Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 1. С. 18–29.

УДК 517.957, 336.7

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ОПЦИОНОВ НА НЕЛИКВИДНЫХ РЫНКАХ

М. М. Дышаев

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Представлен краткий обзор некоторых математических моделей ценообразования опционов, а именно моделей Сиркара — Папаниколау и Шёнбухера — Уилмотта. Эти модели интересны тем, что учитывают эффекты обратной связи от операций крупных трейдеров на неликвидном рынке. Описаны основные допущения и ограничения моделей. Для каждой из моделей приведены итоговые уравнения, описывающие динамику цены производных финансовых инструментов в моделируемых условиях.

Ключевые слова: *ценообразование опционов, модель Блэка — Шоулза, модель Сиркара — Папаниколау, модель Шёнбухера — Уилмотта, неликвидные рынки, стохастический процесс, дифференциальное уравнение в частных производных, начально-краевая задача.*

Введение

Классические теории ценообразования опционов базируются на гипотезе совершенного рынка. В рамках этой гипотезы участники рынка используют только сложившиеся на рынке цены. Трейдеры своими операциями не оказывают влияния на цены — ни временно, ни постоянно. Также полностью отсутствуют трансакционные издержки.

И хотя очевидно, что эти предположения противоречат практике, результирующие модели ценообразования опционов (например, модель Блэка — Шоулза [1; 2] или модель Хестона [3]) на практике широко используются. Они дают полезные результаты тогда, когда базовый актив ликвиден и номинал опциона не слишком большой для рынка. Однако в случае неликвидного рынка или необходимости операций с опционами больших номиналов уже нельзя исключать из рассмотрения влияние таких операций на рынок.

В работе рассмотрена модель Сиркара — Папаниколау [4], которая учитывает эффекты обратной связи, возникающие из-за хеджирующих операций крупных трейдеров. Также рассмотрена модель Шёнбухера — Уилмотта [5], в которой исследуется общее влияние стратегий (в том числе и манипуляционных) крупных трейдеров на цены базового актива.

В большинстве работ по ценообразованию опционов на неликвидном рынке экономическая модель содержит две различные группы трейдеров. Как правило, это крупный трейдер и большое число малых трейдеров, представляющих собой остальной рынок. Крупным трейдером на практике может являться какой-либо институциональный инвестор, например хедж-фонд или банк. Также крупным трейдером может быть стихийно сложившаяся группа малых трейдеров, которые используют одну и ту же торговую стратегию и, следовательно, одновременно покупают или продают значительные объёмы активов.

В работе E. Peters [6] рассматриваются «умные» трейдеры, которые инвестируют в соответствии с внутренней стоимостью активов, и «шумовые» трейдеры, которые следуют инвестиционной моде. Последние крайне резко реагируют на новости, которые могут повлиять на будущие дивиденды по акциям, тем самым позволяя зарабатывать «умным» трейдерам.

H. Follmer и M. Schweizer [7] вводят в рассмотрение так называемых «информированных» трейдеров, которые верят в наличие фундаментального значения актива и в то, что цена актива когда-нибудь, со временем примет это значение. Здесь же вводится класс «шумовых» трейдеров, чьи потребности возникают из хеджирования. Авторы создали модель диффузионного равновесия для цены актива, основанной на взаимодействии между этими двумя типами трейдеров.

M. Brennan и E. Schwartz [8] создали модель, в которой действует инвестор, максимизирующий ожидаемую полезность инвестиций. Остальные инвесторы следуют простой стратегии страхования своих портфелей, которая априори известна всем.

Также опираясь на предположение об использовании страхования портфелей, R. Frey и A. Stremme [9] представили модель, включающую в себя два следующих типа трейдеров: «реферальных», эталонных трейдеров, которые в основном инвестируют в активы, ожидая их подъёма, и «программных» трейдеров, которые торгуют для страхования своих портфелей опционов, следуя стратегиям динамического хеджирования, вытекающим из модели Блэка — Шоулза.

И модель Сиркара — Папаниколау, и модель Шёнбухера — Уилмотта основаны на предположении о двух типах трейдеров. В обеих моделях все участники рынка могут торговать постоянно и без издержек. Рассмотрим каждую из них более подробно.

Модель Сиркара — Папаниколау

В модели Сиркара — Папаниколау [4] инвесторы своими сделками создают непрерывный во времени рынок для отдельного актива. Процесс его равновесной цены обозначим как $\{X_t : t \geq 0\}$. Стохастический процесс цены деривативa обозначим через $\{P_t : t \geq 0\}$, а стохастический процесс цены облигации как $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$.

Первая группа трейдеров в рассматриваемой модели — «реферальные» трейдеры. Сразу необходимо отметить, что, поскольку равновесная цена должна быть независима от распределения средств между реферальными трейдерами, можно рассматривать всю их совокупность как одного «суммарного» реферального трейдера, который представляет действия всех реферальных трейдеров на рынке.

Чтобы получить модель для цены актива с учётом эффектов обратной связи, вместо того чтобы считать X_t заданным (в общем случае процесс цены задаётся обобщённым процессом Ито), авторы Р. Сиркар и Г. Папаниколау предположили, что такого агрегированного реферального трейдера можно охарактеризовать его функцией спроса и процессом его доходов от операций, используя следующие предположения:

1. Суммарный стохастический доход (равный общему доходу всех реферальных трейдеров) моделируется процессом Ито $\{Y_t : t \geq 0\}$, удовлетворяющим уравнению
$$dY_t = \mu(Y_t, t)dt + \eta(Y_t, t)dW_t,$$
где $\{W_t : t \geq 0\}$ — броуновское движение, μ и η — внешние заданные функции, удовлетворяющие обычным техническим условиям существования

и единственности непрерывного решения этого уравнения (условие Липшица и условие ограничения роста, см., например, [10, теорема 5.2.1, с. 91]). Заметим, что функции $\mu(y,t)$ и $\eta(y,t)$ не будут использоваться в уравнении ценообразования опционов, так как процессы доходов референтных трейдеров прямо не наблюдаемы.

2. Функция спроса $\tilde{D}(X_t, Y_t, t)$ референтных трейдеров зависит от их доходов и процесса равновесной цены.

Вторая группа трейдеров — «программные» трейдеры — характеризуется стратегией динамического хеджирования, которой они следуют в целях портфельного страхования. Их совокупный спрос задан функцией $\phi(X_t, t)$, являющейся количеством базового актива, которое трейдеры хотят держать в момент времени t при цене X_t. Программные трейдеры хеджируются против риска, связанного с изменением цены проданных ими ζ деривативов. Для удобства будем писать $\phi(X_t,t) = \zeta\Phi(X_t,t)$, где Φ можно рассматривать как количество бумаг, необходимых для хеджирования одного опциона.

Определим относительный спрос референтных трейдеров как

$$D(x,y,t) = \frac{1}{S_0}\tilde{D}(x,y,t),$$

где S_0 — предложение базового актива. Относительный спрос программных трейдеров запишем как

$$\rho\Phi = \frac{\zeta}{S_0}\Phi(x,t),$$

где $\rho = \zeta/S_0$ является соотношением объёма хеджируемых опционов к общему предложению базового актива. Общий спрос тогда можно записать как

$$G(x,y,t) = D(x,y,t) + \rho\Phi(x,t).$$

Рыночное равновесие обеспечивается равенством спроса и предложения в каждый момент времени, что с учётом выполненной нормализации можно записать как $G(X_t, Y_t, t) = 1$. Эта формула является определяющим соотношением между траекторией X_t и траекторией Y_t. Предполагая, что $G(x,y,t)$ строго монотонна и имеет непрерывные первые частные производные по x и y, её можно обратить для получения $X_t = \psi(Y_t,t)$ для некоторой гладкой функции $\psi(y,t)$. Это говорит о том, что процесс X_t должен быть управляем тем же броуновским движением, что и Y_t.

Использование леммы Ито даёт равенство

$$dX_t = \left[\mu(Y_t,t)\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\eta^2(Y_t,t)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]dt + \eta(Y_t,t)\frac{\partial\psi}{\partial y}(Y_t,t)dW_t,$$

а дифференцируя условие рыночного равновесия $G(\psi(y,t)), y, t) = 1$ как неявную функцию, получаем $\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}/\frac{\partial G}{\partial x}$, где $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ из-за строгой монотонности. Следовательно, для цены базового актива можно записать процесс в виде

$$dX_t = \alpha(X_t,Y_t,t)dt + v(X_t,Y_t,t)\eta(Y_t,t)dW_t,$$

где скорректированный на эффекты обратной связи дрейф будет иметь вид

$$\alpha = -\left\{\mu\frac{G_y}{G_x} + \frac{G_t}{G_x} + \frac{1}{2}\eta^2\left[\frac{G_{yy}}{G_x} - 2\frac{G_{xy}G_y}{G_x^2} + \frac{G_{xx}G_y^2}{G_x^3}\right]\right\},$$

а скорректированная на эффекты обратной связи волатильность есть

$$v = \frac{D_y(X_t, Y_t, t) + \rho\Phi_y(X_t, t)}{D_x(X_t, Y_t, t) + \rho\Phi_x(X_t, t)}.$$

Чтобы в дальнейшем получить формулу цены опциона, необходимо построить самофинансируемую стратегию для программных трейдеров и выразить Φ через цену деривативa P_t. Без потери общности предполагается, что цена одной единицы деривативa задана как $P_t = C(X_t, t)$ для некоторой достаточно гладкой функции $C(x, t)$.

Самофинансируемая стратегия (a_t, b_t) с базовым активом и безрисковой облигацией с учётом отсутствия арбитража записывается как $a_t X_t + b_t \beta_t = P_t$, $0 \le t \le T$. При этом $a_t = \Phi(X_t, t)$, так как эта величина как раз и есть количество базового актива, который программный трейдер должен держать для страховки против риска проданного деривативa.

С одной стороны, используя ранее полученное выражение для dX_t, имеем

$$dP_t = a_t dX_t + b_t d\beta_t = \left[a_t \alpha(X_t, Y_t, t) + b_t r \beta_t\right] dt + a_t v(X_t, Y_t, t)\eta(Y_t, t) dW_t.$$

С другой стороны, применяя лемму Ито к $P_t = C(X_t, t)$, получим равенство

$$dP_t = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial x} dX + \frac{1}{2} v^2 \eta^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dt.$$

Сравнивая эти два выражения, согласовывая слагаемые при dt и замечая, что $a_t = \Phi(X_t, t) = \frac{\partial C}{\partial x}$, а $b_t = \frac{P_t - a_t X_t}{\beta_t}$, получаем уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \alpha \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 \eta^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \alpha \Phi + r\left(C - x\Phi\right).$$

Можно переписать его в терминах относительной функции спроса $G = D + \rho\Phi$:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{D_y}{D_x + \rho C_{xx}}\right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x \frac{\partial C}{\partial x} - C\right) = 0.$$

Нетрудно заметить, что полученная авторами модель в этой общей форме зависит от ненаблюдаемого процесса Y_t из-за множителя $\eta(y, t)$.

Окончательным шагом в моделировании является усиление согласованности с моделью Блэка — Шоулза при $\rho \to 0$. Это налагает важное ограничение на функцию спроса. Напомним классическое уравнение Блэка — Шоулза:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x \frac{\partial C}{\partial x} - C\right) = 0.$$

Для упрощения авторы модели предположили, что D не зависит от t и что действия реферальных трейдеров обладают следующими характеристиками (гипотеза рационального трейдинга): $D_x < 0$ (их спрос на актив снижается, когда цена растёт) и $D_y > 0$ (их спрос на актив растёт с ростом их доходов).

Исходя из этого и предполагая, что в отсутствие программных трейдеров процесс доходов Y_t является геометрическим броуновским движением вида $dY_t = \mu_1 Y_t dt + \eta_1 Y_t dW_t$, авторы показали (см. утверждение 1 в [4]), что D должно удовлетворять равенству $D_y/D_x = -\gamma x/y$, где взят отрицательный квадратный корень, так как левая часть отрицательна по гипотезе рационального трейдинга.

Рассмотрим этот вопрос немного подробнее. Сравнивая с уравнением модели Блэка — Шоулза при $\rho \to 0$, получим равенство

$$\frac{1}{2}\eta_1^2 y^2 \left[\frac{D_y(x,y)}{D_x(x,y)}\right]^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2,$$

и, значит,

$$\frac{D_y}{D_x} = -\gamma\frac{x}{y}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\sigma}{\eta_1}.$$

Общее решение этого уравнения будет иметь вид $D(x,y) = U(y^\gamma/x)$ для любой дифференцируемой функции $U(\cdot)$. Окончательно прямым дифференцированием получаем, что $D_x < 0$ и $D_y > 0$ для $x, y > 0$, если и только если $U'(\cdot) > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\eta_1^2 y^2 \left[\frac{D_y(x,y)}{D_x(x,y) + \rho C_{xx}}\right]^2 = \frac{1}{2}\eta_1^2 y^2 \gamma^2 \left[\frac{(y^{\gamma-1}/x)\, U'(y^\gamma/x)}{(y^\gamma/x^2)\, U'(y^\gamma/x) - \rho C_{xx}}\right]^2.$$

С другой стороны, из условия рыночного равновесия вытекает, что $U(Y_t^\gamma/X_t) = 1 - \rho\Phi(X_t, t)$. Пусть $V(\cdot)$ будет обратной функцией к $U(\cdot)$, чьё существование гарантировано строгой монотонностью $U(\cdot)$. Если сделать замену $y^\gamma/x = V(1-\rho\Phi)$ и учесть, что $\eta_1\gamma = \sigma$, коэффициент при C_{xx} примет вид

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \left[\frac{V(1-\rho\Phi)U'(V(1-\rho\Phi))}{V(1-\rho\Phi)U'(V(1-\rho\Phi)) - \rho x\Phi_x}\right]^2.$$

Таким образом, получено семейство нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в случае отсутствия программных трейдеров ($\rho \to 0$) сводящееся к классическому уравнению Блэка — Шоулза:

$$C_t + \frac{1}{2}\left[\frac{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x))}{V(1-\rho C_x)U'(V(1-\rho C_x)) - \rho x C_{xx}}\right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} + r(xC_x - C) = 0. \qquad (1)$$

Уравнения полученного семейства независимы от параметров в процессах доходов Y_t реферальных трейдеров и зависят только от функции U и σ — наблюдаемой рыночной волатильности базового актива. Также необходимо отметить существенно нелинейный характер полученного уравнения, поскольку в знаменателе дроби имеется вторая частная производная цены опциона по цене базового актива.

Полученное уравнение описывает динамику стоимости опциона на неликвидном рынке, когда крупные трейдеры, хеджируя свои опционные портфели, покупают и продают базовый актив (например, акцию), оказывая тем самым влияние на его цену, которая, в свою очередь, влияет на цены опционов. Возникают так называемые эффекты обратной связи, которые и учитывает данная модель.

Авторы Р. Сиркар и Г. Папаниколау ограничились рассмотрением линейной функции $U(z) = \beta z$, $\beta > 0$, в этом случае уравнение имеет вид

$$C_t + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\rho C_x}{1-\rho C_x - \rho x C_{xx}}\right]^2 \sigma^2 x^2 C_{xx} + r(xC_x - C) = 0,$$

и провели численное исследование поведения модели в моменты, близкие к экспирации опционов.

Работа [11] положила начало исследованию уравнения Блэка — Шоулза и других уравнений теории финансовых рынков методами группового анализа [12]. Групповая классификация уравнения (1) (относительно произвольной функции V) и ряд его инвариантных решений и подмоделей получены в работах [13; 14], различные варианты этого уравнения методами группового анализа исследованы в серии работ L. A. Bordag с соавторами [15–18]. Работы [19; 20] содержат классификацию семейства уравнений, включающего в себя уравнение (1) как частный случай.

Модель Шёнбухера — Уилмотта

В целом построение модели ценообразования опционов Шёнбухера — Уилмотта [5] на неликвидном рынке схоже с конструкцией модели Сиркара — Папаниколау. Однако имеется и несколько существенных отличий.

В модели Шёнбухера — Уилмотта также существует два типа участников рынка: крупный трейдер и большое число мелких трейдеров. Издержки в модели отсутствуют. Новая информация постоянно поступает на рынок в форме броуновского движения W_t (для простоты).

Вместо совокупного спроса реферальных трейдеров авторы П. Шёнбухер и П. Уилмотт рассматривали избыточный спрос малых трейдеров, который записывается как

$$\chi(S,W,t) = D(S,W,t) - \tilde{S}(S,W,t),$$

где $D(S,W,t)$ — совокупный спрос малых трейдеров, а $\tilde{S}(S,W,t)$ — общее предложение базового актива (например, акции) на рынке. Общее предложение изменяется только при дополнительных выпусках акций.

В дальнейшем касательно спроса небольших трейдеров использовались следующие предположения:

- Все необходимые стохастические воздействия содержатся в величине W. Это позволяет учесть, в частности, и то, что мелкие торговцы не замечают присутствие большого трейдера и его торговой стратегии. Такое предположение служит для предотвращения стратегического трейдинга в качестве реакции на сделки крупного трейдера. В противном случае необходимо найти полное равновесие в смысле теории игр между большим и малыми трейдерами.
- Избыточный спрос зависит только от текущих значений S, W и t.
- Функция $\chi(S,W,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по S и W и один раз — по t.
- Кривая избыточного спроса имеет отрицательный наклон по отношению к цене акции: $\frac{\partial\chi}{\partial S} < 0$ для всех S, W и t. Это означает, что при прочих равных условиях мелкие трейдеры хотели бы держать больше акций в портфеле, если акции стоят дёшево (низкая цена S), и меньше, если акции стоят дорого (высокая S). И, кроме того, только при отрицательном наклоне кривой спроса цена перемещается вверх из-за ордера на покупку крупного трейдера и вниз из-за его ордера на продажу. Этот эффект является общей реакцией цен при крупных сделках на большинстве бирж (J. Board и C. Sutcliffe [21]). При положительном наклоне эта связь будет обратной.
- Для каждого W и t существует такая S, что $\chi(S,W,t) = 0$. Такая цена S называется равновесной (невозмущённой) ценой.

Крупный трейдер в модели придерживается торговой стратегии $f(S,t)$, которая может быть любой торговой стратегией, не обязательно хеджирующей портфель опционов, в отличие от модели Сиркара — Папаниколау. $f(S,t)$ — это количество базового актива, которое крупный трейдер хочет держать, т. е. спрос крупного трейдера. Предполагается, что эта стратегия явно не зависит от процесса поступления информации на рынок W (разве что косвенно через S). Также предполагается достаточная дифференцируемость $f(S,t)$.

В отсутствие большого трейдера равновесная цена определяется как решение уравнения $\chi(S,W,t) = 0$ заданной функции избыточного спроса, времени t и информационного процесса W. С крупным трейдером условие равновесия, определяющее цену акции S, принимает вид

$$\chi(S,W,t) + f(S,t) = 0,$$

где дополнительный спрос, возникающий из-за торговой стратегии крупного трейдера, добавляется к избыточному спросу небольших трейдеров.

Вместо того чтобы решать уравнения равновесия непосредственно, можно вывести стохастическое дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет S из этих уравнений. Найдём стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dW,$$

которое неявно определяется уравнением $\chi(S,W,t) + f(S,t) = 0$.

Применяя лемму Ито для случая нескольких переменных, полагая $dW = 0\cdot dt + 1\cdot dW$ и учитывая, что $dSdW = \sigma(S,t)dt$, получаем:

$$0 = d\chi(S,W,t) + df(S,t) = \left[\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S^2} + \right.$$
$$\left. + \sigma(S,t)\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S\partial W} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial W^2}\right]dt + \frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S}dS + \frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}dW +$$
$$+ \left[\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right]dt + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}dS.$$

Подставляя сюда выражение dS из стохастического уравнения и собирая отдельно слагаемые с dt и dW, получим:

$$0 = \left[\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial W^2} + \right.$$
$$+ \sigma^2(S,t)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right) + \sigma(S,t)\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S\partial W} +$$
$$\left. + \mu(S,t)\left(\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\right)\right]dt +$$
$$+ \left[\sigma(S,t)\left(\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\right) + \frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}\right]dW.$$

Для истинности этого уравнения как стохастическая компонента (множитель при dW), так и локально детерминированная компонента (множитель при dt) должны быть равны нулю. Отсюда следует, что для $\sigma(S,t)$ должно выполняться равенство

$$\sigma(S,t) = -\frac{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}},$$

а функция $\mu(S,t)$ должна иметь вид

$$\mu(S,t) = \frac{1}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\left[\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial W^2} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)^2\left(\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right) -$$
$$\left. - \left(\frac{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)\frac{\partial^2\chi(S,W,t)}{\partial S\partial W}\right].$$

Для того чтобы полученные выражения имели смысл, производная избыточного спроса по цене не должна быть равна нулю: $\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} \neq 0$. Экономически это ограничение означает, что избыточный спрос действительно реагирует на изменения цен. В противном случае было бы невозможно найти равновесие путём корректировки цен и рынок был бы полностью неликвидным.

Используя далее стандартную технику, а именно из условия безарбитражности рынка и с помощью леммы Ито, авторы получили общее уравнение модели стоимости опциона $P(S,t)$ на неликвидном рынке, учитывающее эффекты обратной связи между процессом цены базового актива и торговой стратегией крупного трейдера $f(S,t)$:

$$0 = \frac{\partial P(S,t)}{\partial t} - rP(S,t) + rS\frac{\partial P(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma(S,t)^2\frac{\partial^2 P(S,t)}{\partial S^2}$$

или, если подставить формулу скорректированной на эффекты обратной связи волатильности,

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial W}}{\frac{\partial\chi(S,W,t)}{\partial S} + \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)^2 P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0.$$

Аналогично, как и для ранее рассмотренной модели Сиркара — Папаниколау, данное уравнение необходимо согласовать с классической моделью Блэка — Шоулза в случае, когда эффекты обратной связи отсутствуют (т. е. когда отсутствует крупный трейдер и условие равновесия имеет вид $\chi(S,W,t) = 0$). В этом случае цены будут подчиняться логнормальному случайному блужданию (как в модели Блэка — Шоулза)

$$dS' = \tilde{\mu}S'dt + \tilde{\sigma}S'dW,$$

где $S' = S_0\exp\left\{\left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)t + \tilde{\sigma}W\right\}$, а $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\sigma}$ — константы. Функция избыточного спроса небольших трейдеров в этом случае имеет вид (см. Example 1 в [5])

$$\chi(S,W,t) = l(S' - S) = l\left(S_0\exp\left\{\left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)t + \tilde{\sigma}W\right\} - S\right),$$

где l — параметр ликвидности рынка (чем больше l, тем выше ликвидность). В этом случае частные производные функции χ будут удовлетворять соотношениям

$$\frac{\partial\chi}{\partial W} = l\tilde{\sigma}S',\ \frac{\partial^2\chi}{\partial W^2} = l\tilde{\sigma}^2S',\ \frac{\partial\chi}{\partial S} = -l,\ \frac{\partial\chi}{\partial t} = l\left(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\right)S',\ \frac{\partial^2\chi}{\partial S\partial W} = 0.$$

Подставляя значения этих производных в формулы для $\sigma(S,t)$ и $\mu(S,t)$, получим:

$$\sigma(S,t) = \frac{l\tilde{\sigma}S'}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}},$$

$$\mu(S,t) = \frac{1}{l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\left[l\tilde{\mu}S' + \frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + \frac{l^2\tilde{\sigma}^2S'^2}{2\left(l - \frac{\partial f(S,t)}{\partial S}\right)}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\right].$$

Таким образом, уравнение модели Шёнбухера — Уилмотта для учёта эффектов обратной связи от операций крупных трейдеров при логнормальном движении базового актива имеет следующий вид:

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{l}\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}}\right)^2\tilde{\sigma}^2S'^2P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0.$$

В случае когда крупный трейдер осуществляет операции для хеджирования своего опционного портфеля (аналогично модели Сиркара — Папаниколау, стратегия при этом будет иметь вид $f(S,t) = \frac{\partial P(S,t)}{\partial S}$), уравнение переходит к виду

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{l}P_{SS}}\right)^2 \tilde{\sigma}^2 S'^2 P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0. \tag{2}$$

Обратим внимание, что данное уравнение при возрастании параметра ликвидности l переходит в классическое уравнение Блэка — Шоулза. Однако остаётся вопрос об интерпретации параметра l. Также в уравнении присутствует цена базового актива S' из модели Блэка — Шоулза при логнормальном блуждании, хотя особый интерес представляет цена базового актива S именно с учётом эффектов обратной связи.

Рассмотрим эластичность избыточного спроса по цене $\alpha = \frac{\partial \chi}{\partial S}\frac{S}{\chi}$. Учитывая, что $\frac{\partial \chi}{\partial S} = -l$ и $\chi(S,W,t) = -f(S,t)$ в силу условия равновесия, получим

$$\alpha = \frac{\partial \chi}{\partial S}\frac{S}{\chi} = -l\frac{S}{\chi} = l\frac{S}{f},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{l} = \frac{S}{\alpha f}.$$

Теперь выразим S' через S. Снова из условия равновесия и вида функции избыточного спроса χ получаем равенство

$$l(S' - S) = -f(S,t)$$

и, следовательно,

$$S' = S - \frac{f}{l} = S - \frac{Sf}{\alpha f} = S\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Сделав соответствующие замены в (2), получим уравнение Шёнбухера — Уилмотта в виде

$$P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{S}{\alpha P_S}P_{SS}}\right)^2 \tilde{\sigma}^2 S^2 P_{SS} + r\left(SP_S - P\right) = 0.$$

Как показано в [13, п. 2], это уравнение соответствует уравнению (1) при одной из найденных при групповой классификации спецификаций свободного элемента $V(1 - \rho x)$, соответствующих дополнительным симметриям уравнения.

Заключение

В работе рассмотрены две модели ценообразования опционов на неликвидном рынке. И хотя авторы моделей изначально исследовали различные аспекты спроса и по-разному моделировали эффекты от операций крупных трейдеров, итоговые уравнения имеют сходный вид. Отметим также, что в обоих случаях получились существенно нелинейные уравнения.

Список литературы

1. **Black, F.** The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.
2. **Black, F.** The pricing of commodity contracts / F. Black // J. of Financial Economics. — 1976. — Vol. 3. — P. 167–179.
3. **Heston, S.** A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options / S. Heston // The Rev. of Financial Studies. — 1993. — Vol. 6, no. 2. — P. 327–343.
4. **Sircar, R.** Generalized Black — Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies / R. Sircar, G. Papanicolaou // Applied Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 5, no. 1. — P. 45–82.
5. **Schönbucher, P.** The feedback effects of hedging in illiquid markets / P. Schónbucher, P. Wilmott // SIAM J. on Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 61. — P. 232–272.
6. **Peters, E.** Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility / E. Peters. — 2nd ed. — N. Y. : John Wiley & Sons, 1996. — 274 p.
7. **Follmer, H.** A microeconomic approach to diffusion models of stock prices / H. Follmer, M. Schweizer // Mathematical Finance. — 1993. — Vol. 3, no. 1. — P. 1–23.
8. **Brennan, M.** Portfolio insurance and financial market equilibrium / M. Brennan, E. Schwartz // J. of Business. — 1989. — Vol. 62, no. 4. — P. 455–476.
9. **Frey, R.** Volatility and feedback effects from dynamic hedging / R. Frey, A. Stremme // Mathematical Finance. — 1997. — Vol. 7. — P. 351–374.
10. **Оксендаль, Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения : пер. с англ. / Б. Оксендаль. — М. : Мир : АСТ, 2003. — 408 с.
11. **Gazizov, R. K.** Lie symmetry analysis of differential equations in finance / R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov // Nonlinear Dynamics. — 1998. — Vol. 17. — P. 387–407.
12. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
13. **Дышаев, М. М.** Симметрийный анализ и точные решения одной нелинейной модели теории финансовых рынков / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2016. — Т. 23, № 1 (89). — С. 28–45.
14. **Дышаев, М. М.** Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов / М. М. Дышаев, В. Е. Федоров // Уфим. мат. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 29–41.
15. **Bordag, L. A.** Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives / L. A. Bordag, A. Y. Chmakova // International J. of Theoretical and Applied Finance. — 2007. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–21.
16. **Bordag, L. A.** Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions / L. A. Bordag, R. Frey // Chapter 3 in Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing / ed. M. Ehrhardt. — N. Y. : Nova Science Publ., Inc., 2008. — P. 83–109.
17. **Bordag, L. A.** On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model / L. A. Bordag // Mathematical Control Theory and Finance / eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho. — Berlin ; Heidelberg : Springer, 2008. — P. 71–94.
18. **Bordag, L. A.** Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions / L. A. Bordag, A. Mikaelyan // J. Letters in Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 96, no. 1–3. — P. 191–207.
19. **Fedorov, V. E.** Group classification for a general nonlinear model of option pricing / V. E. Fedorov, M. M. Dyshaev // Ural Mathematical J. — 2016. — Vol. 2, no. 2. — P. 37–44.
20. **Дышаев, М. М.** Групповой анализ одного нелинейного обобщения уравнения Блэка — Шоулза / М. М. Дышаев // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 7–14.

21. **Board, J.** The Effects of Trade Transparency in the London Stock Exchange: A Summary / J. Board, C. Sutcliffe // Spec. Paper 67, Financial Markets Group, London School of Economics. — 1995. — January. — 30 p.

Поступила в редакцию 20.10.2016
После переработки 10.12.2016

Сведения об авторе

Дышаев Михаил Михайлович, аспирант кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 1. P. 18–29.

ON SOME OPTIONS PRICING MODELS ON ILLIQUID MARKETS

M.M. Dyshaev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

This paper presents an overview of some options pricing mathematical models, namely the model of Sircar and Papanicolaou, and the model of Schönbucher and Wilmott. These models are interesting in that they take into account the feedback effects from the large traders operations on an illiquid market. The paper presents the basic assumptions and restrictions of the models. For each of the model a final equation are given describing the dynamics of the prices of the derivative financial instruments under simulated conditions.

Keywords: *options pricing, Black — Scholes model, Sircar — Papanicolaou model, Schönbucher — Wilmott model, illiquid market, stochastic process, partial differential equation, initial boundary value problem.*

References

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81, pp. 637–659.
2. **Black F.** The pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 1976, vol. 3, pp. 167–179.
3. **Heston S.** A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 1993, vol. 6, no. 2, pp. 327–343.
4. **Sircar R., Papanicolaou G.** Generalized Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 1998, vol. 5, no. 1, pp. 45–82.
5. **Schönbucher P., Wilmott P.** The feedback effects of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2000, vol. 61, pp. 232–272.
6. **Peters E.** *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. 2nd ed. N. Y. : John Wiley & Sons, 1996. xiv+274 p.
7. **Follmer H., Schweizer M.** A microeconomic approach to diffusion models of stock prices. *Mathematical Finance*, 1993, vol. 3, no. 1, pp. 1–23.
8. **Brennan M., Schwartz E.** Portfolio insurance and financial market equilibrium. *Journal of Business*, 1989, vol. 62, no. 4, pp. 455–476.

9. **Frey R., Stremme A.** Volatility and feedback effects from dynamic hedging. *Mathematical Finance*, 1997, vol. 7, pp. 351–374.
10. **Oksendal B.** *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.* 5th ed. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 2000. 332 p.
11. **Gazizov R.K., Ibragimov N.H.** Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 17, pp. 387–407.
12. **Ovsyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations.* New York, Academic Press, 1982. 416 p.
13. **Dyshaev M.M., Fedorov V.E.** Simmetriynyy analiz i tochnyye resheniya odnoy nelineynoy modeli teorii finansovykh rynkov [Symmetry analysis and exact solutions of a nonlinear model of the financial markets theory]. *Matematicheskiye zametki Severo-Vostochnogo federal'nogo universiteta* [Mathematical Notes of North-Eastern Federal University], 2016, vol. 23, no. 1 (89), pp. 28–45. (In Russ.).
14. **Dyshaev M.M., Fedorov V.E.** Simmetrii i tochnye resheniya odnogo nelineynogo uravneniya tsenoobrazovaniya optsionov [Symmetries and exact solutions of a nonlinear equation of options pricing]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal* [Ufa mathematical journal], 2017, vol. 9, no. 1, pp. 29–41. (In Russ.).
15. **Bordag L.A., Chmakova A.Y.** Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 1–21.
16. **Bordag L.A., Frey R.** Pricing options in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions. Chapter 3 in *Nonlinear Models in Mathematical Finance: Research Trends in Option Pricing*, ed. M. Ehrhardt. N. Y., Nova Science Publishers, Inc., 2008. Pp. 83–109.
17. **Bordag L.A.** On option-valuation in illiquid markets: invariant solutions to a nonlinear model. *Mathematical Control Theory and Finance*, eds. A. Sarychev, A. Shiryaev, M. Guerra and M. R. Grossinho. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008. Pp. 71–94.
18. **Bordag L.A., Mikaelyan A.** Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions. *Journal Letters in Mathematical Physics*, 2011, vol. 96, no. 1–3, pp. 191–207.
19. **Fedorov V.E., Dyshaev M.M.** Group classification for a general nonlinear model of option pricing. *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 37–44.
20. **Dyshaev M.M.** Gruppovoy analiz odnogo nelineynogo obobshcheniya uravneniya Bleka — Shoulza [Group analysis of a nonlinear generalization of Black — Scholes equation]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 3, pp. 7–14. (In Russ.).
21. **Board J., Sutcliffe C.** The Effects of Trade Transparency in the London Stock Exchange: A Summary. *Special Paper 67, Financial Markets Group, London School of Economics*, 1995, January. 30 p.

Accepted article received 20.10.2016
Corrections received 10.12.2016