МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2022. Т. 7, вып. 2. С. 139–151.

УДК 517.588 DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17201

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЁННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. П. Волчкова[1], Вит. В. Волчков[2]

[1] *Донецкий национальный технический университет, Донецк*
[2] *Донецкий национальный университет, Донецк*
[a] *volna936@gmail.com*

Изучаются векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса в шаре на вещественном гиперболическом пространстве. Получено описание таких полей в виде рядов по специальным функциям.

Ключевые слова: *векторное поле, гиперболическое пространство, нулевое сферическое среднее, сферическая гармоника, гипергеометрический ряд Горна.*

Введение

Одним из хорошо известных критериев T-периодичности непрерывной функции f на вещественной оси является постоянство интегралов от f по всем отрезкам длины T на $\mathbb{R}$, т. е. условие

$$\int_x^{x+T} f(y)dy = \int_0^T f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Согласно теории рядов Фурье всякую T-периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right), \tag{2}$$

т. е. представить f в виде суммы константы $a_0/2$ и последовательности периодических функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$f_m''(x) + \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} f_m(x) = 0.$$

Естественным аналогом условия (1) в многомерном случае является постоянство интегралов от функции по всем шарам фиксированного радиуса. Близкий класс функций получается, если здесь заменить шары на сферы фиксированного радиуса. Эти классы, а также различные их аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренстейна и других авторов (см. [1–24]). Отметим, что доказательство ряда из полученных результатов существенно опирается на описание указанных классов в виде рядов Фурье по сферическим гармоникам и другим специальным функциям [11; 12; 17–22; 24].

Гораздо менее изученным является случай векторных полей. Если рассматривать $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) - f\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса $T/2$. Таким образом, равенство (2) даёт представление для полей с нулевым потоком через все сферы радиуса $T/2$ в $\mathbb{R}$. Нетривиальные обобщения этого факта на векторные поля в евклидовых пространствах получены в работах [5; 25]. При этом остаётся совершенно неисследованным случай неевклидовых пространств, в частности пространств постоянной кривизны. Целью данной работы является характеризация векторных полей, имеющих нулевой поток через все сферы фиксированного радиуса на вещественном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$.

1. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ со стандартной структурой многообразия и с римановой структурой, задаваемой формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{(\xi, \eta)}{(1 - |x|^2)^2}, \tag{3}$$

где ξ и η — произвольные касательные векторы в точке $x \in B^n$. Здесь через (ξ, η) обозначено каноническое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Это риманово многообразие называют моделью Пуанкаре вещественного гиперболического пространства $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ (см., например, [26, раздел IV]).

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(B^n)$ действует транзитивно на B^n посредством конформных отображений. Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре вещественного гиперболического пространства, реализованного на шаре B^n. Гиперболическая метрика d на этом пространстве определяется равенством

$$d(0, x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |x|}{1 - |x|}, \quad x \in B^n,$$

и условием инвариантности относительно группы $\mathcal{M}(B^n)$. Геодезический шар

$$B_R = \{x \in B^n : d(0, x) < R\} \quad (R > 0)$$

(соответственно, геодезическая сфера $S_R = \{x \in B^n : d(0, x) = R\}$) совпадает с открытым евклидовым шаром (соответственно, евклидовой сферой) радиуса $\operatorname{th} R$ с центром в нуле. Гиперболические эквиваленты элемента объёма dx и элемента площади $d\sigma$ в $\mathbb{R}^n$ определяются равенствами

$$dx_h = \frac{dx}{(1 - |x|^2)^n}, \quad d\sigma_h = \frac{d\sigma}{(1 - |x|^2)^{n-1}}. \tag{4}$$

Гиперболическая дивергенция div_h гладкого векторного поля $\overrightarrow{A} : B_R \to \mathbb{C}^n$ связана с евклидовой дивергенцией div_e соотношением

$$\operatorname{div}_h \overrightarrow{A} = (1 - |x|^2)^n \operatorname{div}_e \frac{\overrightarrow{A}}{(1 - |x|^2)^n}. \tag{5}$$

Поле $\overrightarrow{A} \in C^1(B_R)$ называется соленоидальным, если $\mathrm{div}_h \overrightarrow{A} = 0$.

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ множество всех непрерывных векторных полей $\overrightarrow{A} : B_R \to \mathbb{C}^n$, имеющих нулевой поток через все геодезические сферы радиуса r, лежащие в B_R, т. е.

$$\mathcal{V}_r(B_R) = \Big\{ \overrightarrow{A} \in C(B_R) : \int_{gS_r} \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{n_h} \rangle \, d\sigma_h = 0 \ \ \forall g \in \mathcal{M}(B^n) : gS_r \subset B_R \Big\},$$

где

$$\overrightarrow{n_h} = (1 - |x|^2) \overrightarrow{n}, \tag{6}$$

а $\overrightarrow{n}$ — евклидов единичный вектор внешней нормали к соответствующей гладкой поверхности. Описание гладких полей класса $\mathcal{V}_r(B_R)$, приведённое ниже, опирается на свойства рядов Фурье по сферическим гармоникам и свойства некоторых специальных функций.

Пусть, как обычно, Γ — гамма-функция, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$ — символ Похгаммера, $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т. е.

$$F(a,b;c;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j \, j!} z^j, \quad |z| < 1 \tag{7}$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.1]). Обозначим $N(r)$ — множество положительных корней λ уравнения $P^{-n/2}_{-(i\lambda+1)/2}(\mathrm{ch}\, 2r) = 0$, где

$$P^{\mu}_{\zeta}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{\mu/2} F\left(-\zeta, \zeta+1; 1-\mu; \frac{1-t}{2} \right)$$

есть функция Лежандра первого рода [27, гл. 3, § 3.2]. Отметим, что множество $N(r)$ имеет вид $N(r) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, причём $\lambda_j \sim \pi j / r$, $j \to \infty$ (см. [28, лемма 7]).

Пусть $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathrm{Harm}(k)$ — пространство сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$. Пространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\mathrm{Harm}(k)$, $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [29, гл. 4, § 2]). Обозначим d_k — размерность $\mathrm{Harm}(k)$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathrm{Harm}(k)$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |x|$, $\sigma = x/|x|$, $x \neq 0$. Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в $\mathbb{R}^n$ по формуле $Y_l^{(k)}(x) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)$. Всякой локально суммируемой в B_R функции f соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \tag{8}$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \tag{9}$$

Всюду в дальнейшем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \dfrac{i\lambda + n - 1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in [0,1)$ обозначим

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \rho^k (1-\rho^2)^n H_{\lambda,k}(\rho), \tag{10}$$

где

$$H_{\lambda,k}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu + 1 - \frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{(2j+k+n)\left(k + \frac{n}{2}\right)_j \, j!} F\left(n - \nu, j + \frac{k+n}{2}; j + 1 + \frac{k+n}{2}; \rho^2 \right). \tag{11}$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, лежащем в промежутке $[0;1)$ (см. доказательство леммы 7 ниже).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $r>0$, $r<R\le+\infty$, $\overrightarrow{A}: B_R\to\mathbb{C}^n$ *— векторное поле класса* C^∞. *Для того, чтобы выполнялось включение* $\overrightarrow{A}\in\mathcal{V}_r(B_R)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overrightarrow{A}(x)=(1-|x|^2)^n\mathcal{B}(x)\overrightarrow{x}+\overrightarrow{C}(x),\quad x\in B_R, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{C}$ *— соленоидальное векторное поле класса* C^∞, $\mathcal{B}$ *— скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами*

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho)=\sum_{\lambda\in N(r)}\gamma_{k,l,\lambda}\,\rho^kH_{\lambda,k}(\rho),\quad 0\le\rho<\operatorname{th}R, \tag{13}$$

в которых константы $\gamma_{k,l,\lambda}$ *убывают быстрее любой фиксированной степени* λ *при* $\lambda\to\infty$.

Из следствия 1 ниже видно, что ряд (13) можно почленно дифференцировать на $[0,1)$ любое число раз. Отметим также, что функции $H_{\lambda,k}$ выражаются через гипергеометрический ряд Горна двух переменных (см. [30, введение; 31, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{D}$ *— ограниченная область в* $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ *с гладкой границей* $\partial\mathcal{D}$, $\operatorname{cl}\mathcal{D}=\mathcal{D}\cup\partial\mathcal{D}$. *Если* $\overrightarrow{A}\in C^1(\operatorname{cl}\mathcal{D})$, *то*

$$\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}_h\overrightarrow{A}dx_h=\int_{\partial\mathcal{D}}\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h}\rangle\,d\sigma_h.$$

Доказательство. В силу равенств (3), (4) и (6) имеем

$$\int_{\partial\mathcal{D}}\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h}\rangle\,d\sigma_h=\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{(\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h})}{(1-|x|^2)^2}\frac{d\sigma}{(1-|x|^2)^{n-1}}=\int_{\partial\mathcal{D}}\frac{(\overrightarrow{A},\overrightarrow{n})}{(1-|x|^2)^n}\,d\sigma.$$

Используя теперь формулу Гаусса — Остроградского в $\mathbb{R}^n$ и формулы (4), (5), получаем

$$\int_{\partial\mathcal{D}}\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{n_h}\rangle\,d\sigma_h=\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}_e\frac{\overrightarrow{A}}{(1-|x|^2)^n}\,dx=\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}_h\overrightarrow{A}\,dx_h.$$

Таким образом, лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $f\in C^1(B_R)$ *и*

$$F(x)=\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Тогда коэффициенты Фурье функций f *и* F *по сферическим гармоникам связаны соотношением*

$$F_{k,l}(\rho)=\rho f'_{k,l}(\rho),\quad 0\le\rho<\operatorname{th}R. \tag{14}$$

Доказательство. Из определения коэффициентов Фурье и функции F имеем

$$F_{k,l}(\rho)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} F(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\rho\sigma_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma. \tag{15}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (9) по ρ, получаем

$$f'_{k,l}(\rho)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\rho\sigma)\sigma_j\,\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma. \tag{16}$$

Сравнивая формулы (15) и (16), приходим к соотношению (14). $\square$

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{B}\in C^1(B_R)$, $\overrightarrow{B}(x)=(1-|x|^2)^n\mathcal{B}(x)\overrightarrow{x}$. Тогда*

$$(1-|x|^2)^{-n}(\mathrm{div}_h\overrightarrow{B})(x)=n\mathcal{B}(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x_j}(x). \tag{17}$$

Доказательство. В силу (5) имеем

$$(1-|x|^2)^{-n}(\mathrm{div}_h\overrightarrow{B})(x)=\mathrm{div}_e(\mathcal{B}(x)\overrightarrow{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{B}(x)x_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\mathcal{B}(x)+x_j\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x_j}(x)\right)=n\mathcal{B}(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial x_j}(x),$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\overrightarrow{A}\in C^2(B_R)$ и*

$$\overrightarrow{B}(x)=(1-|x|^2)^n\mathcal{B}(x)\overrightarrow{x}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{B}(x)=\int\limits_0^1\frac{(\mathrm{div}_h\overrightarrow{A})(tx)\,t^{n-1}}{(1-t^2|x|^2)^n}dt.$$

Тогда

$$\mathrm{div}_h\overrightarrow{B}=\mathrm{div}_h\overrightarrow{A}. \tag{19}$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho)=\int\limits_0^1\frac{(\mathrm{div}_h\overrightarrow{A})_{k,l}(t\rho)\,t^{n-1}}{(1-t^2\rho^2)^n}dt,\quad k\in\mathbb{Z}_+,\quad 1\le l\le d_k. \tag{20}$$

Доказательство. Для краткости положим

$$f(x)=\frac{(\mathrm{div}_h\overrightarrow{A})(x)}{(1-|x|^2)^n}.$$

Используя (17) и формулу

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}(f(tx))=t\frac{d}{dt}(f(tx)),$$

находим

$$(1-|x|^2)^{-n}(\mathrm{div}_h\overrightarrow{B})(x)=n\int\limits_0^1 f(tx)t^{n-1}dt+\int\limits_0^1 t^{n-1}\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial}{\partial x_j}(f(tx))dt=$$

$$=n\int\limits_0^1 f(tx)t^{n-1}dt+\int\limits_0^1 t^n\frac{d}{dt}(f(tx))dt.$$

Преобразуя последнее слагаемое с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(1-|x|^2)^{-n}(\mathrm{div}_h\overrightarrow{B})(x)=n\int\limits_0^1 f(tx)t^{n-1}dt+t^n\, f(tx)\Big|_0^1-n\int\limits_0^1 f(tx)t^{n-1}dt=f(x),$$

т. е. равенство (19) доказано.

Далее, используя (9) и теорему Фубини, имеем

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathcal{B}(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\int\limits_0^1 f(t\rho\sigma)t^{n-1}dt\,\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma=$$

$$=\int\limits_0^1 t^{n-1}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}d\sigma dt=\int\limits_0^1 t^{n-1}f_{k,l}(t\rho)dt.$$

Отсюда следует равенство (20). □

Лемма 5. *Пусть* $a,b\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,b>1$, $\rho_0\in(0,1)$. *Тогда*

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]}|F(a,b;b+1;\rho^2)|\le|b|(1-\rho_0^2)^{-\max\{\mathrm{Re}\,a,0\}},\tag{21}$$

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]}\left|\frac{d}{d\rho}F(a,b;b+1;\rho^2)\right|\le 2\rho_0|a||b|(1-\rho_0^2)^{-\max\{\mathrm{Re}\,a+1,0\}}.\tag{22}$$

Доказательство. В силу интегрального представления Эйлера гипергеометрической функции при $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$ имеем

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.3, формула (10)]). В частности, если $\mathrm{Re}\,b>0$, $0\le\rho<1$, то

$$\frac{F(a,b;b+1;\rho^2)}{b}=\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t\rho^2)^{-a}dt.\tag{23}$$

Отсюда нетрудно получить оценку (21). Оценка (22) следует из (21) и следующей формулы дифференцирования гипергеометрической функции:

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z)=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z)\tag{24}$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.2, формула (7)]). □

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in [0,1)$ положим

$$h_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k}\rho^k(1-\rho^2)^\nu F\left(\nu+k, \nu+1-\frac{n}{2}; \frac{n}{2}+k; \rho^2\right), \tag{25}$$

где, как и выше, $\nu = \nu(\lambda) = \dfrac{1}{2}(i\lambda+n-1)$. Если $\lambda \in (0,+\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0,1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]} \left|\frac{d^s}{d\rho^s} h_{\lambda,k}(\rho)\right| = O(\lambda^s), \quad \lambda \to \infty \tag{26}$$

(см. [28, лемма 2]). Отметим также равенство

$$(\mathcal{L} + (\lambda^2 + (n-1)^2)Id)(h_{\lambda,k}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)) = 0,$$

где Id — тождественный оператор, $\mathcal{L}$ — оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{L} = (1-|x|^2)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left((1-|x|^2)^{2-n}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

(см. [28, § 2, формула (9)]).

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $V_r(B_R)$ множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, для которых

$$\int_{gB_r} f(x)dx_h = 0$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B^n)$, таких, что $g(\mathrm{cl}B_r) \subset B_R$. Следующий результат получен В. В. Волчковым (см. [28, лемма 14 и теорема 3]).

Теорема 2. 1) *Пусть $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда* (8) *имеет вид*

$$f_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda\in N(r)} c_{k,l,\lambda}\, h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 < \rho < \operatorname{th} R, \tag{27}$$

где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\lambda\in N(r)} |c_{k,l,\lambda}| < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

2) *Пусть $s \geq n+3$ и $f \in V_r(B_R) \cap C^s(B_R)$. Тогда при $|k-1| \leq s-n-3$ и всех $1 \leq l \leq d_k$ имеет место равенство* (27)*, где $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{n-s})$ при $\lambda \to \infty$.*

Лемма 6. *Имеет место интегральное представление*

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k}\int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n h_{\lambda,k}(t\rho)\, t^{n-1}dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \tag{28}$$

Доказательство. Из (25) и (7) следует, что

$$\frac{(n/2)_k}{(\nu)_k}\int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n h_{\lambda,k}(t\rho)\, t^{n-1}dt =$$

$$= \rho^k(1-\rho^2)^n \int_0^1 t^{k+n-1}(1-t^2\rho^2)^{\nu-n} F\left(\nu+k, \nu+1-\frac{n}{2}; \frac{n}{2}+k; t^2\rho^2\right)dt =$$

$$= \rho^k(1-\rho^2)^n \int\limits_0^1 t^{k+n-1}(1-t^2\rho^2)^{\nu-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j\left(\nu+1-\dfrac{n}{2}\right)_j}{\left(\dfrac{n}{2}+k\right)_j j!} t^{2j}\rho^{2j}dt.$$

В силу признака Вейерштрасса указанный ряд сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$. Поэтому после его почленного интегрирования и замены переменной $t=\sqrt{u}$ в интеграле приходим к равенству

$$\frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \int\limits_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n h_{\lambda,k}(t\rho)\, t^{n-1}dt =$$

$$= \rho^k(1-\rho^2)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j\left(\nu+1-\dfrac{n}{2}\right)_j}{2j!\left(\dfrac{n}{2}+k\right)_j} \rho^{2j} \int\limits_0^1 u^{j+\frac{k+n}{2}-1}(1-u\rho^2)^{\nu-n}du.$$

Используя теперь (23), (11) и (10), получаем (28). □

Следствие 1. *Если $\lambda\in(0,+\infty)$, то при любых $\rho_0\in(0,1)$, $s\in\mathbb{Z}_+$ справедлива оценка*

$$\max_{\rho\in[0,\rho_0]} \left|\frac{d^s}{d\rho^s}\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho)\right| = O(\lambda^{s-k}), \quad \lambda\to\infty. \tag{29}$$

Доказательство. Дифференцируя (28) с применением формулы Лейбница, имеем

$$\frac{d^s}{d\rho^s}\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \sum_{m=0}^{s} \frac{s!}{m!(s-m)!} \int\limits_0^1 t^{m+n-1} h_{\lambda,k}^{(m)}(t\rho) \frac{d^{s-m}}{d\rho^{s-m}}\left(\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n\right)dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta}\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad |\arg z|<\pi \tag{30}$$

(см. [27, гл. 1, § 1.18, формула (4)]), отсюда и из (26) получаем требуемое. □

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\rho^k(1-\rho^2)^n\left[\rho H'_{\lambda,k}(\rho)+(n+k)H_{\lambda,k}(\rho)\right] = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} h_{\lambda,k}(\rho).$$

Доказательство. В силу асимптотики (30)

$$\left|\frac{(\nu+k)_j\left(\nu+1-\dfrac{n}{2}\right)_j}{j!\left(\dfrac{n}{2}+k\right)_j(2j+k+n)}\right| \sim \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+k\right)}{2\left|\Gamma(\nu+k)\,\Gamma\left(\nu+1-\dfrac{n}{2}\right)\right|} j^{-\operatorname{Im}\lambda-2}, \quad j\to+\infty.$$

Отсюда и из леммы 5 видно, что ряд (11) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно на отрезке $[0,\rho_0]$ при любом $\rho_0<1$. Поэтому, используя (24) и теорему о дифференцировании функционального ряда, находим

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho)+(n+k)H_{\lambda,k}(\rho) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j!\left(\frac{n}{2}+k\right)_j} \left(F\left(n-\nu, j+\frac{k+n}{2}; j+1+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-\nu)\rho^2}{j+1+\frac{k+n}{2}} F\left(n-\nu+1, j+1+\frac{k+n}{2}; j+2+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right)\right).$$

Выражение с гипергеометрическими функциями в скобках преобразуется с помощью формулы

$$F(a,b;c;z) + \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) = F(a, b+1; c; z)$$

(см. [31, гл. 7, § 5, п. 2, формула (16)]). При этом получаем

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k)H_{\lambda,k}(\rho) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j!\left(\frac{n}{2}+k\right)_j} F\left(n-\nu, j+1+\frac{k+n}{2}; j+1+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right).$$

Поскольку $F(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}$ (см. [27, гл. 2, § 2.8, п. 2, формула (1)]), последнее соотношение можно записать в виде

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k)H_{\lambda,k}(\rho) = (1-\rho)^{\nu-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j!\left(\frac{n}{2}+k\right)_j}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из (7) и (25). □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда по лемме 1 гиперболическая дивергенция поля $\overrightarrow{A}$ принадлежит классу $V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Поэтому её коэффициенты Фурье имеют вид

$$(\mathrm{div}_h \overrightarrow{A})_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \le \rho < \operatorname{th} R, \tag{31}$$

где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \to \infty$ для любого $s > 0$ (см. второе утверждение в теореме 2). Положим $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$, где векторное поле $\overrightarrow{B}$ определяется равенством (18). В силу соотношений (31), (26), (28) и леммы 4 поле $\overrightarrow{C}$ является соленоидальным и

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1-t^2\rho^2)^n} \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} h_{\lambda,k}(t\rho) dt = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k} \rho^k H_{\lambda,k}(\rho).$$

При этом коэффициенты $\gamma_{k,l,\lambda} = \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k} c_{k,l,\lambda}$ ведут себя как $O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \to \infty$ для любого $s > 0$ (см. (30)). Тем самым необходимость в теореме 1 доказана.

Наоборот, пусть $\overrightarrow{A} \in C^\infty(B_R)$ и имеют место разложения (12), (13). Тогда (см. соотношения (17), (14), (29) и лемму 7)

$$(\mathrm{div}_h \overrightarrow{B})_{k,l}(\rho) = (1-\rho^2)^n \left(\rho \mathcal{B}'_{k,l}(\rho) + n\mathcal{B}_{k,l}(\rho)\right) =$$

$$= (1-\rho^2)^n \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,l,\lambda} \rho^k (\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k) H_{\lambda,k}(\rho)) = \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,l,\lambda} \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} h_{\lambda,k}(\rho).$$

Это разложение и теорема 2 показывают, что $\mathrm{div}_h \overrightarrow{B} \in V_r(B_R)$. Учитывая, что $\mathrm{div}_h \overrightarrow{C} = 0$, отсюда и из леммы 1 заключаем, что $\overrightarrow{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Список литературы

1. **Ungar P.** Freak theorem about functions on a sphere // Journal of the London Mathematical Society. 1954. Vol. 29, iss. 2. P. 100–103.
2. **Йон Ф.** Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М. : Иностр. лит., 1958.
3. **Delsarte J.** Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris Sér. A–B. 1958. Vol. 246. P. 1358–1360.
4. **Schneider R.** Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1969. Vol. 26. P. 381–384.
5. **Smith J.** Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1972. Vol. 72. P. 403–416.
6. **Беренстейн К. А., Струппа Д. К.** Комплексный анализ и уравнения в свёртках // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. 1989. Т. 54. С. 5–111.
7. **Berenstein K. A., Gay R., Yger A.** Inversion of the local Pompeiu transform // Journal d'Analyse Mathématique. 1990. Vol. 54. P. 259–287.
8. **Zalcman L.** A bibliographic survey of the Pompeiu problem. In book : Approximation by Solutions of Partial DifferentialEquations. Dordrecht : Kluwer, 1992. P. 185–194.
9. **Netuka I.** Mean value property and harmonic functions. In book : Classical and Modern Potential Theory and Applications. Dordrecht : Kluwer, 1994. P. 359–398.
10. **Thangavelu S.** Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // Journal d'Analyse Mathématique. 1994. Vol. 63. P. 255–286.
11. **Волчков В. В.** Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. 1995. Т. 186, вып. 6. С. 15–34.
12. **Волчков В. В.** Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. 1997. Т. 188, вып. 9. С. 13–30.
13. **Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.** Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules // Journal of Complex Variables. 2000. Vol. 43. P. 29–57.
14. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. Акад. наук. 2001. Т. 379, № 5. С. 587–590.
15. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"// Contempemporery Mathematics. Radon Transform and Tomography. 2001. Vol. 278. P. 69–74.
16. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, вып. 5. С. 169–197.

17. **Volchkov V. V.** Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.
18. **Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.** Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London : Springer-Verlag, 2009.
19. **Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.** Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel : Birkhäuser, 2013.
20. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 543–552.
21. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Интерполяционные задачи для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Докл. Акад. наук. 2020. Т. 490, № 1. С. 20–23.
22. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Непрерывное периодическое в среднем продолжение функций с отрезка // Докл. Акад. наук. 2021. Т. 496. С. 21–25.
23. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Непрерывное продолжение функций с отрезка до функций в $\mathbb{R}^n$ с нулевыми шаровыми средними // Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 3–14.
24. **Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А.** Стирание особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам // Владикавказ. мат. журн. 2021. Т. 23, № 2. С. 19–33.
25. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса // Владикавказ. мат. журн. 2018. Т. 20, № 4. С. 20–34.
26. **Альфорс Л.** Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М : Мир, 1986.
27. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М. : Наука, 1973, 1974.
28. **Волчков В. В.** Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 2. С. 3–26.
29. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974.
30. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.** Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, вып. 4 (286). С. 3–82.
31. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М. : Наука, 1991.

Поступила в редакцию 03.02.2022.
После переработки 11.04.2022.

Сведения об авторах

Волчкова Наталья Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей математики им. В. В. Пака, Донецкий национальный технический университет, Донецк; e-mail: volna936@gmail.com.

Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет, Донецк; e-mail: volna936@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2022. Vol. 7, iss. 2. P. 139–151.

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17201

CHARACTERIZATION OF GENERALIZED PERIODIC VECTOR FIELDS ON HYPERBOLIC SPACE

N.P. Volchkova[1], **Vit.V. Volchkov**[2]

[1]*Donetsk National Technical University, Donetsk*
[2]*Donetsk National University, Donetsk*
volna936@gmail.com

We study vector fields which have zero flux through every sphere of fixed radius in a ball on a real hyperbolic space. For fields in such classes a description in the form of a series in special functions is obtained.

Keywords: *vector field, hyperbolic space, zero spherical mean, spherical harmonic, Horn hypergeometric series.*

References

1. **Ungar P.** Freak theorem about functions on a sphere. *Journal of the London Mathematical Society*, 1954, vol. 29, no. 2, pp. 100–103.
2. **John F.** *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations.* New York, Dover Publ., 2013.
3. **Delsarte J.** Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris Sér. A–B*, 1958, vol. 246, pp. 1358–1360.
4. **Schneider R.** Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969, vol. 26, pp. 381–384.
5. **Smith J.D.** Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, pp. 403–416.
6. **Berenstein C.A., Struppa D.C.** Complex analysis and convolution equations. *Several complex variables.* Vol.*: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics.* Berlin. Springer-Verlag, 1993. Pp. 1–108.
7. **Berenstein C.A., Gay R., Yger A.** Inversion of the local Pompeiu transform. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1990, vol. 54, pp. 259–287.
8. **Zalcman L.** A bibliographic survey of the Pompeiu problem. *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Dordrecht, Kluwer, 1992. Pp. 185–194.
9. **Netuka I.** Mean value property and harmonic functions. *Classical and Modern Potential Theory and Applications.* Dordrecht, Kluwer, 1994. Pp. 359–398.
10. **Thangavelu S.** Spherical means and CR functions on the Heisenberg group. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1994, vol. 63, pp. 255–286.
11. **Volchkov V.V.** A definitive version of the local two-radii theorem. *Sbornik Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 783–802.
12. **Volchkov V.V.** Solution of the support problem for several function classes. *Sbornik Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294.
13. **Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.** Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules. *Journal of Complex Variables*, 2000, vol. 43, pp. 29–57.
14. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Inversion of the local Pompeiu transform on the quaternion hyperbolic space. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 90–93.
15. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem". *Contemporary Mathematics. Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74.

16. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Inversion theorems for the local Pompeiu transformation in the quaternion hyperbolic space. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 5, pp. 753–771.
17. **Volchkov V.V.** *Integral Geometry and Convolution Equations*. Dordrecht, Kluwer, 2003.
18. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*. London, Springer, 2009.
19. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*. Basel, Birkhäuser, 2013.
20. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** The removability problem for functions with zero spherical means. *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 419–426.
21. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Interpolation problems for functions with zero integrals over balls of fixed radius. *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 101, no. 1, pp. 16–19.
22. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Continuous mean periodic extension of functions from an interval. *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 14–18.
23. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Continuous extension of functions from a segment to functions in $\mathbb{R}^n$ with zero ball means. *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 1–11.
24. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Vector fields with zero flux through spheres of fixed radius. *Vladikavkazskiy Matematicheskiy Zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2018, vol. 20, no. 4, pp. 20–34. (In Russ.).
25. **Volchkova N.P., Volchkov Vit.V., Ischenko N.A.** Erasing od singularities of functions with zero integrals over disks, *Vladikavkazskiy Matematicheskiy Zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2021, vol. 23, no. 2, pp. 19–33. (In Russ.).
26. **Ahlfors L.** *Möbius Transformations in Several Dimensions*, Minneapolis, University of Minnesota, 1981.
27. **Bateman H., Erdélyi A.** *Higher Transcendental Functions*, Vols. I, II. New York, McGraw-Hill, 1953.
28. **Volchkov V.V.** A definitive version of the local two-radii theorem on hyperbolic spaces. *Izvestiya Mathematics*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 207–229.
29. **Stein E., Weiss G.** *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. New Jersey, Princeton University Press, 1971.
30. **Gel'fand I.M., Graev M.I., Retakh V.S.** General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type. *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 1–88.
31. **Vilenkin N.Ja.** *Special Functions and the Theory of Group Representations*. Rhode Island : AMS, 1968.

Article received 03.02.2022.
Corrections received 11.04.2022.