*Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 35–42.*

УДК 517.9

# АСИМПТОТИКА ТРЁХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

**А. А. Ершов**

*Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
*ale10919@yandex.ru*

Построена асимптотика некоторых трёхмерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра. Знаменатель подынтегральной функции рассмотренных интегралов представляет собой сумму малого параметра и неотрицательной функции, обращающейся в ноль на трёх пересекающихся поверхностях. Такого вида интегралы расходятся при стремлении малого параметра к нулю. Применены метод вычитания особенностей и круговой метод.

**Ключевые слова:** *асимптотическое разложение, малый параметр, интеграл, метод вычитания особенностей, круговой метод.*

## Введение

Хорошо известна задача нахождения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. В качестве примера подобных интегралов можно привести хорошо изученные интегралы вида $\int\limits_0^1 f(x)e^{\lambda S(x)}dx$, где $\lambda$ — большой положительный параметр [1]. Асимптотика различных интегралов описана в ряде работ (например, [2; 3]). Здесь рассматриваются мало изученные до сих пор интегралы вида $\int \Psi(x,\varepsilon)dx$ от функции, которая регулярно зависит от малого параметра $\varepsilon$ всюду, кроме некоторого множества (одной или нескольких точек, многообразий и т. п.). Однако при $\varepsilon = 0$ интеграл расходится, и его асимптотика имеет довольно сложный характер.

В настоящей статье находится асимптотическое разложение сингулярных интегралов вида $\iiint\limits_{\omega} \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}$, где $\omega$ — некоторая окрестность критической точки (0,0,0), в которой неотрицательная функция $U(x,y,z)$ и её частные производные обращаются в ноль. В статье рассмотрен неисследованный ранее случай, когда функция $U(x,y,z)$ обращается в ноль на трёх пересекающихся в одной точке плоскостях и имеет специальный вид. Случаи, когда $U(x,y,z)$ равна нулю в точке или на одной поверхности, более просты для рассмотрения [4, гл. 7, § 30]. Отметим, что двумерным аналогом данных исследований является работа [5], в которой были исследованы асимптотические разложения сингулярных интегралов вида $\iint\limits_{\omega} \frac{dxdy}{\varepsilon^2+U(x,y)}$, где $\omega$ — некоторая окрестность критической точки (0,0), когда функция $U(x,y)$ обращается в ноль на $n$ пересекающихся линиях, а в монографии [4, гл. 1, § 1] была рассмотрена асимптотика двумерных сингулярных интегралов вида $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f(x,y)dxdy}{\varepsilon^2+xy}$.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00259-а) и фонда поддержки молодых учёных «Конкурс Мёбиуса».

## Вычисление асимптотики

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{\delta_3}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}$, где окрестность $[-\delta_1,\delta_1]\times[-\delta_2,\delta_2]\times[-\delta_3,\delta_3]$ достаточно мала,

$$U(x,y,z)=(z-h_1(x,y))^2\times(y-h_2(x,z))^2(x-h_3(y,z))^2G^2(x,y,z),$$

$G(x,y,z)$ — гладкая функция, не обращающаяся в ноль, а уравнения $z=h_1(x,y)$, $y=h_2(x,z)$ и $x=h_3(y,z)$ задают достаточно гладкие поверхности, пересекающиеся на трёх кривых с общей точкой в начале координат (т. е. $h_1(0,0)=h_2(0,0)=h_3(0,0)=0$), причём нормали к этим поверхностям в нуле не являются коллинеарными.

Заметим, что если применить предложенный в [5] метод разбиения области интегрирования на сектора и некоторые выпрямляющие замены, то по существу можно рассмотреть только следующий интеграл:

$$I(\varepsilon)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}\,, \tag{1}$$

где $f(x,y,z)\in C^\infty\big([0,1]\times[0,1]\times[0,1]\big)$ — некоторая положительная функция. Действительно, возьмём $\delta_1$, $\delta_2$ и $\delta_3$ малыми настолько, чтобы при $-\delta_3<x<\delta_3$, $-\delta_2<y<\delta_2$, $-\delta_1<z<\delta_1$ выполнялись неравенства

$$-\delta_1<h_1(x,y)<\delta_1,\quad -\delta_2<h_2(x,z)<\delta_2,\quad -\delta_3<h_3(y,z)<\delta_3.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{\delta_3}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}=S_1+S_2,$$

$$S_1=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{-\delta_3}^{h_3(y,z)}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)},\quad S_2=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{h_3(y,z)}^{\delta_3}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+U(x,y,z)}.$$

Рассмотрим интеграл $S_2$, интеграл $S_1$ исследуется аналогично. Имеем

$$S_2=\left[\begin{array}{c}x=\xi+h_3(y,z),\\ dx=d\xi\end{array}\right]=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_{0}^{\delta_3-h_3(y,z)}\frac{d\xi dydz}{\varepsilon^2+U(\xi+h_3(y,z),y,z)}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\xi=(\delta_3-h_3(y,z))s,\\ d\xi=(\delta_3-h_3(y,z))ds\end{array}\right]=\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_{-\delta_2}^{\delta_2}\int\limits_0^1\frac{f_1(y,z)dsdydz}{\varepsilon^2+U_1(s,y,z)},$$

где

$$f_1(y,z)=\delta_3-h_3(y,z),$$

$$U_1(s,y,z)=U((\delta_3-h_3(y,z))s+h_3(y,z),y,z)=$$

$$=s^2(z-\widetilde{h}_1(s,y,z))^2(y-\widetilde{h}_2(s,y,z))^2G_1^2(s,y,z),$$

$$\widetilde{h}_1(s,y,z)=h_1((\delta_3-h_3(y,z))s+h_3(y,z),y),$$

$$\widetilde{h}_2(s,y,z) = h_2((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), z),$$

$$G_1(s,y,z) = (\delta_3 - h_3(y,z))G((\delta_3 - h_3(y,z))s + h_3(y,z), y, z).$$

Обозначим через функцию $y = H_2(s,z)$ решение уравнения $y = \widetilde{h}_2(s,y,z)$ относительно $y$ и переставим пределы интегрирования. Тогда интеграл $S_2$ можно представить в виде суммы $S_2 = S_{2,1} + S_{2,2}$, где

$$S_{2,1} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_{-\delta_2}^{H_2(s,z)} \frac{f_1(y,z)dydsdz}{\varepsilon^2 + U_1(s,y,z)}, \quad S_{2,2} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_{H_2(s,z)}^{\delta_2} \frac{f_1(y,z)dydsdz}{\varepsilon^2 + U_1(s,y,z)}.$$

Интегралы $S_{2,1}$ и $S_{2,2}$ могут исследоваться практически одинаково, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Преобразуем интеграл $S_{2,2}$ следующим образом:

$$S_{2,2} = \begin{bmatrix} y = H_2(s,z) + \eta, \\ dy = d\eta \end{bmatrix} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^{\delta_2 - H_2(s,z)} \frac{f_1(H_2(s,z)+\eta, z)d\eta dsdz}{\varepsilon^2 + s^2\eta^2(z - \widetilde{h}_1)^2\widetilde{G}_1^2(s,\eta,z)},$$

где

$$\widetilde{G}_1(s,\eta,z) = G_1(s, H_2(s,z)+\eta, z)\cdot \frac{H_2(s,z) + \eta - h_2(s, H_2(s,z)+\eta, z)}{\eta}.$$

После замены

$$\begin{bmatrix} \eta = (\delta_2 - H_2(s,z)t, \\ d\eta = (\delta_2 - H_2(s,z)dt \end{bmatrix}$$

интеграл $S_{2,2}$ принимает вид

$$S_{2,2} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_1}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f_2(s,t,z)dtdsdz}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)}$$

с функциями

$$f_2(s,t,z) = f_1(t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z)),$$

$$U_2(s,t,z) = s^2\eta^2(z - \widetilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z), z))^2\widetilde{G}_1^2(s, (\delta_2 - H_2(s,z))t, z).$$

В свою очередь интеграл $S_{2,2}$ может быть разбит на сумму двух интегралов $S_{2,2,1} + S_{2,2,2}$, где

$$S_{2,2,1} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{-\delta_1}^{H_1(s,t)} \frac{f_2(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)}, \quad S_{2,2,2} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{H_1(s,t)}^{\delta_1} \frac{f_2(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2 + U_2(s,t,z)}.$$

Здесь функция $z = H_1(s,t)$ — решение уравнения $z = \widetilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s,z), z)$.

Каждый из интегралов, $S_{2,2,1}$ и $S_{2,2,2}$, аналогичными заменами может быть приведён к интегралу вида

$$S = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{f_3(s,t,\tau)d\tau dtds}{\varepsilon^2 + s^2t^2\tau^2 G_3^2(s,t,\tau)}.$$

Теперь нужно избавиться от функции $G_3(s,t,\tau)$ в знаменателе. Для этого сделаем ряд замен, аналогичных заменам, проведённым в двумерном случае [5]:

$$S=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_3(s,t,\tau)d\tau dtds}{\varepsilon^2+s^2t^2\tau^2G_3^2(s,t,\tau)}=\left[\begin{array}{c}\zeta=\tau G_3(s,t,\tau)=F(s,t,\tau),\\ \tau=F^{-1}(s,t,\zeta)\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^{G_3(s,t,1)}\frac{f_3(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))d\zeta dtds}{F'_\tau(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))(\varepsilon^2+s^2t^2\zeta^2)}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^{G_3(s,t,1)}\frac{f_4(s,t,\zeta)d\zeta dtds}{\varepsilon^2+s^2t^2\zeta^2}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\zeta=G_3(s,t,1)z,\\ d\zeta=G_3(s,t,1)dz\end{array}\right]=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_5(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2t^2z^2G_3^2(s,t,1)},$$

где $F^{-1}(s,t,\zeta)$ обозначает функцию, обратную к функции $F(s,t,\tau)$ относительно третьей переменной.

Аналогично можно получить, что

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_5(s,t,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2t^2z^2G_3^2(s,t,1)}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_6(s,y,z)dzdtds}{\varepsilon^2+s^2y^2z^2G_3^2(s,1,1)}=$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_7(x,y,z)dzdtds}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2G_3^2(1,1,1)}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{f_8(x,y,z)dzdtds}{\mu^2+x^2y^2z^2},$$

где $\mu=\dfrac{\varepsilon}{G_3(1,1,1)}$.

Вернёмся к рассмотрению интеграла (1). Его асимптотику можно найти методом вычитания особенностей. Для этого представим функцию $f(x,y,z)$ в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=f(0,0,0)&+xf'_x(0,0,0)+yf'_y(0,0,0)+zf'_z(0,0,0)+\\&+xyf''_{xy}(0,0,0)+yzf''_{yz}(0,0,0)+xzf''_{xz}(0,0,0)+xyzf'''_{xyz}(0,0,0)+\\&+x^2\cdot\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)-xf'_x(0,0,0)}{x^2}+\ldots\\&+x^2y\cdot\frac{f'_y(x,0,0)-f'_y(0,0,0)-xf''_{xy}(0,0,0)}{x^2}+\ldots\\&+x^2yz\cdot\frac{f''_{yz}(x,0,0)-f''_{yz}(0,0,0)-xf'''_{xyz}(0,0,0)}{x^2}+\ldots\\&+x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}\Big(f(x,y,0)-f(x,0,0)-f(0,y,0)+f(0,0,0)+\\&+xf'_x(0,0,0)+yf'_y(0,0,0)-xf'_x(0,y,0)-yf'_y(x,0,0)+xyf''_{xy}(0,0,0)\Big)+\\&+\cdots+x^2y^2z\cdot\frac{1}{x^2y^2}\Big(f'_z(x,y,0)-f'_z(x,0,0)-f'_z(0,y,0)+f'_z(0,0,0)+\\&+xf''_{xz}(0,0,0)+yf''_{yz}(0,0,0)-xf''_{xz}(0,y,0)-yf''_{yz}(x,0,0)+\\&+xyf'''_{xyz}(0,0,0)\Big)+\cdots+x^2y^2z^2\varphi(x,y,z),\end{aligned}\qquad(2)$$

где $\varphi(x,y,z) = O(1)$. При этом данная сумма соответствует десяти различным видам интегралов, асимптотика каждого из которых по-прежнему не является столь очевидной, как в двумерном случае. Поэтому найдём только главный член асимптотики и оценку остатка.

Интеграл, соответствующий первому слагаемому равенства (2), можно разложить следующим способом:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \int_\varepsilon^1\int_0^1\int_\varepsilon^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} + \int_0^1\int_0^1\int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} +$$

$$+ \int_0^\varepsilon\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} - \int_0^\varepsilon\int_0^1\int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = I_1 + 2I_2 - I_3,$$

где

$$I_2 = \int_0^1\int_0^1\int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = [x=\varepsilon\xi] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\xi dydz}{1+\xi^2y^2z^2},$$

$$I_3 = \int_0^\varepsilon\int_0^1\int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = [x=\varepsilon\xi, z=\varepsilon\zeta] = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{d\xi dyd\zeta}{1+\varepsilon^2\xi^2y^2\zeta^2} = 1 + O(\varepsilon^2).$$

Асимптотику оставшегося интеграла можно найти, применяя круговой метод:

$$I_1 = \int_\varepsilon^1\int_0^1\int_\varepsilon^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = [x=\varepsilon t] = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_0^1\int_1^{1/\varepsilon} \frac{dtdydz}{1+t^2y^2z^2} =$$

$$= \left[t = \frac{1}{u}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_0^1\int_\varepsilon^1 \frac{dudydz}{u^2+y^2z^2} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1\int_0^y \frac{dudy}{u^2+y^2z^2} + \int_\varepsilon^1\int_0^u \frac{dydu}{u^2+y^2z^2} - \int_0^\varepsilon\int_\varepsilon^1 \frac{dydu}{u^2+y^2z^2}\right) dz = i_1 + i_2 - i_3,$$

где

$$i_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_\varepsilon^1\int_0^y \frac{dudydz}{u^2+y^2z^2} = \left[\begin{array}{c} u = yv, \\ du = ydv \end{array}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_\varepsilon^1\int_0^1 \frac{dvdydz}{y(v^2+z^2)} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_0^1 \frac{dvdz}{v^2+z^2} = [z=\varepsilon\zeta] = \ln\frac{1}{\varepsilon}\int_1^{1/\varepsilon}\int_0^1 \frac{dvd\zeta}{v^2+\varepsilon^2\zeta^2} = \left[\zeta = \frac{1}{u}\right] =$$

$$= \ln\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2+u^2v^2} = \ln\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^1\int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2+u^2v^2} - \int_0^\varepsilon\int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2+u^2v^2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt + \ln\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon),$$

$$i_2 = \frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1 dz\left[\int_\varepsilon^1\int_0^u \frac{dydu}{u^2+y^2z^2}\right] = \left[\begin{array}{c} y = ut, \\ dy = udt \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{udtdudz}{u^2+u^2t^2z^2} = \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dtdz}{1+t^2z^2} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\Bigg[\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz - \int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz\Bigg] = \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz - \ln\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2\ln\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$i_3 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dydudz}{u^2+y^2z^2} = \begin{bmatrix} y=\varepsilon\eta, \\ u=\varepsilon\xi, \\ z=\varepsilon\zeta \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{1}^{1/\varepsilon}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{1}^{1/\varepsilon}\frac{\varepsilon^3 d\eta d\xi d\zeta}{\varepsilon^2\xi^2+\varepsilon^4\eta^2\zeta^2} = \left[\eta=\frac{1}{y}, \zeta=\frac{1}{z}\right] = \int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dyd\xi dz}{y^2\xi^2\zeta^2+\varepsilon^2} = I_1.$$

Таким образом, $2I_1 = i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon)$. Отсюда $I_1 = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon)$ и, соответственно,

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{d\xi dydz}{1+\xi^2y^2z^2} - 1 + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon).$$

Заметим, что абсолютные величины всех остальных интегралов, соответствующих слагаемым суммы (2), можно оценить сверху интегралом $M\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{zdxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}$, где постоянная $M$ не зависит от $\varepsilon$. Поэтому для оценки точности главного члена асимптотики достаточно найти асимптотику интеграла $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{zdxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2}$.

Итак,

$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{zdxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z} - \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\varepsilon}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z} = \frac{1}{2}J_1 - J_2 + \frac{1}{2}J_3,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dxdydz}{\varepsilon^2+x^2y^2z} = \int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2y^2}{\varepsilon^2}\right)}{x^2y^2}dxdy = \left[x=\frac{\varepsilon}{u}, y=\frac{\varepsilon}{v}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\Big(\ln(u^2v^2+\varepsilon^2) - \ln(u^2v^2)\Big)dudv = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\Big(\ln(v^2+\varepsilon^2) - \varepsilon\ln(\varepsilon^2(v^2+1)) -$$

$$-2(1-\varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{v}\Big(\operatorname{arctg}\frac{v}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} v\Big)\Big)dv - \frac{2}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\big(\ln u + \ln v\big)dudv =$$

$$= \pi\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\pi}{2} + 2 - 2\ln 2 - 4\int\limits_{0}^{1}\frac{\operatorname{arctg} v}{v}dv\Big) + 2\ln\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{\pi}{4} + O(\varepsilon),$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2y^2z} = [x = \varepsilon\xi] = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\xi dydz}{1 + \xi^2y^2z},$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2y^2z} = [x = \varepsilon\xi, y = \varepsilon\eta] = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\xi d\eta dz}{1 + \varepsilon^2\xi^2\eta^2z} = 1 + O(\varepsilon).$$

Складывая интегралы, получаем

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\pi}{4} + 1 - \ln 2 - 2\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} v}{v}dv + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d\xi dydz}{1 + \xi^2y^2z}\Big) - 1 - \frac{\pi}{8} + O(\varepsilon).$$

Данная оценка позволяет заключить, что

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{f(x,y,z)dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2y^2z^2} = f(0,0,0) \cdot \frac{\pi}{4}\frac{1}{\varepsilon}\ln^2\frac{1}{\varepsilon} + O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big).$$

## Заключение

Как замечено А. М. Ильиным в работе [5], уже в трёхмерном случае возникают значительные трудности, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на пересекающихся многообразиях различной размерности. Построенная здесь асимптотика является примером такого вида сингулярных интегралов. Остаётся открытым вопрос, например, об асимптотике интеграла $\iint\limits_\omega \frac{dxdy}{\varepsilon^2 + U(x,y)}$, когда неотрицательная функция $U(x,y,z)$ обращается в ноль на трёх пересекающихся кривых. Однако интерес представляют и случаи, когда предельный знаменатель имеет критические точки более сложного вида, классификация которых есть, например, в [6; 7].

Автор благодарит А. М. Ильина за постановку целого направления исследований.

## Список литературы


1. **Федорюк, М. В.** Асимптотика, интегралы и ряды / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1987. — 544 с.
2. **Риекстыньш, Э. Я.** Асимптотические разложения интегралов / Э. Я. Риекстыньш. — Рига : Зинатне, 1974. — Т. 1. — 392 с.; Т. 2. — 464 с.
3. **Риекстыньш, Э. Я.** Асимптотические разложения интегралов. Т. 3 / Э. Я. Риекстыньш. — Рига : Зинатне, 1981. — 370 с.
4. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. — 248 с.
5. **Ильин, А. М.** Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра / А. М. Ильин, А. А. Ершов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 116–126.
6. **Арнольд, В. И.** Теория катастроф / В. И. Арнольд. — 2-е изд., доп. — М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983. — 80 с.
7. **Брекер, Т.** Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брекер, Л. Ландер. — М. : Платон, 1997. — 208 с.

*Поступила в редакцию 11.11.2014*
*После переработки 10.02.2016*

**Сведения об авторе**

**Ершов Александр Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ale10919@yandex.ru.

*Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 35–42.*

## ASYMPTOTICS OF THREE-DIMENSIONAL INTEGRALS SINGULARLY DEPENDING ON A SMALL PARAMETER

**A. A. Ershov**

*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
*ale10919@yandex.ru*

Asymptotics of some three-dimensional integrals singularly depending on a small parameter is constructed. The integrand denominator of the considered integrals is a sum of a small parameter and nonnegative function vanishing on three not intersecting surfaces. Such form integrals diverge as a small parameter tends to zero. The method of singularities subtraction and the circle method are applied.

**Keywords:** *asymptotic expansion, small parameter, integral, singularities subtraction method, circle method.*

## References

1. **Fedoryuk M.V.** *Asimptotika, integraly i ryady* [Asymptotics, integrals and series]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (In Russ.).
2. **Riekstynsh E.Ya.** *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integrals]. Riga, Zinatne Publ., 1974. Vol. 1. 392 p.; Vol. 2. 464 p. (In Russ.).
3. **Riekstynsh E.Ya.** *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integrals]. Riga, Zinatne Publ., 1981. Vol. 3. 370 p. (In Russ.).
4. **Il'in A.M., Danilin A.R.** *Asimptoticheskiye metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
5. **Il'in A.M., Ershov A.A.** Asymptotics of two-dimensional integrals dependind singularly on a small parameter. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 131–142.
6. **Arnold V.I.** *Teoriya katastrof* [Catastrophe theory]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 1983. 80 p. (In Russ.).
7. **Bröcker Th., Lander L.** *Differentiable Germs and Catastrophes.* Cambridge University Press, 1975. 188 p.

*Article received 11.11.2014*
*Corrections received 10.02.2016*