкции вибропогружателя, предложенное в работе [1], поставило задачу оптимизации. Добавление в конструкцию вибропогружателя дебалансов, вращающихся на удвоенных скоростях по отношению к основным валам, привело к отличию абсолютных значений максимума и минимума вынуждающей силы устройства, отношение которых и стало критерием оптимизации.

1.2. Вынуждающая сила импульсного погружателя

Математическая модель формирования вынуждающей силы импульсным погружателем, который был предложен В. Н. Ермоленко и И. В. Насоновым в работах [1; 2], отличается от классического вибропогружателя разными радиусами пар дебалансов, поэтому имеет место равенство

$$F_{\text{вс}} = \sum_{k=0}^N m_k \omega_k^2 R_k \cos(\omega_k t),$$

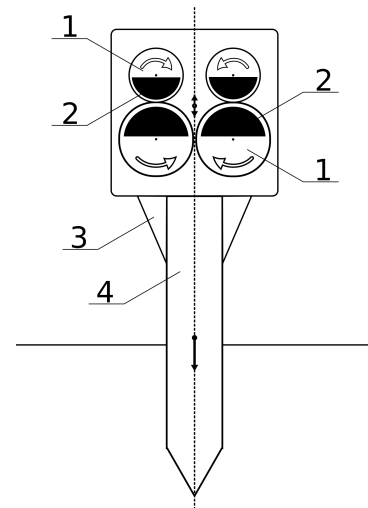


Рис. 1. Схема вибропогружателя

где m_k — масса k -й пары дебалансов, ω_k — угловая скорость вращения k -й пары дебалансов, R_k — радиус дебалансов. Различие радиусов делает различным и угловую скорость вращения пар дебалансов ω_k . При этом выполняются соотношения

$$\omega_k = k\omega_0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

В импульсном погружателе кроме эффекта снижения трения с помощью вибрации появляется ключевое свойство, заключающееся в появлении асимметрии между полезной и вредной вынуждающей силой. Полезной будем называть вынуждающую силу в тот момент времени, когда установка погружает сваю в грунт ($F_{\text{вс}(t)} > 0$). Вредной вынуждающую силу будем называть в тот момент времени, когда она направлена в противоположную погружению сторону ($F_{\text{вс}(t)} < 0$). В случае классического вибропогружателя полезная и отрицательная вынуждающие силы равны по амплитуде, что наглядно видно из графика функции (1), изображённого на рис. 2. Для импульсного погружателя эти амплитуды различны (рис. 3).

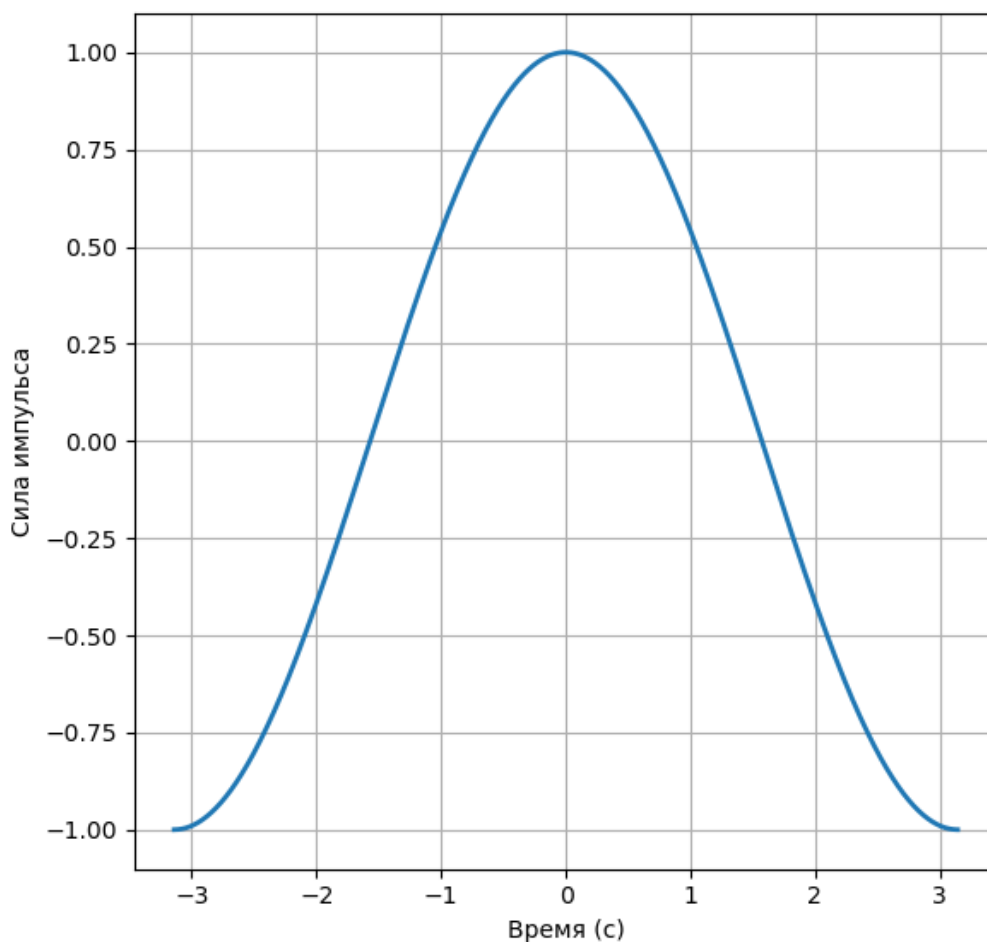


Рис. 2. График вынуждающей силы, создаваемой вибрационным погружателем

Максимум полезной силы есть максимум функции $F_{\text{вс}}(t)$, минимальное значение функции $F_{\text{вс}}(t)$ есть наибольшее абсолютное значение отрицательной вынуждающей силы. Абсолютное отношение максимального значения функции к минимальному значению называется коэффициентом асимметрии K_n :

$$K_n = \left| \frac{\max_{-\pi < t < \pi} F_{\text{вс}}(t)}{\min_{-\pi < t < \pi} F_{\text{вс}}(t)} \right|,$$

где n — число пар дебалансов в импульсном погружателе, t — время работы в течение одного периода функции $F_{\text{вс}}(t)$.

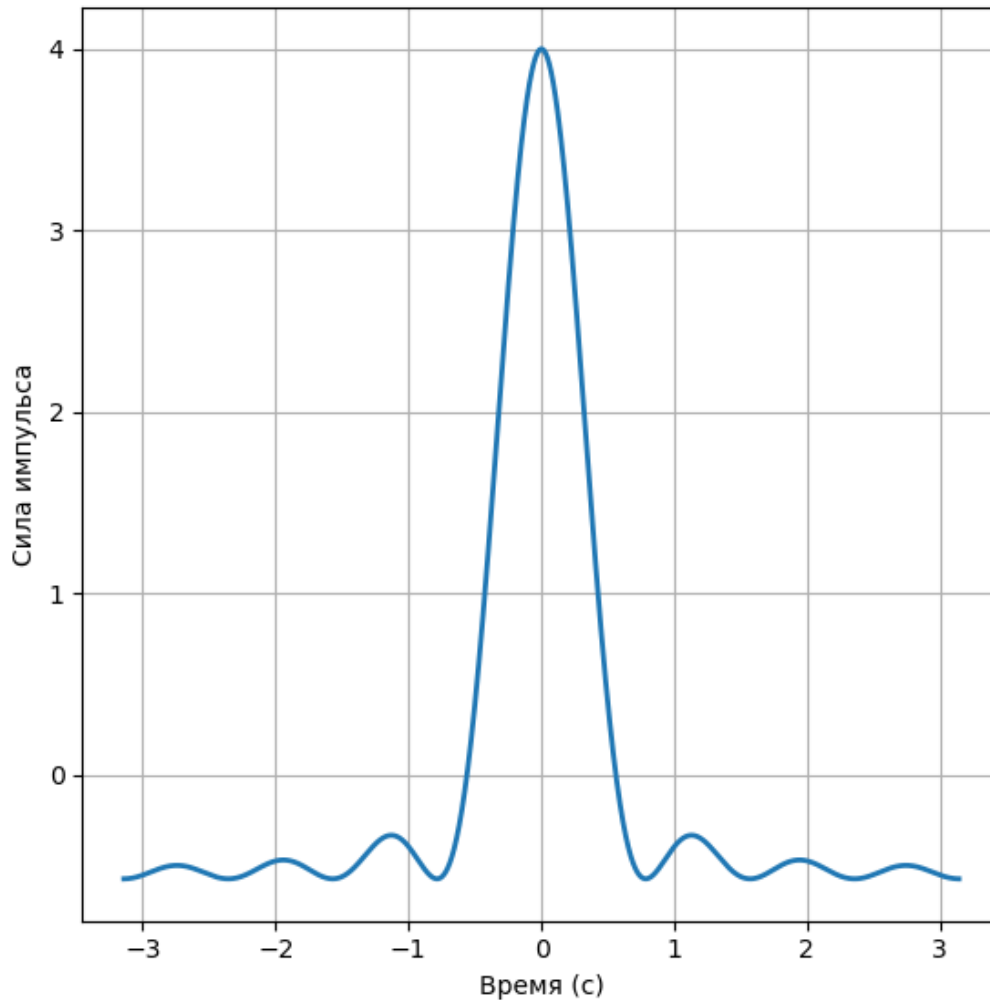


Рис. 3. График вынуждающей силы, создаваемой импульсным погружателем

Этот эффект асимметрии позволил при меньшем весе установки создавать больший положительный импульс. Таким образом, критерием оптимизации стал параметр — коэффициент асимметрии, который равен модулю отношения максимального к минимальному значению функции вынуждающей силы. Проблема выбора радиусов дебалансов с наибольшим коэффициентом асимметрии была решена в работах [3; 4; 7], где даётся определение оптимального импульса и доказывается теорема о выборе параметров оптимального импульсного погружателя.

При построении математической модели погружения сваи, описываемой в разделе 4 настоящей работы, использовалась модель оптимального импульсного погружателя, заданная с точностью до константы формулой

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n (n - k + 1) \cos(k\omega t), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad (3)$$

где ω — скорость вращения первой пары дебалансов. Функция (3) называется импульсом Максвелла — Фейера. Период $t \in [-\pi, \pi]$ соответствует полному обороту наибольшего по радиусу дебаланса. Данный отрезок выбран для удобства математической формализации задачи, на практике и в численном эксперименте длина периода зависит от скорости вращения ω , которая изменяется при управлении работой погружателя.

1.3. Математическая модель погружения свай

Дальнейшим развитием этой задачи стало применение модели импульсного погружателя к математической модели процесса погружения сваи или шпунта в грунт с учётом реологических свойств среды. Эта модель представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями [5]. Она учитывает лобовое и боковое сопротивление грунта движению сваи, а также включает в себя параметр управления работой импульсного погружателя — частота вращения дебалансов.

В приложениях к строительной тематике, в частности к установкам свайного фундамента, для моделирования процессов погружения свай используется уравнение

$$R = F_{\text{вс}} + F_{\text{тяж}} - F_{\text{бс}} - F_{\text{лс}}, \quad (4)$$

где R — равнодействующая сила, $F_{\text{вс}}$ — вдавливающая сила, создаваемая погружателем, $F_{\text{тяж}}$ — сила тяжести, $F_{\text{бс}}$ — сила бокового сопротивления, $F_{\text{лс}}$ — сила лобового сопротивления. Решение данного уравнения позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от типа погружающей установки, габаритов сваи и типа грунта.

Этап, когда погружающая установка тянет сваю вверх, преодолевая силу тяжести и сопротивление грунта по боковой поверхности, в настоящей работе рассматриваться не будет, так как в этом случае возможно разрушение сваи, поскольку бетонная свая хорошо переносит сильное сжатие, но разрушается при попытке растяжения. На практике этого не допускают с помощью управления угловой скорости вращения дебалансов, не позволяя устройству работать на больших оборотах в начале погружения.

Если полезная сила погружающей установки и сила тяжести не смогут превысить сопротивление грунта, то погружение остановится. После этого этапа происходит увеличение скорости оборотов валов дебалансов до тех пор, пока вынуждающей силы не станет достаточно, чтобы продолжить погружение сваи.

В дальнейшем будем пользоваться уравнением (4) для численного моделирования процесса.

Через m обозначим массу всей установки, через $x(t)$ — глубину погружения сваи, а через t — время погружения сваи. Тогда $R = ma = m\ddot{x}$, где a — ускорение, $F_{\text{тяж}} = mg$, где g — ускорение свободного падения, $F_{\text{лс}} = S_{\text{пс}}h_i(x(t), \varepsilon)$, где $S_{\text{пс}}$ — площадь поперечного сечения сваи, $h_i(x(t), \varepsilon)$ — удельное лобовое сопротивление, ε — коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи, $F_{\text{бс}} = Px(t)f_i(\psi)$ — сила бокового сопротивления, представляющая собой произведение периметра сваи P , глубины погружения $x(t)$ и удельной силы бокового сопротивления $f_i(\psi)$, зависящей от типа грунта.

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ глубина погружения равна 0 и свая неподвижна. Исходя из этого, получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$m\ddot{x} = F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} \cdot h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t)f_i(\psi) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (5), (6) позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от характеристик погружающей установки, размеров и веса сваи, а также типа грунта.

Заменяем \ddot{x} в уравнении (5) разностной аппроксимацией:

$$\begin{aligned} m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h} &= F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t) f_i(\psi), \\ x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} &= \frac{h^2}{m} (F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t) f_i(\psi)), \\ x_{i+1} &= 2x_i - x_{i-1} + \frac{h^2}{m} (F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}} h_i(x(t), \varepsilon) + Px(t) f_i(\psi)). \end{aligned} \quad (7)$$

Полученное рекуррентное равенство позволяет численно рассчитать текущее значение функции x при условии $x_0 = x_1 = 0$. Для программной реализации и численного расчёта глубины и времени погружения сваи был выбран язык программирования Python [6]. Программа рассчитывает глубину погружения сваи в дискретные моменты времени, используя равенства (7).

1.4. Математическая модель допусков на изготовление и различных дефектов

Предложенный в предыдущем разделе теоретический импульс, создаваемый вдавливающим устройством, имеет наивысший коэффициент асимметрии, равный числу пар дебалансов $K_n = n$ [4]. При этом важно подчеркнуть, что чем больше число звеньев и выше скорость оборотов, тем краткосрочнее действие импульса. Этот факт заставляет внимательнее изучать вопрос устойчивости и достижения оптимальной амплитуды. Ведь если скорость вращения валов увеличится до значений, при которых пик импульса будет как бы «срезаться», то значение коэффициента асимметрии перестанет быть оптимальным, а значит, основной принцип импульсного погружателя будет нарушен, процесс погружения замедлится или вообще остановится, не достигнув теоретически возможных значений.

Отличия практической реализации от теоретического расчёта вызваны двумя источниками. Первый — это неидеальность изготовления, а второй — уникальные свойства грунта. В настоящей статье проводится исследование устойчивости модели к первому типу источника погрешности, вводится дополнительный параметр погрешности в слагаемое вынуждающей силы $F_{\text{вс}}$. При этом погрешность будет как постоянной, вызванной допусками на изготовление, так и случайной, возникающей вследствие несовершенства электродвигателя и ременной передачи.

Основными дефектами ременных передач, вместе с дефектами подшипников, являются дефекты шкивов: перекося, неравномерный износ, несоосность с валом приводят к периодическому изменению натяжения ремня, что выражается в модуляции низкочастотной вибрации передачи и сил трения в подшипниках с частотой вращения дефектного шкива. Также непараллельность валов и осевой сдвиг шкивов приводят к возникновению периодических ударных нагрузок на ремень (цепь) с частотой вращения одного из шкивов (или обоих), импульсно модулирующих силы трения в подшипниках передачи и высокочастотную вибрацию этих подшипников. Помимо этого отметим ослабление натяжения ремня, приводящее к нестабильности амплитуд гармоник с частотой вращения обоих валов. А износ ремня, приводящий к периодическому изменению силы натяжения, вызывает модуляцию низкочастотной вибрации передачи частотой вращения ремня и её гармониками, а также к модуляции сил трения в подшипниках передачи и высокочастотной вибрации этих подшипников.

В настоящей работе впервые рассмотрен случай, когда скорость вращения валов, соединённых ременной передачей, происходит в поле белого шума. Эта поста-

новка задачи приходит из практической реализации деталей конструкций и всевозможных дефектов элементов погружающей установки. Важно отметить, что имеющиеся теоретические результаты о получении оптимального импульса зависят от отношения угловых скоростей дебалансов, даже незначительная рассинхронизация которых может привести к существенному отклонению от оптимального значения и к изменению важного параметра процесса погружения — скорости.

Всё вышеперечисленное является также дополнительным условием на соотношение частот вращения валов дебалансов (3), что приводит к модели $\tilde{\omega} = \omega_k(1 + \delta_k(t))$, где $\delta_k(t)$ — погрешность угловой скорости вращения вала k -го дебаланса в момент времени t , вызванная описанными выше дефектами узлов погружателя. Для выбора модели такой погрешности в настоящей статье предлагается модель белого шума, или аддитивного гауссовского распределения — обобщённый стационарный случайный процесс $X(t)$ с постоянной спектральной плотностью и нормальным законом распределения стандартного отклонения [8].

В численном эксперименте будем рассматривать различные порядки стандартных отклонений случайной величины $\sigma(\delta)$, описывающей шум в ременной передаче, и оценивать, насколько это влияет на коэффициент асимметрии и основные характеристики процесса погружения в целом.

2. Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента были выбраны следующие условия. Импульсный погружатель имеет 6 пар дебалансов $N = 6$, радиусы которых подобраны таким образом, что импульс вынуждающей силы является оптимальным и его коэффициент асимметрии равен $K = 6$. Из инженерных таблиц для грунта типа песок были выбраны $h_i(x(t), x_i)$ — удельное лобовое сопротивление, ξ — коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи, а также $f_i(\psi)$ — удельная сила бокового сопротивления.

Расчёт прекращался при выполнении любого из условий:

1. Погружение сваи на глубину $x(t) = 4$ м, означающее, что работа выполнена.
2. Превышение максимального значения числа оборотов первой пары дебалансов $\max(\omega) = 3000$ об./мин. При этом работа не выполнена.
3. Отрицательная вынуждающая сила превысит сумму силы тяжести и силы бокового сопротивления $F_{вс} > F_{гс} + m * g$, что может привести к разрушению бетонных свай, которые хрупки к деформации растяжения.

В качестве стандартного отклонения были взяты величины $\sigma(\delta) = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$, а также идеальный случай. Графическое представление результатов приводится на рис. 4, 5.

При $\sigma > 10^{-3}$ вычисление заканчивалось выполнением второго условия, т. е. свая не погружена на требуемую глубину. Это означает, что рассинхронизация вращения дебалансов приводит не только к значительному уменьшению коэффициента асимметрии, но и к неустойчивому поведению погружателя. Такие большие значения шума быстро диагностируются в ходе работы и их стараются не допускать, проводя устранение дефектов. Импульс при таком шуме изображен на рис. 5, а.

С практической точки зрения наиболее интересен результат при $\sigma(\delta) \leq 10^{-3}$, так как при таком шуме диагностировать неисправность затруднительно. Результат моделирования показал, что при $\sigma(\delta) = 10^{-3}$ сваи погружаются, но не до конца, т. е. вычисления заканчиваются при выполнении второго условия (достигается максимальная частота работы погружателя). Импульс изображён на рис. 5, б.

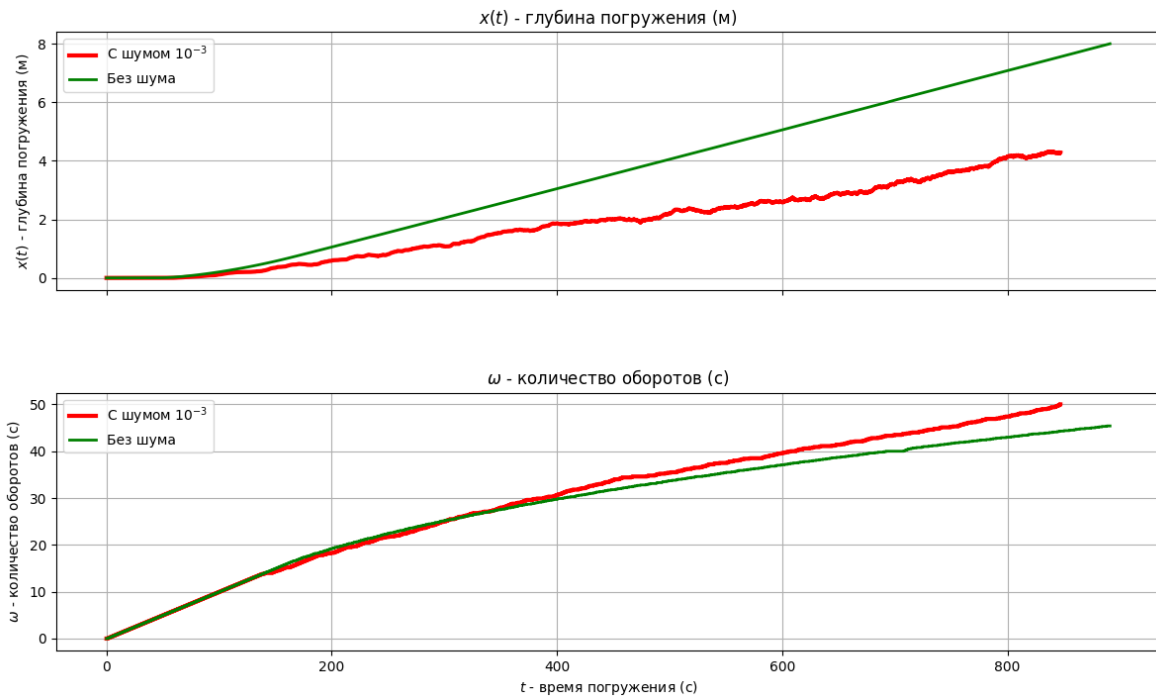


Рис. 4. Графики угловых скоростей и глубины погружения сваи в грунт, зелёный — идеальный случай; красный — поле шума со стандартным отклонением $\sigma = 10^{-3}$

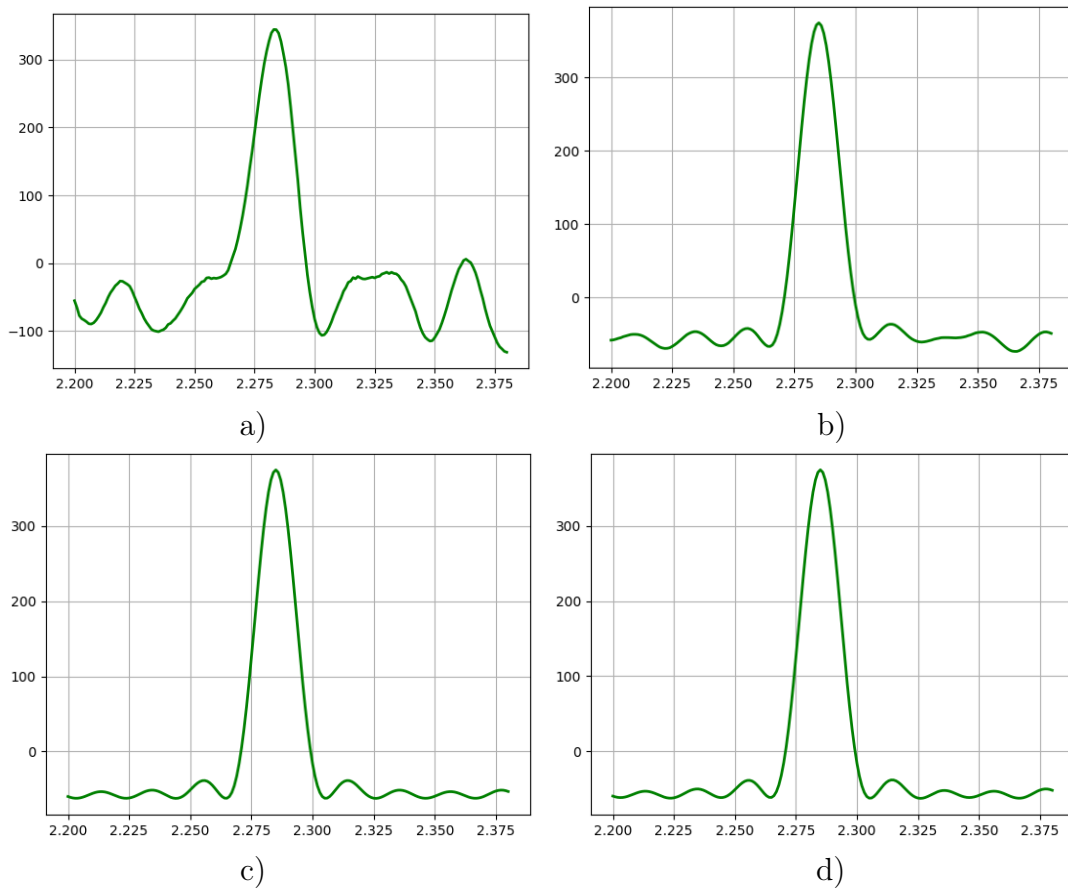


Рис. 5. График импульса вынуждающей силы: а) поле шума со стандартным отклонением $\sigma = 10^{-2}$, б) поле шума со стандартным отклонением $\sigma = 10^{-3}$, в) поле шума со стандартным отклонением $\sigma = 10^{-4}$, д) идеальный случай, без шума

Погружение сваи на требуемую глубину (первое условие остановки) происходит лишь в отсутствие поля шума или при стандартном отклонении $\sigma \leq 10^{-4}$. Импульс при этом незначительно изменяет коэффициент асимметрии, что показывает и визуальное сравнение рис. 5, с и 5, d.

В заключение можно сделать вывод о подтверждении адекватности построенной математической модели. Результаты численного эксперимента показали, что при большом стандартном отклонении поля белого шума $\sigma(\delta) \geq 10^{-3}$ работа импульсного погружателя невозможна или крайне затруднительна. С другой стороны, при изготовлении агрегатов обязательно присутствуют допуски и погрешности, а также в ходе эксплуатации появляются различные дефекты. Но если их суммарное отклонение будет в допустимых пределах, то предложенная оптимальная конструкция импульсного погружателя будет к ним устойчива.

Дальнейшее исследование требует уточнения модели грунта и его реологических свойств. Но в этом случае будет необходимо проводить анализ нелинейного уравнения погружения [9].

Список литературы

1. **Ермоленко В. Н.** Инновационные решения для свайного фундаментостроения // Стройпрофиль. 2010. № 6 (84). С. 20–22.
2. Универсальное вдавливающее устройство : пат. 2388868 Рос. Федерация : МПК / В. Н. Ермоленко, И. В. Насонов, И. С. Суровцев. № 2009106429/03; заявл. 24.02.2009; опубл. 10.05.2010. Бюл. № 13.
3. **Ермоленко В. Н., Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.** Оптимизация полигармонического импульса // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. 2012. № 27 (286), вып. 13. С. 35–44.
4. **Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.** Многочлены Максвелла — Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // Докл. Акад. наук. 2012. Т. 445, № 3. С. 271–273.
5. **Костин Д. В., Костина Т. И., Бабошин С. Д.** Численное моделирование процесса погружения сваи методом Эйлера // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. конф. «Воронеж. зимн. мат. шк.». Воронеж : Издат. дом ВГУ, 2019. С. 173–174.
6. Программа работы импульсного погружателя : свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ 2020667045 Рос. Федерация / Д. В. Костин, А. С. Мызников, А. В. Журба, А. А. Уткин; заявитель Федер. гос. бюджет. образовательное учреждение высшего образования «Воронеж. гос. пед. ун-т» (ФГБОУ ВО «ВГПУ»). № 2020662270; заявл. 13.10.2020; опубл. 21.12.2020.
7. **Костин Д. В.** Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 90–109.
8. **Яковлева Т. В., Крысько В. А. мл., Крысько В. А.** Нелинейная динамика контактного взаимодействия трёхслойной балочно-пластинчатой наноструктуры в поле белого шума // Динамика систем, механизмов и машин. 2018. Т. 6, № 2. С. 294–300.
9. **Костин Д. В., Костина Т. И., Журба А. В., Мызников А. С.** Нелинейная математическая модель импульсного погружателя // Челяб. физ.-мат. журн. 2021. Т. 6, вып. 1. С. 34–41.

Поступила в редакцию 03.11.2021.

После переработки 03.12.2021.

Сведения об авторах

Журба Александр Владимирович, аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: av.zhurba.93@gmail.com.

Бабошин Сергей Дмитриевич, аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: ijustbsd@gmail.com.

Костина Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; e-mail: tata_sti@rambler.ru.

Рейно де Фитт Поль, профессор, Руанский Нормандский университет, Мон-Сен-Эньян, Франция; e-mail: prf@univ-rouen.fr.

ON THE MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF IMPULSIVE VIBRATION DRIVING PROCESS AND ITS STABILITY**A.V. Zhurba^{1,a}, S.D. Baboshin^{1,b}, T.I. Kostina^{2,c}, P. Raynaud de Fitte^{3,d}**¹ *Voronezh State University, Voronezh, Russia*² *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*³ *Universite de Rouen Normandie, Rouen, France*^a *av.zhurba.93@gmail.com*, ^b *ijustbsd@gmail.com*, ^c *tata_sti@rambler.ru*, ^d *prf@univ-rouen.fr*

A mathematical model of the functioning of the impulse pile driver consists of models of the operation of the impulse pile driver itself, a model of the interaction of the pile element with the soil in a form of the friction force of the side surface and frontal resistance, which are phenomenological. The process of operation of the impulse pile driver is described using the Maxwell — Fejer series, and its optimality in terms of the asymmetry coefficient has been rigorously proven. At the same time, when using optimal ratios in the design, tolerances are mandatory, which are inevitable in the production of elements. These imperfections disrupt the shape of the optimal pulse. A problem arises of studying the dependence of the impulse on deviations in parameters and estimating admissible values of these deviations. For this, a software implementation of the mathematical model of the process of functioning of the impulse pile driver was used, which formed a basis of a numerical experiment. The article presents the characteristic results of the experiment and their analysis.

Keywords: *mathematical modeling, pile-driving vibration loader, impulse driver, asymmetry coefficient.*

References

1. **Ermolenko V.N.** Innovatsionnye resheniya dlya svaynogo fundamentostroyeniya [Innovative solutions for pile foundation construction]. *Stroyprofil'*, 2010, no. 6 (84), pp. 20–22. (In Russ.).
2. **Ermolenko V.N., Nasonov I.V., Surovtsev I.S.** *Universal'noye vdavlivayushcheye ustroystvo* [General-Purpose Indentation Device]. Patent RF, no. 2388868, 2009.
3. **Ermolenko V.N., Kostin V.A., Kostin D.V., Saprnov Yu.I.** Optimizatsiya poligarmonicheskogo impul'sa [Optimization of a polyharmonic impulse]. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2012, no. 27 (286), iss. 13, pp. 35–44. (In Russ.).
4. **Kostin V.A., Kostin D.V., Saprnov Yu.I.** Maxwell — Fejer polynomials and optimization of polyharmonic impulse. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 512–514.
5. **Kostin D.V., Kostina T.I., Baboshin S.D.** Chislennoye modelirovaniye protsessa pogruzheniya svai [Numerical simulation of the pile driving process]. *Modern Methods of Function Theory and Related Problems*, materials of the International Conference «Voronezh Winter Mathematical School». Voronezh, Voronezh State University, 2019. Pp. 173–174. (In Russ.).
6. **Kostin D.V., Myznikov A.S., Zhurba A.V., Utkin A.A.** *Programma raboty impul'snogo pogruzhatelya* [The program of work of the impulse plunger]. The Certificate on Official Registration of the Computer Program, no. 2020667045, 2020. (In Russ.).

7. **Kostin D.V.** Bifurcations of resonance oscillations and optimization of the trigonometric impulse by the nonsymmetry coefficient. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 12, pp. 1709–1728.
8. **Yakovleva T.B., Krysko A.V.-jr, Krysko A.V.** Nelineynaya dinamika kontaktnogo vzaimodeystviya tryokhsloynoy balochno-plastinchatoy nanostrukturny v pole belogo shuma [Nonlinear dynamics of the contact interaction of a three-layer plate-beam nanostructure in a white noise field]. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 294–300. (In Russ.).
9. **Kostin D.V., Kostina T.I., Zhurba A.V., Myznikov A.S.** The nonlinear mathematical model of the impulse pile driver. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2021, vol. 6, no. 1, pp. 34–41.

Article received 03.11.2021.

Corrections received 03.12.2021.