Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 1. С. 30–45.

УДК 517.965

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия
kyrovVA@yandex.ru

Осуществлён поиск решений функциональных уравнений

$$[X]\,\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + X_{n+1}(x^{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y^{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial y^{n+1}} = 0,$$

$$[X]\,\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\frac{\partial\sigma}{\partial w} = 0,\ [X]\,\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\frac{\partial\varkappa}{\partial z} = 0,$$

где $[X] = \sum_{k=1}^{n}\bigl(\varepsilon_k x^k X_k(y) + \varepsilon_k y^k X_k(x)\bigr)$, $x = (x^1,\ldots,x^n,x^{n+1})$, $\varepsilon_k = \pm1$, возникающих в задаче вложения пространства $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\theta = \varepsilon_1 x^1 y^1 + \cdots + \varepsilon_n x^n y^n$. В этой задаче ищутся все функции вида $f = f(\theta, x^{n+1}, y^{n+1})$, являющиеся двухточечными инвариантами $n(n+1)/2$-параметрической группы преобразований.

Ключевые слова: *функциональное уравнение, функционально-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение, скалярное произведение.*

Введение

Всем хорошо известно функциональное уравнение Коши

$$f(u+v) = f(u) + f(v),$$

где f — функция класса C^1, u и v — независимые переменные. Это уравнение решается дифференцированием и последующим разделением переменных: $f'(u+v) = f'(u)$, $f'(u+v) = f'(v)$. Далее приравниваем правые части: $f'(u) = f'(v) = a = \mathrm{const}$. Затем интегрируем и результат подставляем в исходное уравнение, получаем $f(u) = au$. Этим же методом решаются функциональные уравнения, появляющиеся в геометрических задачах [1–6]. К числу таких задач относится задача нахождения уравнений группы движений по метрической функции. В частности, для плоскости Гельмгольца [7] по метрической функции

$$f = [(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2]\exp\left(2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2}\right)$$

составляется функциональное уравнение на группу движений [2]

$$[(\lambda^1 - \lambda^2)^2 + (\sigma^1 - \sigma^2)^2]\exp\left(2\gamma\mathrm{arctg}\frac{\sigma^1 - \sigma^2}{\lambda^1 - \lambda^2}\right) =$$

$$= [(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2]\exp\left(2\gamma\mathrm{arctg}\frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2}\right),$$

где $\gamma \neq \mathrm{const}$, $\lambda^1 = \lambda(x^1, x^2)$, $\sigma^1 = \sigma(x^1, x^2)$. В этом уравнении две неизвестные функции λ и σ класса не ниже C^1. Решая, получаем уравнения на группу движений

$$x' = \lambda(x, y) = ax - by + c, \quad y' = \sigma(x, y) = bx + ay + d,$$

причём $[a^2 + b^2] \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \dfrac{b}{a}\right) = 1$, $a, b, c, d = \mathrm{const}$.

Другой задачей является задача о нахождении по метрической функции базисных операторов алгебры Ли группы движений. Для плоскости Гельмгольца она сводится к решению следующего функционального уравнения [6]:

$$(X_1(x) - X_1(y))((x^1 - x^2) - \gamma(y^1 - y^2)) + (X_2(x) - X_2(y))((y^1 - y^2) + \gamma(x^1 - x^2)) = 0,$$

которое также имеет две неизвестные X_1 и X_2 класса не ниже C^2. Решая, получаем базисные операторы

$$X^1 = \partial_{x^1},\ X^2 = \partial_{x^2},\ X_3 = -(x^2 + \gamma x^1)\partial_{x^1} + (x^1 - \gamma x^2)\partial_{x^2}.$$

Задачей другого рода является задача вложения [3–5]. Для плоскости Гельмгольца она состоит в поиске функций вида

$$f = f\left([(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2] \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2}\right), x^3, y^3\right),$$

являющихся инвариантами шестипараметрической группы преобразований [5]. Задача приводит к решению функционального уравнения

$$((x^1 - x^2) - \gamma(y^1 - y^2))(X_1(x) - X_1(y)) + ((y^1 - y^2) + \gamma(x^1 - x^2))(X_2(x) - X_2(y)) +$$
$$+ \frac{\left(X_3(x) \frac{\partial f}{\partial x^3} + X_3(y) \frac{\partial f}{\partial y^3}\right) \exp\left(-2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2}\right)}{2 \frac{\partial \chi}{\partial \theta}} = 0,$$

которое содержит четыре неизвестные функции X_1, X_2, X_3, f класса не ниже C^2. Решением этого функционального уравнения является метрическая функция трёхмерного гельмгольцева пространства

$$f = [(x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2] \exp\left(2\gamma \mathrm{arctg} \frac{y^1 - y^2}{x^1 - x^2} + x^3 + y^3\right).$$

В данной работе решаются функциональные уравнения, возникающие в задаче вложения пространства $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, со скалярным произведением

$$\theta(x, y) = \langle x, y \rangle = \varepsilon_1 x^1 y^1 + \cdots + \varepsilon_n x^n y^n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x^k y^k.$$

Относительно скалярного произведения заметим, что оно является невырожденным, т. е. $\partial\theta/\partial x^i \neq 0$, $\partial\theta/\partial y^i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Суть этой задачи состоит в поиске всех функций вида $f = f(\theta, x^{n+1}, y^{n+1})$, являющихся инвариантами $n(n+1)/2$-параметрической группы преобразований. Отметим, что эта группа преобразований также неизвестна, но её подгруппой является группа вращений, сохраняющая скалярное произведение θ.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим дифференцируемую класса C^5 функцию $f : S_f \to \mathbb{R}$, где $S_f \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ — открытая область определения. Пусть $U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — некоторая координатная окрестность, точки $x, y \in U_0$, причём $\langle x, y\rangle \in S_f$. Рассмотрим окрестности точек x и y: $U(x) \subset U_0$ и $U(y) \subset U_0$, причём $\langle x', y'\rangle \in S_f$ для любых $x' \in U(x)$, $y' \in U(y)$. Обозначим через $U(\langle x, y\rangle) \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ — окрестность пары $\langle x, y\rangle$: $U(\langle x, y\rangle) \subset U(x) \times U(y)$. Везде ниже $n > 1$, n — натуральное число. Пусть функция f в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ имеет один из следующих видов:

$$f(x, y) = \chi\big(\theta(x, y), x^{n+1}, y^{n+1}\big), \tag{1.1}$$

$$f(x, y) = \sigma\left(\theta(x, y), w\right), \tag{1.2}$$

$$f(x, y) = \varkappa\left(\theta(x, y), z\right), \tag{1.3}$$

где $\theta(x, y) = \varepsilon_1 x^1 y^1 + \cdots + \varepsilon_n x^n y^n$, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, χ, σ, $\varkappa$ — дифференцируемые класса C^5 функции.

Потребуем для этих функций в $U(\langle x, y\rangle)$ выполнения неравенств [1]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x^{n+1}} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y^{n+1}} \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial w} \neq 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \varkappa}{\partial z} \neq 0. \tag{1.6}$$

Дополнительно будем предполагать, чтобы функция f была двухточечным инвариантом действия некоторой группы Ли в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ [8]. Множество таких действий задаёт группу Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, которую будем называть группой инвариантности функции f.

Произвольный оператор алгебры Ли группы инвариантности функции f в окрестности $U(x)$ имеет вид [1]

$$X = X_1 \partial_{x^1} + \cdots + X_n \partial_{x^n} + X_{n+1} \partial_{x^{n+1}}, \tag{1.7}$$

где $X_s = X_s(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$ — дифференцируемые класса C^4 функции в окрестности $U(x) \subset U_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $s = 1, \ldots, n+1$. Через оператор записывается критерий локальной инвариантности [8]:

$$X(x) f(x, y) + X(y) f(x, y) = 0. \tag{1.8}$$

Равенство (1.8) расписываем для функций (1.1), (1.2), (1.3):

$$[X] \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + X_{n+1}(x) \frac{\partial \chi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y) \frac{\partial \chi}{\partial y^{n+1}} = 0, \tag{1.9}$$

$$[X] \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y)) \frac{\partial \sigma}{\partial w} = 0, \tag{1.10}$$

$$[X] \frac{\partial \varkappa}{\partial \theta} + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)) \frac{\partial \varkappa}{\partial z} = 0, \tag{1.11}$$

где использовано обозначение

$$[X] = \sum_{k=1}^{n} \big(\varepsilon_k x^k X_k(y) + \varepsilon_k y^k X_k(x)\big).$$

Уравнения (1.9), (1.10) и (1.11) являются функционально-дифференциальными относительно неизвестных компонент оператора X, а также функций χ, σ и $\varkappa$ и выполняются тождественно по координатам точек x и y в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$. Подобные уравнения решались в работах [3–5].

Сначала решаем уравнение (1.9) и получающееся из него уравнение

$$[X] = \psi(\theta, x^{n+1}, y^{n+1}), \tag{1.12}$$

где $\psi(\theta, x^{n+1}, y^{n+1}) = -\dfrac{X_{n+1}(x^{n+1})\partial\chi/\partial x^{n+1} + X_{n+1}(y^{n+1})\partial\chi/\partial y^{n+1}}{\partial\chi/\partial\theta}$ — функция класса C^4 в $U(\langle x, y\rangle)$. При этом будем полагать $X_{n+1} = X_{n+1}(x^{n+1})$.

Теорема 1. *Решениями функциональных уравнений* (1.12) *и* (1.9) *в окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *при условии* $X_{n+1} = X_{n+1}(x^{n+1}) \neq 0$ *являются функции*

$$X_p = t(x^{n+1})x^p + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q, \tag{1.13}$$

$$\left\{\begin{aligned} \psi(\theta, x^{n+1}, y^{n+1}) &= (t(x^{n+1}) + t(y^{n+1}))\theta, \\ \chi(\theta, x^{n+1}, y^{n+1}) &= \overline{\chi}(\theta e^{P(x^{n+1})+P(y^{n+1})}, Q(x^{n+1}) - Q(y^{n+1})), \end{aligned}\right. \tag{1.14}$$

где $c_{pq} = -c_{qp} = \mathrm{const}$, $p, q = 1, 2, \ldots, n$, $t(x^{n+1})$, $P(x^{n+1})$, $Q(x^{n+1})$, $\overline{\chi}$ — *функции класса* C^4, $t(x^{n+1}) + X_{n+1}(x^{n+1})P'(x^{n+1}) = 0$, $X_{n+1}(x^{n+1})Q'(x^{n+1}) = \mathrm{const}$.

Потом решаем уравнение (1.10) и следующее из него уравнение

$$[X] = (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta, w), \tag{1.15}$$

где $\varphi(\theta, w) = -\frac{\partial\sigma}{\partial w}/\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}$ — функция класса C^4 в $U(\langle x, y\rangle)$, причём $\varphi \neq 0$, поскольку иначе $\frac{\partial\sigma}{\partial w} = 0$, что противоречит неравенству из (1.5).

Теорема 2. *Решениями функциональных уравнений* (1.15) *и* (1.10) *в окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *являются функции:*

$$X_p = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q,\ X_{n+1} = c,\ \varphi = \overline{\varphi}(\theta, w),\ \sigma = \widehat{\sigma}(\theta, w); \tag{1.16}$$

$$X_p = ax^p + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q,\ X_{n+1} = rx^{n+1} + c,\ \varphi = \frac{2a\theta}{rw},\ \sigma = \overline{\sigma}(\theta^r w^{-2a}); \tag{1.17}$$

$$X_p = ax^{n+1}x^p + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q,\ X_{n+1} = r(x^{n+1})^2 + c,\ \varphi = \frac{a\theta}{rw},\ \sigma = \overline{\sigma}(\theta^r w^{-a}); \tag{1.18}$$

$$\left\{\begin{aligned} &X_p = a\sin(\omega x^{n+1} + \alpha)x^p + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q,\ X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha) + c, \\ &\varphi = \frac{a\theta}{r}\mathrm{ctg}\frac{\omega w}{2},\ \sigma = \overline{\sigma}\left(\theta^{r\omega}\left(\sin\frac{\omega w}{2}\right)^{-2a}\right); \end{aligned}\right. \tag{1.19}$$

$$\left\{\begin{aligned} &X_p = ae^{\omega x^{n+1}}x^p + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q,\ X_{n+1} = re^{\omega x^{n+1}} + c, \\ &\varphi = \frac{a\theta}{r}\frac{1 + e^{-\omega w}}{1 - e^{-\omega w}},\ \sigma = \overline{\sigma}\left(\theta^{r\omega}\left(\mathrm{sh}\,\frac{\omega w}{2}\right)^{-2a}\right); \end{aligned}\right. \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} X_p = a\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1}+\alpha)x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1}+\alpha)+c, \\ \varphi = \dfrac{a\theta}{r}\mathrm{cth}\dfrac{\omega w}{2},\ \sigma = \overline{\sigma}\left(\theta^{r\omega}\left(\mathrm{sh}\,\dfrac{\omega w}{2}\right)^{-2a}\right); \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\begin{cases} X_p = a\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1})+\alpha)x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1}+\alpha)+c, \\ \varphi = \dfrac{a\theta}{r}\mathrm{cth}\dfrac{\omega w}{2},\ \sigma = \overline{\sigma}\left(\theta^{r\omega}\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\omega w}{2}\right)^{-2a}\right), \end{cases} \tag{1.22}$$

где $c_{pq} = -c_{qp} = \mathrm{const}$, $p,q = 1,2,\ldots,n$, $a,c,r,\alpha,\omega = \mathrm{const}$, $a \neq 0$, $r \neq 0$, $\overline{\sigma}$, $\widehat{\sigma}$ — *функции класса* C^4, $X_{n+1} \neq 0$.

Наконец, решаем уравнение (1.11) и уравнение

$$[X] = (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda(\theta, z), \tag{1.23}$$

где $\lambda(\theta,z) = -\frac{\partial\varkappa}{\partial z}/\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta}$ — функция класса C^4 в $U(\langle x,y\rangle)$, причём $\lambda \neq 0$, иначе $\frac{\partial\varkappa}{\partial z} = 0$, что противоречит неравенству из (1.6).

Теорема 3. *Решениями функциональных уравнений* (1.23) *и* (1.11) *в окрестности* $U(\langle x,y\rangle)$ *являются функции*

$$X_p = 2cax^{n+1}x^p + \sum_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = c,\ \lambda = az\theta,\ \varkappa = \overline{\varkappa}(\theta e^{\frac{-az^2}{2}}); \tag{1.24}$$

$$X_p = ax^p X_{n+1} + \sum_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ \lambda = a\theta,\ \varkappa = \overline{\varkappa}(\theta e^{-az}); \tag{1.25}$$

$$\begin{cases} X_p = (ax^{n+1}+b)x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = c, \\ \lambda = \dfrac{az+2b}{2c}\theta,\ \varkappa = \overline{\varkappa}(\theta^{4c}e^{-az^2-4bz}); \end{cases} \tag{1.26.1}$$

$$\begin{cases} X_p = (ax^{n+1}+b)x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = mx^{n+1}+c, \\ \lambda = \dfrac{az+2b}{mz+2c}\theta,\ \varkappa = \overline{\varkappa}(\theta^{m^2}(mz+2c)^{-2bm+2ac}e^{-amz}); \end{cases} \tag{1.26.2}$$

$$\begin{cases} X_p = r[a\sin(\omega x^{n+1}+\alpha) + b\cos(\omega x^{n+1}+\alpha)]x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q, \\ X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1}+\alpha),\ \lambda = \left(a\,tg\dfrac{\omega z+2\alpha}{2}+b\right)\theta, \\ \varkappa = \overline{\varkappa}\left(\theta^{\omega}\left(\cos\dfrac{\omega z+2\alpha}{2}\right)^{2a}e^{-b\omega z}\right); \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} X_p = r[ae^{-\omega x^{n+1}} + be^{\omega x^{n+1}}]x^p + \sum\limits_{q=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q,\ X_{n+1} = re^{\omega x^{n+1}}, \\ \lambda = (ae^{-\omega z}+b)\theta,\ \varkappa = \overline{\varkappa}\left(\omega\ln\theta + ae^{-\omega z} - b\omega z\right); \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} X_p = r[a\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1}+\alpha) + b\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1}+\alpha)]x^p + \sum\limits_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q, \\ X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1}+\alpha),\ \lambda = \left(a\,\mathrm{th}\dfrac{\omega z+2\alpha}{2} + b\right)\theta, \\ \varkappa = \overline{\varkappa}\left(\theta^{\omega}\left(\mathrm{ch}\,\dfrac{\omega z+2\alpha}{2}\right)^{-2a} e^{-b\omega z}\right); \end{cases} \tag{1.29}$$

$$\begin{cases} X_p = r[a\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1}+\alpha) + b\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1}+\alpha)]x^p + \sum\limits_{q=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q, \\ X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1}+\alpha),\ \lambda = \left(a\,\mathrm{cth}\dfrac{\omega z+2\alpha}{2} + b\right)\theta, \\ \varkappa = \overline{\varkappa}\left(\theta^{\omega}\left(\mathrm{sh}\,\dfrac{\omega z+2\alpha}{2}\right)^{-2a} e^{-b\omega z}\right), \end{cases} \tag{1.30}$$

где $c_{pq} = -c_{qp} = \mathrm{const}$, $p, q = 1, 2, \ldots, n$, $a, b, m, r, c, \alpha, \omega = \mathrm{const}$, $a \neq 0$, $m \neq 0$, $r \neq 0$, $X_{n+1} \neq 0$, $\overline{\varkappa}$ *— функция класса* C^4*.*

2. Доказательство теоремы 1

Продифференцируем уравнение (1.12) по переменным x^p и y^q:

$$\varepsilon_p(X_p(y))'_{y^q} + \varepsilon_q(X_q(x))'_{x^p} = \delta_{pq}\varepsilon_p\psi'_\theta + \varepsilon_p\varepsilon_q y^p x^q \psi''_{\theta\theta}, \tag{2.1}$$

где $\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{при } p = q \\ 0, & \text{при } p \neq q \end{cases}$ — символ Кронекера, $p, q = 1, 2, \ldots, n$. Дифференцируя равенства (2.1) при $p \neq q$ по x^p и y^q, получаем $\psi''''_{\theta\theta\theta\theta} = 0$, следовательно,

$$\psi''_{\theta\theta} = a_1(x^{n+1}, y^{n+1})\theta + b_1(x^{n+1}, y^{n+1}).$$

Подставляя найденное в (2.1) и дифференцируя результат при $p \neq q$ по x^s, а затем по y^p, причём $s \neq q$, $s \neq p$, получаем $a_1(x^{n+1}, y^{n+1}) = 0$. Возвращаясь снова в равенства (2.1) и дифференцируя их при $p \neq q$ по x^q, а затем по y^p, получаем $b_1(x^{n+1}, y^{n+1}) = 0$. Значит,

$$\psi = a(x^{n+1}, y^{n+1})\theta + b(x^{n+1}, y^{n+1}). \tag{2.2}$$

Подставляя равенство (2.2) также в (2.1), получаем

$$\varepsilon_p(X_p(y))'_{y^q} + \varepsilon_q(X_q(x))'_{x^p} = \delta_{pq}\varepsilon_p a(x^{n+1}, y^{n+1}). \tag{2.3}$$

Дифференцируя уравнения (2.3) по x^{n+1} и y^{n+1} при $p = q$, имеем $a''_{x^{n+1}y^{n+1}} = 0$. Интегрируя найденное и подставляя результат в (2.2), получаем

$$\psi(\theta, x^{n+1}, y^{n+1}) = (t_1(x^{n+1}) + t_2(y^{n+1}))\theta + b(x^{n+1}, y^{n+1}), \tag{2.4}$$

где t_1, t_2 — функции одной переменной класса C^4. Подставляя (2.4) в (2.3), будем иметь

$$\varepsilon_p(X_p(y))'_{y^q} + \varepsilon_q(X_q(x))'_{x^p} = \delta_{pq}\varepsilon_p(t_1(x^{n+1}) + t_2(y^{n+1})).$$

Разделяя в последней системе по координатам точек x и y, получаем

$$(X_p(x))'_{x^p} = t_1(x^{n+1}) + \overline{c},\ (X_p(y))'_{y^p} = t_2(y^{n+1}) - \overline{c},\ (X_q(x))'_{x^p} = \varepsilon_q c_{qp},\ (X_p(y))'_{y^q} = \varepsilon_p c_{pq},$$

где $c_{pq}, \bar{c} = \mathrm{const}$, $p \neq q$. Во втором равенстве заменяем y на x и сравниваем с первым: $(X_p(x))'_{x^p} = t_2(x^{n+1}) - \bar{c}$, $(X_p(x))'_{x^p} = t_1(x^{n+1}) + \bar{c}$, следовательно, $t_2 = t_1 + 2\bar{c}$. Вводится обозначение $t(x^{n+1}) = t_1(x^{n+1}) + \bar{c}$. Тогда предыдущая система принимает вид

$$(X_p(x))'_{x^p} = t(x^{n+1}),\ (X_p(y))'_{y^p} = t(y^{n+1}),\ (X_q(x))'_{x^p} = \varepsilon_q c_{qp},\ (X_p(y))'_{y^q} = \varepsilon_p c_{pq}.$$

Интегрируя найденное, имеем функции (1.13). Далее (1.13) и (2.4) подставляем в (1.12), после приведения подобных получим $b(x^{n+1}, y^{n+1}) = 0$, следовательно, приходим к функции ψ из (1.14). Для нахождения функции χ выше найденное выражение подставляем в уравнение (1.9):

$$(t(x^{n+1}) + t(y^{n+1}))\frac{\partial \chi}{\partial \theta} + X_{n+1}(x^{n+1})\frac{\partial \chi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y^{n+1})\frac{\partial \chi}{\partial y^{n+1}} = 0.$$

Новое уравнение решается методом характеристик [9].

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$((X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} + (X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}})\varphi'_w + (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi''_{ww} = 0, \tag{3.1}$$

где $X_{n+1}(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$ — функция класса C^4, $\varphi = \varphi(\theta, w)$ — функция класса C^4, а $\theta(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ — некоторая функция класса C^4, $w = x^{n+1} - y^{n+1}$, $X_{n+1} \neq const$, $\varphi'_w \neq 0$, имеет решения:

при $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0$

$$X_{n+1} = C(x^1, \ldots, x^n), \quad \varphi = a(\theta)w + b(\theta); \tag{3.2}$$

при $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$

$$X_{n+1} = rx^{n+1} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{3.3}$$

$$X_{n+1} = r(x^{n+1})^2 + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{1}{w} + b(\theta); \tag{3.4}$$

$$X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha) + c, \quad \varphi = a(\theta)\mathrm{ctg}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{3.5}$$

$$X_{n+1} = re^{\omega x^{n+1}} + c, \quad \varphi = a(\theta)\frac{e^{\omega w}}{e^{\omega w} - 1} + b(\theta); \tag{3.6}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c, \quad \varphi = a(\theta)\mathrm{cth}\frac{\omega w}{2} + b(\theta); \tag{3.7}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha) + c, \quad \varphi = a(\theta)\mathrm{th}\frac{\omega w}{2} + b(\theta), \tag{3.8}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \ldots, x^n) \neq \mathrm{const}$ — функция класса C^4, $a(\theta), b(\theta)$ — функции класса C^4, $a(\theta) \neq 0$.

Замечание. Уравнение (3.1) получено из уравнения (1.15) дифференцированием по переменным x^{n+1} и y^{n+1}.

Доказательство. Из формулировки леммы очевидно следует, что $\varphi'_w \neq 0$ и $X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (3.1) приходим к новому —

$$\frac{(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} + (X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}}}{X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.9}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего первый результат складываем со вторым, получаем тождество

$$((X_{n+1}(x))''_{x^{n+1}} + (X_{n+1}(y))''_{y^{n+1}})(X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y)) -$$

$$-((X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{3.10}$$

Возможны два случая: $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$.

В первом случае из уравнения (3.1) получаем $\varphi''_{ww} = 0$, следовательно, справедливо простое решение (3.2).

Во втором случае тождество (3.10) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}}(X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, затем получаем дифференциальное уравнение

$$(X_{n+1}(x))'''_{x^{n+1}} + \mu(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0, \quad \alpha = \mathrm{const}. \tag{3.11}$$

Это уравнение имеет следующие решения:

при $\mu = 0$

$$X_{n+1} = A(x^1, \ldots, x^n)(x^{n+1})^2 + B(x^1, \ldots, x^n)x^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n);$$

при $\mu > 0$

$$X_{n+1} = A(x^1, \ldots, x^n)\cos\omega x^{n+1} + B(x^1, \ldots, x^n)\sin\omega x^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n),\ \omega = \sqrt{\mu};$$

при $\mu < 0$

$$X_{n+1} = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}} + B(x^1, \ldots, x^n)e^{-\omega x^{n+1}} + C(x^1, \ldots, x^n),\ \omega = \sqrt{-\mu}.$$

Затем найденное подставляем в (3.10) и получаем:

при $\mu = 0$

$$X_{n+1} = rx^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n); \tag{3.12}$$

$$X_{n+1} = r(x^{n+1})^2 + c; \tag{3.13}$$

при $\mu > 0$

$$X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{\mu}; \tag{3.14}$$

при $\mu < 0$

$$X_{n+1} = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}} + c,\ \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{3.15}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.16}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)) + c,\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.17}$$

причём $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее функцию (3.12) подставляем в уравнение (3.9):

$$\frac{2r}{rw + C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n)} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}. \tag{3.18}$$

Из уравнения (3.18) следует, что $\varphi''_{ww} \neq 0$ $(r \neq 0)$, тогда несложно доказать, что $C(x^1, \ldots, x^n) = c = \mathrm{const}$. Значит, уравнение (3.18) принимает более простой вид

$$\frac{2}{w} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последнее, получаем: $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{w} + b(\theta)$. Объединяя найденное с (3.12), имеем (3.3).

Потом функцию (3.13) подставляем в уравнение (3.9), в результате, как и выше, получаем $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{w} + b(\theta)$. Учитывая (3.13), получаем (3.4).

Теперь функцию (3.14) подставляем в уравнение (3.9) и используем тригонометрические свойства, затем доказываем, что $p(x^1, \dots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В результате получаем уравнение

$$\omega \mathrm{ctg}\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последнее, имеем $\varphi = a(\theta)\mathrm{ctg}\dfrac{\omega w}{2} + b(\theta)$. В итоге получаем (3.5).

Функцию (3.15) подставляем в (3.9), при этом доказывается, что $A(x^1, \dots, x^n) = r = \mathrm{const}$:

$$\omega\frac{1 + e^{-\omega w}}{1 - e^{-\omega w}} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем $\varphi = a(\theta)\dfrac{1}{1 - e^{-\omega w}} + b(\theta)$. Отсюда и из (3.15) получаем (3.6).

И, наконец, функции (3.16) и (3.17) подставляем в уравнение (3.9) и применяем свойства гиперболических функций, потом устанавливаем, что $p(x^1, \dots, x^n) = \alpha = \mathrm{const}$. В итоге приходим к уравнениям

$$\omega \mathrm{cth}\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}, \quad \omega \mathrm{th}\frac{\omega w}{2} = -\frac{\varphi''_{ww}}{\varphi'_w}.$$

Интегрируя последние уравнения, получаем $\varphi = a(\theta)(\mathrm{c})\mathrm{th}\dfrac{\omega w}{2} + b(\theta)$. Вместе с (3.16) и (3.17) это влечёт (3.6) и (3.7). □

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *В окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ функциональное уравнение*

$$((X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} + (X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}})\lambda'_z + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda''_{zz} = 0, \tag{3.19}$$

где $X_{n+1}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$ — функция класса C^4, $\lambda(\theta, z)$ — функция класса C^4, а $\theta(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ — некоторая функция класса C^4, $z = x^{n+1} + y^{n+1}$, $\lambda'_z \neq 0$, имеет решения:

при $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0$

$$X_{n+1} = C(x^1, \dots, x^n), \quad \lambda(\theta, z) = a(\theta)z + b(\theta); \tag{3.20}$$

при $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$

$$X_{n+1} = rx^{n+1} + c, \quad \lambda = a(\theta)\frac{1}{rz + 2c} + b(\theta); \tag{3.21}$$

$$X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1} + \alpha), \quad \lambda = a(\theta)\mathrm{tg}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{3.22}$$

$$X_{n+1} = re^{\omega x^{n+1}}, \quad \lambda = a(\theta)e^{-\omega z} + b(\theta); \tag{3.23}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + \alpha), \quad \lambda = a(\theta)\mathrm{th}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta); \tag{3.24}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + \alpha), \quad \lambda = a(\theta)\mathrm{cth}\frac{\omega z + 2\alpha}{2} + b(\theta), \tag{3.25}$$

где $r, c, \alpha = \mathrm{const}$, $C(x^1, \ldots, x^n) \neq \mathrm{const}$ *— функция класса* C^4, $a(\theta), b(\theta)$ *— функции класса* C^4, $a(\theta) \neq 0$.

Замечание. Уравнение (3.19) получено из уравнения (1.18) дифференцированием по переменным x^{n+1} и y^{n+1}.

Доказательство. Как и в лемме 1, устанавливаем, что $\lambda'_z \neq 0$ и $X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y) \neq 0$. Тогда от уравнения (3.19) приходим к новому:

$$\frac{(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} + (X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}}}{X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)} = -\frac{\lambda''_{zz}}{\lambda'_z}. \tag{3.26}$$

Дифференцируя это уравнение сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего из первого равенства вычитаем второе:

$$((X_{n+1}(x))''_{x^{n+1}} - (X_{n+1}(y))''_{y^{n+1}})(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)) -$$
$$-((X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}})^2 + ((X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}})^2 = 0. \tag{3.27}$$

Возможны два случая: $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0$ и $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} \neq 0$. В первом случае уравнение (3.19) имеет решение (3.20).

Во втором случае тождество (3.27) дифференцируем по переменным x^{n+1} и y^{n+1}, после чего делим на ненулевое произведение $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}}(X_{n+1}(y))'_{y^{n+1}} \neq 0$ и разделяем переменные, далее получаем дифференциальное уравнение (3.11), затем его решение, найденные в лемме 1, подставляем в (3.27), получаем:

при $\mu = 0$

$$X_{n+1} = rx^{n+1} + C(x^1, \ldots, x^n); \tag{3.28}$$

при $\mu > 0$

$$X_{n+1} = r\cos(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{\mu}; \tag{3.29}$$

при $\mu < 0$

$$X_{n+1} = A(x^1, \ldots, x^n)e^{\omega x^{n+1}},\ \omega = \pm\sqrt{-\mu}; \tag{3.30}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{ch}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.31}$$

$$X_{n+1} = r\,\mathrm{sh}(\omega x^{n+1} + p(x^1, \ldots, x^n)),\ \omega = \sqrt{-\mu}; \tag{3.32}$$

причём $r, c = \mathrm{const}$, $r \neq 0$.

Далее поступаем, как и при доказательстве леммы 1, т. е. функции (3.28)–(3.32) подставляем в уравнение (3.26) и решаем его, в итоге получаем (3.21)–(3.25). □

Докажем ещё одну лемму. Для этого будем полагать в уравнении (1.18) $\lambda'_z = 0$, из чего следует, что $(X_k(x))'_{x^{n+1}} = 0$, $(X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} = 0$.

Лемма 3. *В окрестности* $U(\langle x, y\rangle)$ *функциональное уравнение*

$$[X] = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(y^k X_k(x) + x^k X_k(y)) = (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\lambda(\theta), \tag{3.33}$$

где $(X_k)'_{x^{n+1}} = 0$, $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$, $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $\lambda \neq 0$, *имеет решения*

$$X_p = ax^p X_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_p c_{pq} x^q, \quad \lambda(\theta) = a\theta,$$

где $a = \text{const} \neq 0$, $c_{pq} = -c_{qp} = \text{const}$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (3.33) четыре раза по переменным в следующей последовательности: либо x^p, x^p, y^q, y^q; либо x^q, x^q, y^p, y^p; либо x^p, x^q, y^p, y^q, причём $p \neq q$, в результате получим систему линейных уравнений относительно λ'', λ''', λ'''':

$$a_1\lambda'' + a_2\lambda''' + a_3\lambda'''' = 0,\ b_1\lambda'' + b_2\lambda''' + b_3\lambda'''' = 0,\ c_1\lambda'' + c_2\lambda''' + c_3\lambda'''' = 0, \quad (3.34)$$

причём для коэффициентов имеем выражения:

$$\begin{aligned}
&a_1 = (x^q)^2(X_{n+1}(x))''_{x^p x^p} + (y^p)^2(X_{n+1}(y))''_{y^q y^q},\\
&a_2 = 2\varepsilon_p(x^q)^2 y^p(X_{n+1}(x))'_{x^p} + 2\varepsilon_q x^q(y^p)^2(X_{n+1}(y))'_{y^q},\\
&a_3 = (x^q)^2(y^p)^2(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)),\\
&b_1 = (x^p)^2(X_{n+1}(x))''_{x^q x^q} + (y^q)^2(X_{n+1}(y))''_{y^p y^p},\\
&b_2 = 2\varepsilon_q(x^p)^2 y^q(X_{n+1}(x))'_{x^q} + 2\varepsilon_p x^p(y^q)^2(X_{n+1}(y))'_{y^p},\\
&b_3 = (x^p)^2(y^q)^2(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)),\\
&c_1 = \varepsilon_p\varepsilon_q(x^p x^q(X_{n+1}(x))''_{x^p x^q} + y^p y^q(X_{n+1}(x))''_{y^p y^q} + x^p(X_{n+1}(x))'_{x^p} +\\
&\qquad + x^q(X_{n+1}(x))'_{x^q} + y^p(X_{n+1}(x))'_{y^p} + y^q(X_{n+1}(x))'_{y^q} + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))),\\
&c_2 = \varepsilon_p x^p x^q y^q(X_{n+1}(x))'_{x^p} + \varepsilon_p x^q y^q y^p(X_{n+1}(x))'_{y^p} + \varepsilon_p x^q y^q(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)) +\\
&\qquad + \varepsilon_q x^p x^q y^p(X_{n+1}(x))'_{x^q} + \varepsilon_q x^p y^q y^p(X_{n+1}(x))'_{y^q} + \varepsilon_q x^p y^p(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)),\\
&c_3 = x^p x^q y^p y^q(X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y)).
\end{aligned}$$

Можно установить невырожденность матрицы, составленной из этих коэффициентов. Поэтому система (3.34) имеет только нулевое решение, следовательно, $\lambda'' = 0$. Таким образом,

$$\lambda(\theta) = a\theta + b, \quad (3.35)$$

где $a, b = \text{const}$, $a \neq 0$.

Далее уравнение (3.33) с учётом (3.35) продифференцируем по x^p и y^q:

$$\varepsilon_p(X_p(y))'_{y^q} + \varepsilon_q(X_q(x))'_{x^p} = \varepsilon_p y^p(X_{n+1}(y))'_{y^q}a + \varepsilon_q x^q(X_{n+1}(x))'_{x^p}a, \quad p \neq q,$$

$$(X_p(y))'_{y^p} + (X_p(x))'_{x^p} = y^p(X_{n+1}(y))'_{y^p}a + x^p(X_{n+1}(x))'_{x^p}a + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))a.$$

Потом в найденной системе разделяем переменные:

$$X_p = ax^pX_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_p c_{pq}x^q, \quad c_{pq} = -c_{qp} = \text{const}.$$

И наконец, полученное подставим в (3.33) и получим $b = 0$.

В конце отметим, что если $\lambda = \text{const} \neq 0$, то, рассуждая, как и выше, получим $\lambda = 0$, что противоречит условию леммы. □

4. Доказательство теоремы 2

При решении уравнения (1.15) будем рассматривать случаи $X_{n+1} = \text{const}$, $X_{n+1} \neq \text{const}$, $\varphi'_w = 0$ и $X_{n+1} \neq \text{const}$, $\varphi'_w \neq 0$.

1. Рассмотрим первый случай: $X_{n+1} = \text{const}$. Тогда уравнение (1.15) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k x^k X_k(y) + \varepsilon_k y^k X_k(x)\big) = 0$$

и является частным случаем уравнения (1.12). Тогда из теоремы 1 получаем (1.16).

2. Пусть теперь выполняется второй случай: $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w = 0$. Уравнение (1.15) в таком случае принимает вид

$$[X] = (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta).$$

В этом уравнении можно переставить точки x и y, при этом выражения $[X]$ и $\varphi(\theta)$ не изменятся. В результате получим равенство

$$[X] = -(X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\varphi(\theta).$$

Далее из первого равенства вычтем второе, получим $\varphi(\theta) = 0$, что противоречит неравенству из (1.5).

3. Пусть, наконец, выполняется третий случай: $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$. Согласно лемме 1 здесь можно выделить два подслучая: $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$ и $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} \neq 0$.

3.1. Пусть $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$ и $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$. Тогда имеем равенства (3.2) из леммы 1. Поэтому уравнение (1.15) принимает вид

$$[X] = (C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n))(a(\theta)w + b(\theta)).$$

Далее, как и в пункте 2, переставляем точки x и y:

$$[X] = -(C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n))(-a(\theta)w + b(\theta)).$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $b(\theta) = 0$. В итоге уравнение (1.15) принимает вид

$$[X] = (C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n))a(\theta)w. \tag{4.1}$$

Отметим, что уравнение (4.1) выполняется тождественно в окрестности $U(\langle x, y\rangle)$ по координатам точек x и y. Дифференцируем уравнение (4.1) по переменным x^{n+1} и y^{n+1}:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y^k (X_k(x))'_{x^{n+1}} = (C(x) - C(y))a(\theta), \quad \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x^k (X_k(y))'_{y^{n+1}} = -(C(x) - C(y))a(\theta).$$

Складываем полученные равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (y^k (X_k(x))'_{x^{n+1}} + x^k (X_k(y))'_{y^{n+1}}) = 0.$$

В итоге получилось функциональное уравнение (1.12) при $\psi = 0$. Его решение найдено в теореме 1: $(X_p(x))'_{x^{n+1}} = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q c_{pq} x^q$. Интегрируя найденное уравнение, получаем

$$X_p(x) = \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_q c_{pq} x^q x^{n+1} + C_p(x^1, \ldots, x^n).$$

Теперь уравнение (4.1) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (y^k C_k(x^1, \ldots, x^n) + x^k C_k(y^1, \ldots, y^n)) = (C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n))a(\theta)w.$$

Дифференцируя последнее равенство по w, получаем $(C(x^1, \ldots, x^n) - C(y^1, \ldots, y^n))a(\theta) = 0$. Получено противоречие, так как $C \neq \mathrm{const}$, $a(\theta) \neq 0$.

3.2. Пусть теперь $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $\varphi'_w \neq 0$ и $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} \neq 0$. Тогда используем равенства (3.3)–(3.8) из леммы 1. Из них видно, что $X_{n+1} = X_{n+1}(x^{n+1})$, следовательно, правая часть уравнения (1.15) зависит от переменных θ, x^{n+1}, y^{n+1}, поэтому к уравнению (1.15) можно применить теорему 1:

$$\psi = (t(x^{n+1}) + t(y^{n+1}))\theta = (X_{n+1}(x^{n+1}) - X_{n+1}(y^{n+1}))\varphi(\theta, w).$$

Далее в правую часть подставляем формулы (3.3)–(3.8) из леммы 1, затем находим явное выражение для функции t, после чего записываем окончательные результаты. Проиллюстрируем это на примере (3.3):

$$(t(x^{n+1}) + t(y^{n+1}))\theta = rw\left(\frac{a(\theta)}{w} + b(\theta)\right) = -ra(\theta) + rwb(\theta).$$

Дифференцируя по x^{n+1} и y^{n+1}, получаем $t'_{x^{n+1}}\theta = rb(\theta)$, $t'_{y^{n+1}}\theta = rb(\theta)$, следовательно, $t = a = \mathrm{const}$. Тогда $2a\theta = ra(\theta) + rwb(\theta)$, поэтому $a(\theta) = 2a\theta/r$, $b(\theta) = 0$. В итоге приходим к (1.17). Аналогично рассуждая относительно результатов (3.4)–(3.8), получаем (1.18)–(1.22). Для нахождения функции σ полученные результаты подставляем в (1.10) и интегрируем методом характеристик [9].

5. Доказательство теоремы 3

При решении уравнения (1.23) будем рассматривать случаи $X_{n+1} = \mathrm{const}$; $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$ и $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} \neq 0$.

1. Рассмотрим первый случай: $X_{n+1} = c = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (1.23) имеет решение (1.24) (теорема 1).

2. Пусть теперь выполняется второй случай, т. е. $X_{n+1} \neq \mathrm{const}$, $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$. Тогда при $\lambda'_z = 0$ имеем $(X_p)'_{x^{n+1}} = 0$, и поэтому справедлива лемма 3, т. е. получаем равенство (1.25).

Если же $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} = 0$ и $\lambda'_z \neq 0$, то справедливы формулы (3.20) из леммы 2. Далее уравнение (1.23) дифференцируем сначала по x^{n+1}, а затем по y^{n+1}, после чего из первого равенства вычтем второе:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (y^k (X_k(x))'_{x^{n+1}} - x^k (X_k(y))'_{y^{n+1}}) = 0.$$

Затем полученное равенство дифференцируем по x^p, y^k и разделяем переменные: $(X_k)''_{x^{n+1}x^p} = 0$ при $p \neq k$, $(X_k)''_{x^{n+1}x^{n+1}} = 0$, $(X_k)''_{x^{n+1}x^k} = a = \mathrm{const}$. Интегрируя найденное, имеем $X_k = (ax^k + b)x^{n+1} + C_k(x^1, \ldots, x^n)$. Затем возвращаемся к уравнению (1.23):

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [y^k (ax^k + b)x^{n+1} + x^k (ay^k + b)y^{n+1}] + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [y^k C_k(x) + x^k C_k(y)] =$$
$$= (C(x) + C(y))(a(\theta)z + b(\theta)). \tag{5.1}$$

Далее уравнение (5.1) дифференцируем по x^{n+1} и y^{n+1}:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y^k (ax^k + b) = (C(x) + C(y))a(\theta), \; \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x^k (ay^k + b) = (C(x) + C(y))a(\theta).$$

Сравнивая эти два уравнения, получаем $b = 0$, $a\theta = (C(x)+C(y))a(\theta)$. Из последнего тождества следует, что $C(x) = c = \text{const} \neq 0$, $a(\theta) = a\theta/2c$. Теперь возвращаемся к (5.1):

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [y^k C_k(x) + x^k C_k(y)] = 2cb(\theta).$$

Полученное уравнение решено в теореме 1, поэтому

$$C_k(x) = cx^k + \sum_{q=1}^{n} \varepsilon_k c_{kq} x^q, \quad b(\theta) = \theta, \quad c_{kq} = -c_{qk} = \text{const}.$$

Таким образом, получаем (1.26) при $m = 0$.

3. Пусть, наконец, выполняется третий случай, т. е. $X_{n+1} \neq \text{const}$, $(X_{n+1})'_{x^{n+1}} \neq 0$. Тогда при $\lambda'_z = 0$ уравнение (1.23) продифференцируем по x^{n+1}:

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k y^k (X_k(x))'_{x^{n+1}} = (X_{n+1}(x))'_{x^{n+1}} \lambda(\theta). \tag{5.2}$$

Дифференцируя это тождество дважды по y^k, получаем $\lambda(\theta) = a\theta + b$. Потом возвращаемся в (5.2), получаем $(X_k)'_{x^{n+1}} = ax^k (X_{n+1})'_{x^{n+1}}$, $b = 0$. Интегрируем найденное: $X_k(x) = ax^k X_{n+1}(x) + C_k(x^1, \ldots, x^n)$, после чего перейдём к (1.23): $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [y^k C_k(x) + x^k C_k(y)] = 0$. Последнее уравнение решено в первой части теоремы 2. Таким образом, получаем решение (1.25).

Если же $\lambda'_z \neq 0$, то, применяя лемму 2 и рассуждая, как при доказательстве последней части теоремы 2, получаем (1.26.1), (1.26.2), (1.27)–(1.30). Для нахождения функции $\varkappa$ полученные результаты подставляем в (1.11) и интегрируем.

Заключение

В данной работе решены функциональные уравнения (1.9)–(1.11), возникающие в задаче вложения пространства $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением. При решении этих уравнений существенно использовались леммы 1 и 2, которые также можно доказать и для некоторых других геометрий, например двумерной симплициальной [1]:

$$\theta(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}.$$

Задача вложения для такой геометрии состоит в поиске всех функций вида $f = f(\theta, x^3, y^3)$, являющихся двухточечными инвариантами шестипараметрической группы преобразований. Эта задача сводится к решению функционального уравнения

$$[(x^1 - x^2)(X_2(x) - X_2(y)) - (y^1 - y^2)(X_1(x) - X_1(y))]\frac{\partial f}{\partial \theta} +$$

$$+(x^1 - x^2)^2 \left(X_3(x)\frac{\partial f}{\partial x^3} + X_3(y)\frac{\partial f}{\partial y^3} \right) = 0.$$

Частными случаями этого уравнения являются уравнения вида (1.9) при $X_3 = X_3(x^3)$, (1.10), (1.11). Таким образом, для решения новых задач также требуется доказательство теорем, аналогичных теоремам 1, 2 и 3.

Список литературы

1. **Михайличенко, Г. Г.** Математические основы и результаты теории физических структур / Г. Г. Михайличенко. — Горно-Алтайск : Изд-во Горно-Алтайс. гос. ун-та, 2016. — 297 с.
2. **Богданова, Р. А.** Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения / Р. А. Богданова // Сиб. журн. индустр. математики. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 12–22.
3. **Кыров, В. А.** Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии / В. А. Кыров // Сиб. журн. индустр. математики. — 2010. — Т. 13, № 4. — С. 38–51.
4. **Кыров, В. А.** Функциональные уравнения в симплектической геометрии / В. А. Кыров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 149–153.
5. **Кыров, В. А.** Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений / В. А. Кыров // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2012. — Т. 26, № 1. — С. 31–38.
6. **Кыров, В. А.** Шестимерные алгебры Ли групп движений трёхмерных феноменологически симметричных геометрий / В. А. Кыров // Приложение к книге Г. Г. Михайличенко «Полиметрические геометрии». — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2001. — С. 116–143.
7. **Кыров, В. А.** Гельмгольцевы пространства размерности два / В. А. Кыров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 6. — С. 1343–1361.
8. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
9. **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Наука, 1969. — 424 с.

Поступила в редакцию 25.12.2016
После переработки 28.02.2017

Сведения об авторах

Кыров Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и методики преподавания физики, Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия; e-mail: kyrovVA@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 1. P. 30–45.

SOLVING OF FUNCTIONAL EQUATIONS ASSOCIATED WITH THE SCALAR PRODUCT

V.A. Kyrov

Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, Russia
kyrovVA@yandex.ru

The functional equations

$$[X]\,\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + X_{n+1}(x^{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial x^{n+1}} + X_{n+1}(y^{n+1})\frac{\partial\chi}{\partial y^{n+1}} = 0,$$

$$[X]\,\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + (X_{n+1}(x) - X_{n+1}(y))\frac{\partial\sigma}{\partial w} = 0,\ [X]\,\frac{\partial\varkappa}{\partial\theta} + (X_{n+1}(x) + X_{n+1}(y))\frac{\partial\varkappa}{\partial z} = 0,$$

is solved in the paper. Here $[X] = \sum_{k=1}^{n}\big(\varepsilon_k x^k X_k(y) + \varepsilon_k y^k X_k(x)\big)$, $x = (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1})$, $\varepsilon_k = \pm 1$, the equations are arising in the embedding problem of the space $\mathbb{R}^n$ with the inner product of the form $\theta = \varepsilon_1 x^1 y^1 + \cdots + \varepsilon_n x^n y^n$. In this problem, all kinds of functions $f = f(\theta, x^{n+1}, y^{n+1})$ are found that are two-point invariants of $n(n+1)/2$-parametric group of transformations.

Keywords: *functional equation, functional-differential equation, differential equation, scalar product.*

References

1. **Mikhailichenko G.G.** *Matematicheskiye osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur* [The mathematical basics and results of the theory of physical structures]. Gorno-Altaisk, Gorno-Altaisk State University Publ., 2016. 197 p. (In Russ.).
2. **Bogdanova R.A.** Gruppy dvizheniy dvumernykh gel'mgol'tsevykh geometriy kak resheniye funktsional'nogo uravneniya [Movements groups of two-dimensional Helmholtz geometries as solution of functional equation]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics], 2009, vol. 12, no. 4, pp. 12–22. (In Russ.).
3. **Kyrov V.A.** Funktsional'nye uravneniya v psevdoyevklidovoy geometrii [Functional equations in pseudo-Euclidean geometry]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki* [Siberian journal of industrial mathematics], 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51. (In Russ.).
4. **Kyrov V.A.** Funktsional'nyye uravneniya v simplekticheskoy geometrii [Functional equations in simplicial geometry]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS], 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153. (In Russ.).
5. **Kyrov V.A.** Ob odnom klasse funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On a class of functional-differential equations]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki* [Bulletin of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences], 2012, vol. 26, no. 1, pp. 31–38. (In Russ.).
6. **Kyrov V.A.** Shestimernye algebry Li grupp dvizheniy tryokhmernykh fenomenologicheski simmetrichnykh geometriy [Six-dimensional Lie algebra of motions groups of three-dimensional phenomenologically symmetric geometries]. *Prilozheniye k knige G.G. Mikhailichenko "Polimetricheskiye geometrii"* [Appendix to the book of G.G. Mikhailichenko "Polymetric geometries"]. Novosibirsk, Novosibirsk State University Publ., 2001. Pp. 116–143. (In Russ.).
7. **Kyrov V.A.** Two-dimensional Helmholtz spaces. *Siberian Mathematical Journal*, 2005, vol. 46, no. 6, pp. 1082–1096.
8. **Ovsyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations.* New York, Academic Press, 1982. 416 p.
9. **El'sgol'tz L.E.** *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 424 p. (In Russ.).

Accepted article received 25.12.2016
Corrections received 28.02.2017