Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 63–93.

УДК 517.444

ОБЗОР ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА — ЭРДЕЙИ

С. М. Ситник

Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия
mathsms@yandex.ru

Данная работа носит обзорный характер. Во вводном первом разделе излагаются исторические и приоритетные сведения. Используется предложенная автором удобная классификация различных классов операторов Бушмана — Эрдейи. На основе этой классификации во втором разделе изложены основные результаты автора по операторам преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода, включая операторы нулевого порядка гладкости, в третьем разделе — по операторам преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода, в четвёртом — по операторам преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода, а также по унитарным операторам преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. В заключительном разделе приведены приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи различных классов.

Ключевые слова: *операторы преобразования, интегральное преобразование, операторы Бушмана — Эрдейи, операторы Эрдейи — Кобера, операторы Сонина — Пуассона, дробный интеграл.*

Введение

Теория операторов преобразования — это существенное обобщение теории подобия конечномерных матриц. Дадим сразу основное определение.

Определение 1. Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется *оператором преобразования* (ОП, сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator), если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение

$$TA = BT. \tag{1}$$

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры. Но ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, так как сплетаемые операторы, как правило, являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Так что спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило, не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Так бывает, например, в теории преобразований Дарбу, предметом которой является нахождение дифференциальных операторов преобразования (подстановок или замен) между парой дифференциальных же операторов, — в этом случае все три рассматриваемых оператора являются неограниченными в естественных пространствах. При этом теория преобразований Дарбу как соответствующий раздел теории дифференциальных уравнений также вписывается в общую схему теории операторов преобразования при её расширенном понимании. Кроме того, можно рассматривать операторы преобразования не только для пары дифференциальных операторов. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро-дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно-дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Возможность того, чтобы исходная и преобразованная функции принадлежали различным пространствам, что принято подчёркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле Петцваля), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича — Лебедева, Мелера — Фока, Станковича и другие. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г. А. Гринберга.

В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния встречается специальный класс ОП — волновые операторы.

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдодифференциальными операторами или дифференциальными операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных свёрток, особенно свёртки Берга — Димовски. Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бёрчнела и Чонди (J. L. Burchnall, T. W. Chaundy). Теория ОП также связана с вопросами факторизации дифференциальных операторов.

Отдельный класс ОП составляют преобразования, которые для одного и того же уравнения связывают краевые условия различных типов, например Неймана и Дирихле.

Как же обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B. Тогда, если существует ОП (1), то часто удаётся перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A, то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu, g = Tf$. Поэтому если второе уравнение с оператором B является более простым и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям полностью посвящены монографии [1–6], а также подробный обзор автора [7]. Методы теории ОП составляют, кроме того, существенные части монографий [8–21], сейчас этот список можно дополнить почти до 100 монографий.

Следует специально отметить монографию Д. К. Фаге и Н. И. Нагнибида [4]. В ней практически никак не отражены уже известные к тому времени результаты теории ОП, что полностью компенсируется изложением в основном собственных результатов авторов по одной из самых трудных задач теории ОП — их построению для дифференциальных операторов высоких порядков с переменными коэффициентами. Кроме того, в эту монографию вошли и многие другие вопросы: решение задачи об операторах, коммутирующих с производными в пространствах аналитических функций (включая исправление ошибочных результатов Дельсарта и Лионса), создание законченной теории разрешимости для уравнения Бианки, теория операторно-аналитических функций (первоначально возникшая в работах В. А. Марченко), исследование операторов дифференцирования, интегрирования и корней из них в пространствах аналитических функций.

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин *transmutation*, восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, похожий термин transformation при этом закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля и другими, подобными им. Приведём дословную цитату из [3]: "Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et. al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems "magical" at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation".

В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференицрования. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом её приложений. Методы операторов преобразования применяются в теории обратных задач, определяя обобщённое преобразование Фурье, спектральную функцию и решения знаменитого уравнения Левитана; в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко; в спектральной теории получаются известные формулы следов и асимптотика спектральной функции; оценки ядер операторов преобразования отвечают за устойчивость обратных задач и задач рассеяния; в теории нелинейных дифференциальных уравнений метод Лакса использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов. Определёнными разновидностями операторов преобразования являются части теорий обобщённых аналитических функций, операторов обобщённого сдвига и обобщённых операторных свёрток, метод преобразования Дарбу. В теории уравнений с частными производными методы операторов преобразования применяются для построения явных выражений для решений возмущённых задач через решения невозмущённых, при изучении сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов, задач для решений с существенными особенностями на части границы во внутренних или угловых точках, для оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений. Теория операторов преобразования позволяет дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах, в том числе различных операторов дробного интегродифференцирования. В теории функций найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди, расширению теории Пэли — Винера, построению различных конструкций обобщённого сдвига и основанным на них обобщённых вариантов гармонического анализа. Методы теории операторов преобразования с успехом применяются во многих прикладных задачах: оценках решений Йоста в квантовой теории рассеяния, обратных задачах, исследовании системы Дирака и других матричных систем дифференциальных уравнений, операторных и дифференциально-операторных уравнениях, различных интегральных уравнениях, в том числе со специальными функциями в ядрах, теории вероятностей и случайных процессов, линейном стохастическом оценивании, фильтрации, стохастических случайных уравнениях, обратных задачах геофизики и трансзвуковой газодинамики. Кроме уже известных для метода Лакса и преобразований Дарбу всё время увеличивается число новых приложений ОП к нелинейным дифференциальным уравнениям и исследованию солитонов.

Фактически современная теория операторов преобразования возникла из двух примеров, ставших классическими [7]. Первым примером являются ОП, переводящие оператор Штурма — Лиувилля с некоторым потенциалом $q(x)$ во вторую производную:

$$T(D^2\, y(x) + q(x)y(x)) = D^2\,(Ty(x)), \quad D^2\, y(x) = y''(x),$$

при некотором выборе естественных краевых условий.

Второй пример — это задача о преобразовании оператора Бесселя во вторую производную:

$$T\,(B_\nu)\, f = \left(D^2\right) Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x} D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

На этом пути возникли ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи и их многочисленные обобщения. Такие операторы преобразования находят многочисленные приложения при изучении одного класса уравнений с частными производными с особенностями, типичным представителем которого является B-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu, x_k} u(x_1, \ldots, x_n) = f, \tag{2}$$

аналогично рассматриваются B-гиперболические и B-параболические уравнения. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна и в трудах отечественных математиков И. Е. Егорова, Я. И. Житомирского, Л. Д. Кудрявцева, П. И. Лизоркина, М. И. Матийчука, Л. Г. Михайлова, М. Н. Олевского, М. М. Смирнова, С. А. Терсенова, Хе Кан Чера, А. И. Янушаускаса и других.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком И.А. Киприяновым и его учениками Л. А. Ивановым, А. В. Рыжковым, В. В. Катраховым, В. П. Архиповым, А. Н. Байдаковым, Б. М. Богачёвым, А. Л. Бродским, Г. А. Виноградовой, В. А. Зайцевым, Ю. В. Засориным, Г. М. Каганом, А. А. Катраховой, Н. И. Киприяновой, В. И. Кононенко, М. И. Ключанцевым, А. А. Куликовым, А. А. Лариным, М. А. Лейзиным, Л. Н. Ляховым, А. Б. Муравником, И. П. Половинкиным, А. Ю. Сазоновым, С. М. Ситником, В. П. Шацким, В. Я. Ярославцевой; основные результаты этого направления представлены в [15]. Для описания классов решений соответствующих уравнений И. А. Киприяновым были введены и изучены функциональные пространства [22], позднее названные его именем.

В этом направлении работал В. В. Катрахов, сейчас уравнения с оператором Бесселя и связанные с ними вопросы изучают А. В. Глушак, А. Б. Муравник, Э. Л. Шишкина, В. С. Гулиев, Л. Н. Ляхов со своими коллегами и учениками. Задачи для операторно-дифференциальных (абстрактных) уравнений вида (2), берущие начало в известной монографии [9], рассматривали А. В. Глушак, С. Б. Шмулевич, В. Д. Репников и другие.

Операторы преобразования являются одним из основных инструментов изучения этого класса уравнений. Они используются для получения формул для решений, фундаментальных решений, описания особенностей, постановок краевых задач и в других вопросах.

Сделаем одно техническое замечание. Каждый конкретный результат о том, что некоторый ОП сплетает пару преобразуемых операторов, должен сопровождаться аккуратным указанием всех областей определения операторов и классов рассматриваемых функций. Для краткости эта конкретика в данной статье указывается не для каждого результата, хотя для каждой теоремы такие точные условия получены. Кроме того, мы используем в некоторых случаях для краткости термин «оператор» вместо более точного «дифференциальное выражение».

1. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи

Название *«операторы Бушмана — Эрдейи»* было предложено автором, в последнее время оно стало общепринятым. Интегральные уравнения с подобными операторами рассматривались с середины 1950-х годов, автором было впервые показано, что операторы Бушмана — Эрдейи являются операторами преобразования для дифференциального выражения Бесселя и изучены их специальные свойства именно как операторов преобразования. Частными случаями операторов преобразования Бушмана — Эрдейи являются известные классические операторы преобразования Сонина и Пуассона, а их обобщениями являются операторы преобразования Сонина — Димовски и Пуассона — Димовски для гипербесселевых уравнений и функций.

Операторы Бушмана — Эрдейи имеют многочисленные модификации. Автором предложена удобная классификация их различных вариантов. Операторы Бушмана — Эрдейи первого рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра первого рода. Их предельным случаем являются операторы нулевого порядка гладкости, играющие важную роль в различных приложениях. Операторы Бушмана — Эрдейи второго рода содержат ядра, выражающиеся через функции Лежандра второго рода. Комбинация операторов первого и второго родов приводит к операторам Бушмана — Эрдейи третьего рода. При специальном выборе параметров они сводятся к унитарным операторам преобразования, которые автор назвал унитарными операторами преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова в честь В. В. Катрахова, начавшего их изучение.

Изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х годах в работах Р. Бушмана и А. Эрдейи [23–26]. Операторы Бушмана — Эрдейи или их аналоги изучались также в работах T. P. Higgins, Ta Li, E. R. Love,

G. M. Habibullah, K. N. Srivastava, Динь Хоанг Ань, В. И. Смирнова, Н. А. Вирченко, И. Федотовой, А. А. Килбаса, О. В. Скоромник и др. При этом изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения. Основные результаты указанного периода изложены в монографии [27], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается, за исключением одного набора формул композиции. Некоторые результаты для особого выбора пределов были добавлены в английское расширенное издание монографии [27].

Наиболее полное изучение операторов Бушмана — Эрдейи, на наш взгляд, было проведено в работах автора в 1980–90-е годы [28–31] и затем продолжено в [32–43] и ряде других работ. При этом необходимо отметить, что роль операторов Бушмана — Эрдейи как ОП до работ [28–31] вообще ранее нигде не отмечалась и не рассматривалась.

Из работ, в которых изучались операторы Бушмана — Эрдейи как интегральные операторы, отметим работы Н. А. Вирченко, А. А. Килбаса и их учеников. Так, в работах А. А. Килбаса и О. В. Скоромник [44; 45] рассматривается действие операторов Бушмана — Эрдейи в весовых пространствах Лебега, а также многомерные обобщения в виде интегралов по пирамидальным областям. В монографии Н. А. Вирченко и И. Федотовой [46] вводятся некоторые обобщения стандартных функций Лежандра, а затем рассматриваются напоминающие операторы Бушмана — Эрдейи, но не содержащие их как частные случаи, интегральные операторы с введёнными функциями в ядрах на всей положительной полуоси (операторы Бушмана — Эрдейи определены на части положительной полуоси).

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи по радиальной переменной, при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями внутри области, доказательств вложения пространств И. А. Киприянова в весовые пространства С. Л. Соболева, установлении связей между операторами преобразования и волновыми операторами теории рассеяния, обобщении классических интегральных представлений Сонина и Пуассона и операторов преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта.

2. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода

2.1. Операторы преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта

Рассмотрим самый известный, наверное, класс ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T\left(B_\nu\right) f = \left(D^2\right) T f, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x} D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}.$$

Определение 2. *ОП Пуассона* называется выражение

$$P_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu x^{2\nu}} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}. \tag{3}$$

ОП Сонина называется выражение

$$S_\nu f = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)}\frac{d}{dx}\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\nu-\frac{1}{2}} t^{2\nu+1} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Операторы (3), (4) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu.$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$. Исторически более точно называть введённые операторы именами Сонина — Пуассона — Дельсарта. Большинство математиков узнали об этих операторах из статьи Б. М. Левитана [8].

Важным обобщением операторов Сонина — Пуассона — Дельсарта являются ОП для гипербесселевых функций. Теория таких функций была первоначально заложена в работах Куммера и Делерю. Полное исследование гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений для них и соответствующих операторов преобразования было исчерпывающе проведено в работах И. Димовски и его учеников [10]. Соответствующие ОП получили в литературе названия ОП Сонина — Димовски и Пуассона — Димовски, они также изучались в работах ученицы И. Димовски — В. Киряковой [11]. В теории гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразования для них центральную роль играет знаменитое интегральное преобразование Обрешкова, введённое болгарским математиком Н. Обрешковым (см. [11]). Это преобразование, ядро которого выражается в общем случае через G-функцию Майера, является одновременным обобщением преобразований Лапласа, Меллина, синус- и косинус-преобразований Фурье, Ханкеля, Майера и других классических интегральных преобразований. Различные формы гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразований для них, а также частные случаи преобразования Обрешкова многократно впоследствии переоткрывались, этот процесс продолжается и до настоящего времени. По мнению автора, преобразование Обрешкова, наряду с преобразованиями Фурье, Меллина, Лапласа, Станковича относится к небольшому числу фундаментальных преобразований Анализа, из которых, как из кирпичиков, складываются многие другие преобразования, а также основанные на них конструкции и приложения.

2.2. Определения и основные свойства

Теперь перейдём к описанию основных свойств операторов преобразования Бушмана — Эрдейи. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта и их сопряжённых, операторов дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера, а также интегральных преобразований Мелера — Фока.

Определение 3. *Операторами Бушмана — Эрдейи первого рода* называются интегральные операторы

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)d\,t, \tag{5}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)d\,t, \tag{6}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)d\,t, \tag{7}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)d\,t. \tag{8}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода, $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ — та же функция на разрезе $-1 \le t \le 1$, $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0, x \to \infty$. Параметры μ, ν — комплексные числа, $\mathrm{Re}\ \mu < 1$, можно ограничиться значениями $\mathrm{Re}\ \nu \ge -1/2$.

Приведём основные результаты, преимущественно следуя в изложении работам [28; 31], а также [7; 32]. Все рассмотрения ниже ведутся на полуоси. Поэтому будем обозначать через L_2 пространство $L_2(0,\infty)$, через $L_{2,k}$ — весовое пространство $L_{2,k}(0,\infty)$ со степенным весом и нормой

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2k+1}\, dx.$$

$\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных, $\mathbb{N}_0$ — неотрицательных целых, $\mathbb{Z}$ — целых и $\mathbb{R}$ — действительных чисел.

Вначале распространим определение 3 на случай значения параметра $\mu = 1$.

Определение 4. Введём в рассмотрение при $\mu = 1$ *операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости* по формулам

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx}\int_0^x P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{9}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{10}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu\left(\frac{t}{x}\right) \left(-\frac{df(t)}{dt}\right) dt, \tag{11}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = -\frac{d}{dx}\int_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{12}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Теорема 1. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана — Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана — Лиувилля и Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости:*

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f,\ \ B_{-}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{-}^{\nu}\ I_{-}^{1-\mu} f,$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^{\nu}\ I_{0+}^{1-\mu} f,\ \ E_{-}^{\nu,\mu} f = I_{-}^{1-\mu}\ {}_1S_{-}^{\nu} f.$$

Эти формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ. Мы докажем, что операторы (9)–(12) являются изоморфизмами пространств $L_2(0,\infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (5)–(8) по действию в пространствах типа L_2 в определённом смысле подобны операторам дробного интегродиффенцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$. Далее операторы Бушмана — Эрдейи будут доопределены при всех значениях μ.

Исходя из этого, введём следующее определение.

Определение 5. Число $\rho = 1 - Re\,\mu$ назовём *порядком гладкости операторов Бушмана — Эрдейи* (5)–(8).

Таким образом, при $\rho > 0$ (т. е. при $Re\,\mu > 1$) операторы Бушмана — Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (т. е. при $Re\,\mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0,\infty)$. Операторы (9)–(12), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана — Эрдейи первого рода (5)–(8) с функцией Лежандра I рода в ядре. При некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана — Эрдейи сводятся к более простым. Так, при значениях $\mu=-\nu$ или $\mu=\nu+2$ они являются операторами Эрдейи — Кобера; при $\nu=0$ — операторами дробного интегродифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_{-}^{1-\mu}$; при $\nu=-\frac{1}{2}$, $\mu=0$ или $\mu=1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu=0$, $x=1$, $v=it-\frac{1}{2}$ оператор $B_{-}^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличается от преобразования Мелера — Фока.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx}-\frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx}+\frac{\nu}{x}\right), \tag{13}$$

который при $\nu\in\mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливает теорема 2.

Теорема 2. *Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетает L_ν и вторую производную:*

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \quad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \tag{14}$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2}x^{\nu+1/2}, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)}Y_{\nu-1/2}.$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетает оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu.$$

Теорема 3. *Пусть $\operatorname{Re}\mu\le 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu,\mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет на подходящих функциях соотношению* (14).

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана — Эрдейи. При этом $E_{-}^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_{-}^{\nu,\mu}$ — операторами типа Пуассона.

Теперь сделаем важное замечание. Из приведённой теоремы следует, что ОП Бушмана — Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана — Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведённые функции Бесселя, а другая половина — наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона и представляют существенный интерес. Ещё раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана — Эрдейи и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Перейдём к вопросу о различных факторизациях операторов Бушмана — Эрдейи через операторы Эрдейи — Кобера и дробные интегралы Римана — Лиувилля.

Приведём список основных операторов дробного интегродифференцирования: Римана — Лиувилля, Эрдейи — Кобера, дробного интеграла по произвольной функции $g(x)$ (см. [27]):

$$I_{0+,x}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$
$$I_{-,x}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}_{0+,2,\eta}f &= \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1} t^{2\eta+1}f(t)d\,t,\\
I^{\alpha}_{-,2,\eta}f &= \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \left(t^2-x^2\right)^{\alpha-1} t^{1-2(\alpha+\eta)}f(t)d\,t,\\
I^{\alpha}_{0+,g}f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \left(g(x)-g(t)\right)^{\alpha-1} g'(t)f(t)d\,t,\\
I^{\alpha}_{-,g}f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \left(g(t)-g(x)\right)^{\alpha-1} g'(t)f(t)d\,t,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

во всех случаях предполагается, что $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, на оставшиеся значения α формулы также без труда продолжаются [27]. При этом обычные дробные интегралы получаются при выборе в (15) $g(x)=x$, Эрдейи — Кобера при $g(x)=x^2$, Адамара при $g(x)=\ln x$.

Теорема 4. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана — Эрдейи первого рода через операторы дробного интегродифференцирования и Эрдейи — Кобера:*

$$
B^{\nu,\mu}_{0+} = I^{\nu+1-\mu}_{0+} I^{-(\nu+1)}_{0+;\,2,\,\nu+\frac12}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \quad E^{\nu,\mu}_{0+} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I^{\nu+1}_{0+;\,2,\,-\frac12} I^{-(\nu+\mu)}_{0+},
$$

$$
B^{\nu,\mu}_{-} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I^{-(\nu+1)}_{-;\,2,\,\nu+1} I^{\nu-\mu+2}_{-}, \quad E^{\nu,\mu}_{-} = I^{-(\nu+\mu)}_{-} I^{\nu+1}_{-;\,2,\,0}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}.
$$

Частными случаями введённых операторов являются и определённые выше операторы преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта.

Теперь рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости, введённых по формулам (9). Подобный им оператор был построен В. В. Катраховым путём домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который бы действовал в одном пространстве типа $L_2(0,\infty)$.

Напомним [47], что преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция $g(s)$, которая определяется по формуле

$$
g(s) = Mf(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,dx.
$$

Определим также свёртку Меллина

$$
(f_1 * f_2)(x) = \int_0^\infty f_1\left(\frac{x}{y}\right) f_2(y)\,\frac{dy}{y},
$$

при этом оператор свёртки с ядром K действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор:

$$
\begin{gathered}
MAf(s) = \int_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,\frac{dy}{y} = MK * f(s) = m_A(s) Mf(s),\\
m_A(s) = MK(s).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Заметим, что преобразование Меллина является обобщённым преобразованием Фурье на полуоси по мере Хаара $\frac{dy}{y}$ [48]. Его роль велика в теории специальных функций, например, гамма-функция является преобразованием Меллина экспоненты. С преобразованием Меллина связан важный прорыв в 1970-х годах, когда в основном усилиями О. И. Маричева была полностью доказана и приспособлена для нужд вычисления интегралов известная теорема Д. Л. Слейтер, позволяющая для большинства образов преобразований Меллина восстановить оригинал в явном виде по простому алгоритму через гипергеометрические функции [47]. Эта теорема стала основой универсального мощного метода вычисления интегралов, который позволил решить многие задачи в теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также воплотился в передовые технологии символьного интегрирования пакета MATHEMATICA фирмы Wolfram Research.

Теорема 5. *Оператор Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости $B_{0+}^{\nu,1}$, определённый по формуле* (9)*, действует в образах преобразования Меллина как свёртка* (16) *с мультипликатором*

$$m(s)=\frac{\Gamma(-s/2+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-s/2-\frac{\nu}{2}+1/2)}{\Gamma(1/2-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}$$

при условии $\operatorname{Re} s<\min(2+\operatorname{Re}\nu,1-\operatorname{Re}\nu)$*. Для его нормы, которая является периодической функцией по* ν*, справедлива формула*

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2}=\frac{1}{\min(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu})}.$$

Оператор ограничен в $L_2(0,\infty)$ *при* $\nu\neq 2k+1/2$*,* $k\in\mathbb{Z}$ *и неограничен при выполнении условия* $\nu=2k+1/2$*,* $k\in\mathbb{Z}$*.*

Приведём формулы для мультипликаторов всех операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Теорема 6. *Операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости действуют в образах преобразования Меллина как свёртки по формуле* (16)*. Для их мультипликаторов справедливы формулы*

$$\begin{aligned}
m_{{}_1S_{0+}^{\nu}}(s)&=\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac12)}{\Gamma(\frac12-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}=\\
&=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac12)\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)}{\Gamma(1-s)},\ \operatorname{Re} s<\min(2+\operatorname{Re}\nu,1-\operatorname{Re}\nu);\\
m_{{}_1P_{0+}^{\nu}}(s)&=\frac{\Gamma(\frac12-\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac12)},\ \operatorname{Re} s<1;\\
m_{{}_1P_{-}^{\nu}}(s)&=\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1)\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac12)},\ \operatorname{Re} s>\max(\operatorname{Re}\nu,-1-\operatorname{Re}\nu); && (17)\\
m_{{}_1S_{-}^{\nu}}(s)&=\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac12)}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac12)\Gamma(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2})},\ \operatorname{Re} s>0. && (18)
\end{aligned}$$

Справедливы следующие формулы для норм операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2*:*

$$\|{}_1S_{0+}^{\nu}\|=\|{}_1P_{-}^{\nu}\|=1/\min(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}),$$
$$\|{}_1P_{0+}^{\nu}\|=\|{}_1S_{-}^{\nu}\|=\max(1,\sqrt{1-\sin\pi\nu}).$$

Аналогичные результаты получены в [28–32] и для пространств со степенным весом.

Следствие 1. *Нормы операторов* (9)–(12) *периодичны по* ν *с периодом 2, т. е.* $\|X^\nu\| = \|X^{\nu+2}\|$, *где* X^ν *— любой из операторов* (9)–(12).

Следствие 2. *Нормы операторов* ${}_1S^\nu_{0+}$, ${}_1P^\nu_-$ *неограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не меньше 1. Если* $\sin \pi\nu \leq 0$, *то эти нормы равны 1. Указанные операторы неограничены в* L_2 *тогда и только тогда, когда* $\sin \pi\nu = 1$ *(или* $\nu = (2k) + 1/2,\ k \in \mathbb{Z}$*).*

Следствие 3. *Нормы операторов* ${}_1P^\nu_{0+}$, ${}_1S^\nu_-$ *ограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не больше* $\sqrt{2}$. *Все эти операторы ограничены в* L_2 *при всех* ν. *Если* $\sin \pi\nu \geq 0$, *то их* L_2*-норма равна 1. Максимальное значение нормы, равное* $\sqrt{2}$, *достигается тогда и только тогда, когда* $\sin \pi\nu = -1$ *(или* $\nu = -1/2 + (2k)$, $k \in \mathbb{Z}$*).*

Важнейшим свойством операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν. Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения.

Теорема 7. *Для унитарности в* L_2 *операторов* (9)–(12) *необходимо и достаточно, чтобы число* ν *было целым. В этом случае пары операторов* $({}_1S^\nu_{0+}, {}_1P^\nu_-)$ *и* $({}_1S^\nu_-, {}_1P^\nu_{0+})$ *взаимно обратны.*

Перед формулировкой одного частного случая предположим, что операторы (9)–(12) заданы на таких функциях $f(x)$, что возможно выполнить внешнее дифференцирование или под знаком интеграла — интегрирование по частям (для этого достаточно предположить, что $xf(x) \to 0$ при $x \to 0$). Тогда при $\nu = 1$

$$ {}_1P^1_{0+}f = (I - H_1)f, \quad {}_1S^1_-f = (I - H_2)f, \tag{19}$$

где $H_1,\ H_2$ — операторы Харди,

$$H_1 f = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)dy, \quad H_2 f = \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy,$$

I — единичный оператор.

Следствие 4. *Операторы* (19) *являются унитарными взаимно обратными в* L_2 *операторами. Они сплетают дифференциальные выражения* d^2/dx^2 *и* $d^2/dx^2 - 2/x^2$.

Унитарность в L_2 сдвинутых операторов Харди (19) известна; см. [49]. Ниже в приложениях описаны новые подобные унитарные операторы.

Далее перечислим некоторые общие свойства операторов, которые действуют по формуле (16) как умножение на некоторый мультипликатор в образах преобразования Меллина и одновременно являются сплетающими для второй производной и оператора углового момента.

Теорема 8. *Пусть оператор* S_ν *действует по формулам* (16) *и* (14). *Тогда*

а) его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению

$$m(s) = m(s-2)\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2) - \nu(\nu+1)};$$

б) если функция $p(s)$ периодична с периодом 2 (т. е. $p(s) = p(s-2)$), то функция $p(s)m(s)$ является мультипликатором нового оператора преобразования S_2^ν, опять же сплетающего L_ν и вторую производную по правилу (14).

Последняя теорема ещё раз показывает, насколько полезно изучение ОП в терминах мультипликаторов преобразования Меллина.

Определим преобразование Стилтьеса (см., например, [27]) по формуле

$$(Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t} dt.$$

Этот оператор также действует по формуле (16) с мультипликатором $p(s) = \pi / sin(\pi s)$ и ограничен в L_2. Очевидно, что $p(s) = p(s-2)$. Поэтому из теоремы 8 следует, что композиция преобразования Стилтьеса с ограниченными сплетающими операторами (9)–(12) снова является оператором преобразования того же типа, ограниченным в L_2.

На этом получены многочисленные новые явные семейства ОП, ядра которых выражаются через различные специальные функции.

3. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана — Эрдейи второго рода.

Определение 5. Введём в рассмотрение новую пару операторов Бушмана — Эрдейи с функциями Лежандра второго рода в ядре:

$$ {}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy + \int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy\right), \quad (20)$$

$$ {}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy - \int_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy\right). \quad (21)$$

Эти операторы являются аналогами операторов первого рода нулевого порядка гладкости. При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (20) будет типа Сонина, (21) — типа Пуассона).

Теорема 9. *Операторы* (20), (21) *представимы в виде* (16) *с мультипликаторами*

$$m_{{}_2S^\nu}(s) = p(s) m_{{}_1S_-^\nu}(s), \quad m_{{}_2P^\nu}(s) = \frac{1}{p(s)} m_{{}_1P_-^\nu}(s),$$

где мультипликаторы операторов ${}_1S_-^\nu$, ${}_1P_-^\nu$ определены формулами (17), (18), *а функция $p(s)$ (с периодом 2) имеет вид*

$$p(s) = \frac{\sin \pi\nu + \cos \pi s}{\sin \pi\nu - \sin \pi s}.$$

Теорема 10. *Справедливы формулы для норм*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}), \quad \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\nu}).$$

Следствие 5. *Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν. Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin \pi\nu = -1$.*

Теорема 11. *Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.*

Теорема 12. *Пусть $\nu = i\beta + 1/2$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \sqrt{1 + \operatorname{ch}\pi\beta}, \quad \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1.$$

Теорема 13. *Справедливы представления*

$${}_2S^0 f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y}{x^2-y^2} f(y)\,dy, \quad {}_2S^{-1} f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-y^2} f(y)\,dy.$$

Таким образом, в этом случае оператор ${}_2S^\nu$ сводится к паре известных преобразований Гильберта на полуоси [27].

Для операторов второго рода введём также более общие аналоги операторов преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода с двумя параметрами по формуле

$${}_2S^{\nu,\mu} f = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^x (x^2+y^2)^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\mu\pi i} Q_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \int\limits_x^\infty (y^2+x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{Q}_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right), \tag{22}$$

где $Q_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра второго рода, $\mathbb{Q}_\nu^\mu(z)$ — значение этой функции на разрезе, $\operatorname{Re}\nu < 1$. Второй подобный оператор определяется как формально сопряжённый в $L_2(0,\infty)$ к (22).

Теорема 14. *На функциях из $C_0^\infty(0,\infty)$ оператор (22) определён и действует по формуле*

$$M[{}_2S^\nu](s) = m(s)\cdot M[x^{1-\mu} f](s),$$

$$m(s) = 2^{\mu-1}\left(\frac{\cos\pi(\mu-s) - \cos\pi\nu}{\sin\pi(\mu-s) - \sin\pi\nu}\right)\left(\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}))}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1-\nu-\mu}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+1+\frac{\nu-\mu}{2})}\right).$$

4. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода

4.1. Операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова

Перейдём к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν. Такие операторы определяются по формулам

$$S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\, {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\, {}_1S_-^\nu f, \tag{23}$$

$$P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\, {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\, {}_1P_-^\nu f. \tag{24}$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана — Эрдейи 1-го и 2-го рода нулевого порядка гладкости.

Их можно отнести к операторам Бушмана — Эрдейи третьего рода (см. ниже). В интегральной форме эти операторы имеют вид

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy + \tag{25}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\right),$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\frac{d}{dy}f(y)\,dy - \tag{26}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right).$$

Теорема 15. *Операторы* (23)–(24), (25)–(26) *при всех* $\nu \in \mathbb{R}$ *являются унитарными, взаимно сопряжёнными и обратными в* L_2. *Они являются сплетающими и действуют по формулам* (13). *При этом* S_U^ν *является оператором типа Сонина* (*Сонина — Катрахова*), *а* P_U^ν *— типа Пуассона* (*Пуассона — Катрахова*).

ОП в форме, подобной (25)–(26), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 году В. В. Катраховым. Поэтому автор предлагает названия: операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено автором, кроме того, их удаётся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом [29; 34; 36]. При этом основными становятся наиболее простые формулы факторизации вида (23)–(24). На этом пути построение подобных операторов перестаёт быть специальным искусным приёмом, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом.

4.2. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода с произвольной весовой функцией

Рассмотрим синус- и косинус-преобразования Фурье и обратные к ним

$$F_c f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(y)\cos(ty)\,dy, \quad F_c^{-1} = F_c, \tag{27}$$

$$F_s f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(y)\sin(ty)\,dy, \quad F_s^{-1} = F_s. \tag{28}$$

Определим преобразование Фурье — Бесселя по формулам

$$F_\nu f = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^\infty f(y)\,j_\nu(ty)\,y^{2\nu+1}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y)\frac{J_\nu(ty)}{(ty)^\nu}\,y^{2\nu+1}\,dy = \frac{1}{t^\nu}\int\limits_0^\infty f(y)J_\nu(ty)\,y^{\nu+1}\,dy, \tag{29}$$

$$F_\nu^{-1} f = \frac{1}{(y)^\nu} \int\limits_0^\infty f(t) J_\nu(yt)\, t^{\nu+1}\, dt. \tag{30}$$

Здесь $J_\nu(\cdot)$ — обычная [50], а $j_\nu(\cdot)$ — нормированная [15] функции Бесселя. Операторы (27), (28) самосопряжённые унитарные в $L_2(0,\infty)$. Операторы (29), (30) самосопряжённые унитарные в $L_{2,\nu}(0,\infty)$.

Определим первую пару операторов преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода на подходящих функциях с произвольной весовой функцией по формулам

$$S_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_c^{-1} \left(\frac{1}{\varphi(t)} F_\nu \right), \quad P_{\nu,c}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1} \left(\varphi(t) F_c \right)$$

и вторую пару по формулам

$$S_{\nu,s}^{(\varphi)} = F_s^{-1} \left(\frac{1}{\varphi(t)} F_\nu \right), \quad P_{\nu,s}^{(\varphi)} = F_\nu^{-1} \left(\varphi(t) F_s \right),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная весовая функция. Введённые операторы преобразования на подходящих функциях сплетают B_ν и D^2, можно дать их интегральное представление.

Теорема 16. *Определим операторы преобразования, сплетающие B_ν и D^2, по формулам*

$$S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} = F^{-1}_{\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} \left(\frac{1}{\varphi(t)} F_\nu \right), \quad P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} = F_\nu^{-1} \left(\varphi(t) F_{\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} \right).$$

Тогда для оператора типа Сонина справедливо представление (формальное)

$$\left(S^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} f \right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty K(x,y) f(y)\, dy,$$

где

$$K(x,y) = y^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \frac{\left\{\begin{matrix} \sin(xt) \\ \cos(xt) \end{matrix}\right\}}{\varphi(t)\, t^\nu} J_\nu(yt) dt.$$

Представление для оператора типа Пуассона имеет вид

$$\left(P^{(\varphi)}_{\nu,\left\{\begin{smallmatrix} s \\ c \end{smallmatrix}\right\}} f \right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty G(x,y) f(y)\, dy,$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{x^\nu} \int\limits_0^\infty \varphi(t)\, t^{\nu+1} \left\{\begin{matrix} \sin(yt) \\ \cos(yt) \end{matrix}\right\} J_\nu(xt) dt.$$

Частным случаем введённых операторов третьего рода являются определённые выше унитарные операторы Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова, которые получаются при выборе весовой функции $\varphi(t)$ в виде некоторой зависящей от параметра ν степени. Достаточно полная теория и приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода планируются автором к публикации в отдельной статье.

5. Некоторые приложения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи

В этом разделе приведём приложения введённых операторов. По необходимости мы ограничиваемся только формулировками основных результатов или даже только простым перечислением фактов с минимальным набором ссылок, некоторые приложения только намечены, их исследование пока подробно не проводилось.

5.1. Оценки норм в пространствах И. А. Киприянова

Рассмотрим множество функций $\mathbb{D}(0,\infty)$. Если $f(x) \in \mathbb{D}(0,\infty)$, то $f(x) \in C^\infty(0,\infty)$, $f(x)$ финитна на бесконечности. На этом множестве функций введём полунормы

$$\|f\|_{h_2^\alpha} = \|D_-^\alpha f\|_{L_2(0,\infty)}, \tag{31}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} = \left\| x^\alpha \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\alpha f \right\|_{L_2(0,\infty)}, \tag{32}$$

где D_-^α — дробная производная Римана — Лиувилля, оператор в (32) определяется по формуле

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\beta = 2^\beta I_{-;\,2,\,0}^{-\beta} x^{-2\beta}, \tag{33}$$

$I_{-;2,\,0}^{-\beta}$ — оператор Эрдейи — Кобера, α — произвольное действительное число. При $\beta = n \in \mathbb{N}_0$ выражение (33) понимается в обычном смысле, что согласуется с определением выше.

Теорема 17. *Пусть $f(x) \in \mathbb{D}(0,\infty)$. Тогда справедливы тождества:*

$$D_-^\alpha f = {}_1S_-^{\alpha-1} x^\alpha \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\alpha f, \quad x^\alpha \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\alpha f = {}_1P_-^{\alpha-1} D_-^\alpha f.$$

Таким образом, операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости первого рода осуществляют связь между дифференциальными операторами (при $\alpha \in \mathbb{N}$) из определений полунорм (31) и (32).

Теорема 18. *Пусть $f(x) \in \mathbb{D}(0,\infty)$. Тогда справедливы неравенства между полунормами*

$$\|f\|_{h_2^\alpha} \le \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha}) \|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha}, \tag{34}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} \le \frac{1}{\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})} \|f\|_{h_2^\alpha}, \tag{35}$$

где α — любое действительное число, $\alpha \ne -\frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Постоянные в неравенствах (34), (35) не меньше единицы, что будет далее использовано. В случае $\sin\pi\alpha = -1$ или $\alpha = -\frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, оценка (35) не имеет места.

Введём на $\mathbb{D}(0,\infty)$ соболевскую норму

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{h_2^\alpha}. \tag{36}$$

Введём также другую норму —

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha}. \tag{37}$$

Пространства W_2^α, $\widehat{W}_2^\alpha$ определим как замыкания $D(0,\infty)$ по нормам (36) и (37) соответственно.

Теорема 19. 1) *При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ пространство $\widehat{W}_2^\alpha$ непрерывно вложено в W_2^α, причём*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} \le A_1 \|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha}, \tag{38}$$

где $A_1 = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})$.

2) *Пусть $\sin\pi\alpha \ne -1$ или $\alpha \ne -\frac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Тогда справедливо обратное вложение W_2^α в $\widehat{W}_2^\alpha$, причём*

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} \le A_2 \|f\|_{W_2^\alpha}, \tag{39}$$

где $A_2 = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha})$.

3) *Пусть $\sin\pi\alpha \ne -1$, тогда пространства W_2^α и $\widehat{W}_2^\alpha$ изоморфны, а их нормы эквивалентны.*

4) *Константы в неравенствах вложений* (38), (39) *точные.*

Эта теорема фактически является следствием результатов об ограниченности операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2. В свою очередь из теоремы об унитарности этих операторов вытекает теорема 20.

Теорема 20. *Нормы*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \|D_-^j f\|_{L_2}, \tag{40}$$

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \left\| x^j \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^j f \right\|_{L_2} \tag{41}$$

задают эквивалентные нормировки в пространстве Соболева при целых $s \in \mathbb{Z}$. Кроме того, каждое слагаемое в (40) *тождественно равно соответствующему слагаемому в* (41) *с тем же индексом j.*

И. А. Киприянов ввёл в [22] шкалу пространств, которые оказали существенное влияние на теорию уравнений в частных производных с оператором Бесселя по одной или нескольким переменным. Эти пространства можно определить следующим образом. Рассмотрим подмножество чётных функций на $\mathbb{D}(0,\infty)$, у которых все производные нечётного порядка равны нулю при $x = 0$. Обозначим это множество $\mathbb{D}_c(0,\infty)$ и введём на нём норму

$$\|f\|_{\widetilde{W}_{2,k}^s} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|B_k^{\frac{s}{2}}\|_{L_{2,k}}, \tag{42}$$

где s — чётное натуральное число, $B_k^{s/2}$ — итерация оператора Бесселя. Пространство И. А. Киприянова при чётных s определяется как замыкание $D_c(0,\infty)$ по норме (42). Известно, что эквивалентная (42) норма может быть задана по формуле [22]

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \left\| x^s \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^s f \right\|_{L_{2,k}}. \tag{43}$$

Это позволяет доопределить норму в $\widetilde{W}^s_{2,k}$ для всех s. Отметим, что по существу этот подход совпадает с одним из принятых в [22], другой подход основан на использовании преобразования Фурье — Бесселя. Далее будем считать, что $\widetilde{W}^s_{2,k}$ нормируется по формуле (43).

Введём весовую соболевскую норму

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|D^s_- f\|_{L_{2,k}} \tag{44}$$

и пространство $W^s_{2,\,k}$ как замыкание $\mathbb{D}_c(0,\infty)$ по этой норме.

Теорема 21. 1) *Пусть $k \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $\widetilde{W}^s_{2,k}$ непрерывно вложено в $W^s_{2,k}$, причём существует постоянная $A_3 > 0$, такая, что*

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} \leq A_3 \|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}}. \tag{45}$$

2) *Пусть $k + s \neq -2m_1 - 1$, $k - s \neq -2m_2 - 2$, $m_1 \in \mathbb{N}_0$, $m_2 \in \mathbb{N}_0$. Тогда справедливо обратное вложение $W^s_{2,\,k}$ в $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$, причём существует постоянная $A_4 > 0$, такая, что*

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} \leq A_4 \|f\|_{W^s_{2,k}}. \tag{46}$$

3) *Если указанные условия не выполняются, то соответствующие вложения не имеют места.*

Следствие 6. *Пусть выполнены условия: $k \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$; $k + s \neq -2m_1 - 1$, $m_1 \in \mathbb{N}_0$; $k - s \neq -2m_2 - 2$, $m_2 \in \mathbb{N}_0$. Тогда пространства И. А. Киприянова можно определить как замыкание $D_c(0,\infty)$ по весовой соболевской норме* (44).

Следствие 7. *Точными значениями постоянных в неравенствах вложения* (45), (46) *являются*

$$A_3 = \max(1, \|{}_1S^{s-1}_-\|_{L_{2,k}}), \quad A_4 = \max(1, \|{}_1P^{s-1}_-\|_{L_{2,k}}).$$

Очевидно, что приведённая теорема и следствия из неё вытекают из приведённых выше результатов для операторов Бушмана — Эрдейи. Отметим, что нормы операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости в $L_{2,\,k}$ дают значения точных постоянных в неравенствах вложения (45), (46). Оценки норм операторов Бушмана — Эрдейи в банаховых пространствах $L_{p,\alpha}$ позволяют рассматривать вложения для соответствующих функциональных пространств.

Таким образом в этом пункте с помощью ОП Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре»: *пространства И. А. Киприянова изоморфны весовым пространствам С. Л. Соболева.* Разумеется, мы рассмотрели самый простой случай, результаты можно обобщать на другие виды нормировок, многомерный случай, замену неограниченных областей на ограниченные, что ещё предстоит рассмотреть в будущем, но это не изменит принципиально основного вывода. Сказанное ни в коем случае не умаляет ни существенного значения, ни необходимости использования пространств И. А. Киприянова для подходящего круга задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. Принципиальная важность пространств И. А. Киприянова для теории уравнений в частных производных различных типов с операторами Бесселя отражает общий методологический подход, который автор услышал в виде красивого афоризма на пленарной лекции члена-корреспондента РАН Л. Д. Кудрявцева:

КАЖДОЕ УРАВНЕНИЕ ДОЛЖНО ИЗУЧАТЬСЯ В СВОЁМ СОБСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ!

Доказанные в этом пункте вложения могут быть использованы для прямого переноса известных оценок для решений B-эллиптических уравнений в пространствах И. А. Киприянова (см., например, [15; 22]) на оценки в весовых пространствах С. Л. Соболева. Это непосредственное применение приведённых в статье условий ограниченности и сплетающих свойств операторов преобразования Бушмана — Эрдейи.

5.2. Представление решений дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя

Построенные операторы преобразования позволяют выписывать явные формулы, выражающие решения уравнений в частных производных с операторами Бесселя через невозмущённые уравнения. Примером служит B-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\dots,x_n)=f,$$

аналогичные B-гиперболические и B-параболические уравнения. Эта идея ранее осуществлялась с использованием операторов преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта, см. [1–3; 9; 15]. Новые типы операторов преобразования позволяют получить новые классы подобных формул соответствия.

5.3. Задача Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (ЭПД)

Рассмотрим уравнение ЭПД в полупространстве

$$B_{\alpha,t}u(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta_x u+F(t,x),$$

где $t>0,\ x\in\mathbb{R}^n$. Дадим нестрогое описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t=0$ единым методом. Образуем по формулам (13) операторы преобразования $X_{\alpha,t}$ и $Y_{\alpha,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,t}u=v(t,x)$, $X_{\alpha,t}F=G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\Delta_x v+G,\quad v|_{t=0}=\varphi(x),\quad v'_t|_{t=0}=\psi(x)$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда в предположении, что $Y_{\alpha,t}=X_{\alpha,t}^{-1}$, получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_\alpha u|_{t=0}=a(x),\quad (X_\alpha u)'|_{t=0}=b(x).$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи первого, второго, третьего родов, Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова, обобщённые операторы Бушмана — Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике, в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам; см. [28].

Данная схема обобщается на дифференциальные уравнения с большим числом переменных, по которым могут действовать операторы Бесселя с различными параметрами, а также уравнения других типов. Применение операторов преобразований позволяет сводить сингулярные (или, иначе, вырождающиеся) уравнения с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным (уравнения ЭПД, сингулярное уравнение теплопроводности, B-эллиптические уравнения по определению И. А. Киприянова, уравнения обобщённой осесимметрической теории потенциала — теории GASPT (Generalized Axially Symmetric Potential Theory) — А. Вайнстейна и др.) к несингулярным. При этом априорные оценки для сингулярного случая получаются как следствия соответствующих априорных оценок для регулярных уравнений, если только удалось оценить сами операторы преобразования в нужных функциональных пространствах. Значительное число подобных оценок приведено выше.

Из работ этого направления отметим монографию А. Псху (см. [51]), в которой по существу применяется указанная выше схема с операторами преобразования для решения задачи Коши для уравнения с дробными производными, при этом существенно используется преобразование Станковича; а также применение операторов преобразования Бушмана — Эрдейи в работах А. В. Глушака; см. [52].

Отметим, что операторы Бушмана — Эрдейи и возникли впервые в теории уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Приведём соответствующий результат, имеющий в том числе исторический интерес.

Лемма Копсона

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

(обобщённое уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу, или B-гиперболическое уравнение по терминологии И. А. Киприянова) в открытой четверти плоскости $x > 0$, $y > 0$ при положительных параметрах $\beta > \alpha > 0$ с краевыми условиями на осях координат (характеристиках)

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,y) = g(y), \quad f(0) = g(0).$$

Предполагается, что решение $u(x,y)$ является непрерывно дифференцируемым в замкнутом первом квадранте, имеет непрерывные вторые производные в открытом квадранте, граничные функции $f(x)$, $g(y)$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Тогда, если решение поставленной задачи существует, то для него выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = 0,$$

$$
2^\beta\Gamma(\beta+1/2)\int_0^1 f(xt)t^{\alpha+\beta+1}\left(1-t^2\right)^{\frac{\beta-1}{2}} P^{1-\beta}_{-\alpha} t\,dt =
$$

$$
= 2^\alpha\Gamma(\alpha+1/2)\int_0^1 g(xt)t^{\alpha+\beta+1}\left(1-t^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} P^{1-\alpha}_{-\beta} t\,dt
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
g(y)=\frac{2\Gamma(\beta+1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(\beta-\alpha)}y^{1-2\beta}\int_0^y x^{2\alpha-1}f(x)\left(y^2-x^2\right)^{\beta-\alpha-1}x\,dx,
$$

где $P^\mu_\nu(z)$ — функция Лежандра первого рода [50].

Таким образом, содержание леммы Копсона сводится к тому, что начальные данные на характеристиках нельзя задавать произвольно, они должны быть связаны операторами Бушмана — Эрдейи первого рода. Более подробное обсуждение этой леммы и соответствующие ссылки см. в [7].

5.4. Применения к операторам обобщённого сдвига

Данный класс операторов введён и подробно изучен в работах Б. М. Левитана [16; 17]. Он имеет многочисленные применения в теории уравнений с частными производными, в том числе с операторами Бесселя [8], позволяя, в частности, переносить особенность в уравнениях из начала координат в любую точку. Операторы обобщённого сдвига по явным формулам выражаются через операторы преобразования [8]. Поэтому новые классы операторов преобразования позволяют построить и изучать новые классы операторов обобщённого сдвига.

5.5. Применения к операторам Дункла

В последнее время значительное развитие получила теория операторов Дункла. Это в существенном дифференциально-разностные операторы, содержащие линейные комбинации обычных производных и конечных разностей. В высших размерностях операторы Дункла связаны с алгебрами Ли и группами отражений и симметрий. Для этого класса операторов значительное развитие получила теория операторов преобразования, как классических, так, в отдельных работах, и операторов Бушмана — Эрдейи; см., например, [53] и ссылки в статьях этого сборника.

5.6. Применения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи в теории преобразования Радона

Известно, что в силу результатов Людвига [54] преобразование Радона при описании через сферические гармоники действует на каждой гармонике по радиальной переменной в нашей терминологии как некоторый оператор Бушмана — Эрдейи первого рода. Приведём точный результат.

Теорема 22. (Теорема Людвига [54; 48]). *Пусть задано разложение функции в $\mathbb{R}^n$ по сферическим гармоникам вида*

$$
f(x)=\sum_{k,l} f_{k,l}(r)Y_{k,l}(\theta).
$$

Тогда преобразование Радона этой функции также может быть разложено в ряд по сферическим гармоникам по формулам

$$
Rf(x)=g(r,\theta)=\sum_{k,l} g_{k,l}(r)Y_{k,l}(\theta),
$$

$$g_{k,l}(r) = c(n) \int_r^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} C_l^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{s}{r}\right) f_{k,l}(r) r^{n-2}\, ds, \tag{47}$$

где $c(n)$ — некоторая известная постоянная, $C_l^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{s}{r}\right)$ — функция Гегенбауэра [50]. *Также справедлива аналогичная обратная формула, выражающая величины $f_{k,l}(r)$ через $g_{k,l}(r)$.*

Известно, что функция Гегенбауэра выражается через функцию Лежандра [50]. Таким образом, формула Людвига (47) показывает, что результат действия преобразования Радона по каждой гармонике с точностью до степенных и постоянных множителей — это операторы преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода.

Отметим, что именно эта формула в двумерном случае была использована А. Кормаком для расчёта первого томографа, за что впоследствии он был удостоен Нобелевской премии.

Частными случаями формулы Людвига, полученной в 1966 году, являются явные формулы, описывающие действие преобразования Радона по любой сферической гармонике, в частности на чисто радиальных функциях. Эти формулы переоткрываются энтузиастами до сих пор.

На этом пути следствием полученных выше результатов являются интегральные представления, оценки норм в функциональных пространствах, формулы обращения для преобразования Радона. Результаты формулируются в терминах операторов Сонина — Пуассона — Дельсарта, Эрдейи — Кобера, Бушмана — Эрдейи.

Например, становится понятным, что, по существу, многие формулы обращения преобразования Радона совпадают с различными вариантами формул для обращения операторов Бушмана — Эрдейи первого рода.

Указанный круг вопросов также подробно изложен в монографии [55].

5.7. Применения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи к построению обобщённых сферических гармоник

Ещё с 1950-х годов специалистам было известно, что никакой новой теории для построения полиномиальных решений B-эллиптических уравнений не требуется. Это следует из простого факта, что уже операторы преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта переводят степень в степень. Следовательно, они переводят B-гармонические полиномы в гармонические и наоборот по явным формулам. Поэтому и обобщённые сферические гармоники строятся по явным формулам из обычных, так как они являются сужениями соответствующих полиномов на единичную сферу. Данный подход подробно изложен, например, в работах Б. Рубина [56; 57] (см. также ссылки в этих работах). Операторы Бушмана — Эрдейи добавляют новую степень свободы ко всем этим построениям.

5.8. Применения операторов преобразования Бушмана — Эрдейи к построению унитарных обобщений операторов Харди

Унитарность сдвинутых на единичный классических операторов Харди (19) установлена выше; см. следствие 4 из теоремы 7. Как уже отмечалось, это известный результат, приведённый в [49]. Подстановка других натуральных значений параметра приводит к новому бесконечному семейству интегральных операторов простого вида, унитарных в $L_2(0, \infty)$.

Теорема 23. *Следующие операторы образуют пары взаимно обратных унитарных операторов в* $L_2(0,\infty)$:

$$U_3 f = f + \int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y}, \quad U_4 f = f + \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy,$$

$$U_5 f = f + 3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2}, \quad U_6 f = f - \frac{3}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy,$$

$$U_7 f = f + \frac{3}{x^2}\int_x^\infty y f(y)\,dy, \quad U_8 f = f - 3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},$$

$$U_9 f = f + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy, \quad U_{10} f = f + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy.$$

5.9. Применение операторов преобразования Бушмана — Эрдейи в работах В. В. Катрахова

В. В. Катраховым был предложен новый подход к постановке краевых задач для эллиптических уравнений с особенностями. Например, для уравнения Пуассона им рассматривалась задача в области, содержащей начало координат, в которой решения могут иметь особенности произвольного роста. В точке начала координат им было предложено новое нелокальное краевое условие типа свёртки, которое мы назовём K-следом. В определении классов для решений, которые обобщают пространства С. Л. Соболева на случай функций с существенными особенностями, фундаментальную роль играют различные ОП. Основные результаты состоят в доказательстве корректной разрешимости поставленных задач во введённых пространствах. И постановки задач с K-следом, и использованные нормы напрямую используют операторы преобразования Бушмана — Эрдейи; см. [58; 59].

Кроме того, в совместных работах И. А. Киприянова и В. В. Катрахова на основе операторов преобразования вводятся и изучаются новые классы псевдодифференциальных операторов [60]. Эти результаты изложены в качестве отдельного параграфа в монографии Р. Кэрролла [2].

Список литературы

1. **Carroll, R. W.** Transmutation and Operator Differential Equations / R. W. Carroll. — Amsterdam ; New York ; Oxford : North Holland, 1979. — 244 p.
2. **Carroll, R. W.** Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R. W. Carroll. — Amsterdam ; New York ; Oxford : North Holland, 1982. — 457 p.
3. **Carroll, R. W.** Transmutation Theory and Applications / R. W. Carroll. — Amsterdam ; New York ; Oxford : North Holland, 1985. — 351 p.
4. **Фаге, М. К.** Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов / М. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. — Новосибирск : Наука, 1987. — 280 с.
5. **Begehr, H.** Transformations, Transmutations and Kernel Functions. Vol. 1, 2 / H. Begehr, R. P. Gilbert. — Harlow : Longman Sci. & Technical, 1993. — 272 p.
6. **Triméche, K.** Transmutation Operators and Mean–Periodic Functions Associated with Differential Operators / K. Triméche. — Chur; London; Paris; New York; Melbourne : Harwood Academic Publ., 1988. — 283 p.
7. **Sitnik, S. M.** Transmutations and Applications : a survey [Электронный ресурс]. — URL: http://arXiv:1012.3741 (дата обращения 12.12.2015).

8. **Левитан, Б. М.** Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. М. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 2. — С. 102–143.
9. **Carroll, R. W.** Singular and Degenerate Cauchy problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. — New York ; San Francisco ; London : Academic Press, 1976. — 333 p.
10. **Dimovski, I. H.** Convolutional Calculus / I. H. Dimovski. — Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publ., 1990. — 184 p.
11. **Kiryakova, V. S.** Generalized Fractional Calculus and Applications / V. S. Kiryakova. — Harlow : Longman Sci. & Technical, 1994. — 360 p.
12. **Kravchenko, V. V.** Applied Pseudoanalytic Function Theory / V. V. Kravchenko. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhäuser Verlag, 2009. — 182 p.
13. **Lions, J. L.** Equations Differentielles Operationnelles: Et problémes aux Limites / J. L. Lions. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1961. — 291 p.
14. **Векуа, И. Н.** Обобщённые аналитические функции. / И. Н. Векуа. — 2-е изд. — М. : Наука, 1988. — 509 с.
15. **Киприянов, И. А.** Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 198 с.
16. **Левитан, Б. М.** Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения / Б. М. Левитан. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 323 с.
17. **Левитан, Б. М.** Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. — М. : Наука, 1984. — 240 с.
18. **Марченко, В. А.** Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1972. — 220 с.
19. **Марченко, В. А.** Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1977. — 401 с.
20. **Шадан, К.** Обратные задачи в квантовой теории рассеяния / К. Шадан, П. Сабатье. — М. : Мир, 1980.
21. **Хромов, А. П.** Конечномерные возмущения вольтерровых операторов / А. П. Хромов // Соврем. математика. Фундамент. направления. — 2004. — Т. 10. — С. 3–163.
22. **Киприянов, И. А.** Преобразования Фурье — Бесселя и теоремы вложения для весовых классов / И. А. Киприянов // Тр. МИАН СССР. — 1967. — Т. 89. — С. 130–213.
23. **Buschman, R. G.** An inversion integral for a Legendre transformation / R. G. Buschman // American Mathematics Month. — 1962. — Vol. 69, no. 4. — P. 288–289.
24. **Buschman, R. G.** An inversion integral for a general Legendre transformation / R. G. Buschman // SIAM Rev. — 1963. — Vol. 5, no. 3. — P. 232–233.
25. **Erdelyi, A.** An integral equation involving Legendre functions / A. Erdelyi // SIAM Rev. — 1964. — Vol. 12, no. 1. — P. 15–30.
26. **Erdelyi, A.** Some integral equations involving finite parts of divergent integrals / A. Erdelyi // Glasgow Math. J. — 1967. — Vol. 8, no. 1. — P. 50–54.
27. **Samko, S. G.** Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — London ; New York : Gordon and Breach Sci. Publ., 1993. — 1012 p.
28. **Ситник, С. М.** Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости / С. М. Ситник. — 1990. — 44 с. (Препринт / Ин-т автоматики и процессов управления ДВО АН СССР).
29. **Катрахов, В. В.** Метод факторизации в теории операторов преобразования / В. В. Катрахов, С. М. Ситник. — Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа : сб. тр. под ред. В. Н. Врагова. — Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 1990. — С. 104–122.

30. **Ляховецкий, Г. В.** Формулы композиций для операторов Бушмана–Эрдейи / Г. В. Ляховецкий, С. М. Ситник. — 1991. — 11 с. (Препринт / Ин-т автоматики и процессов управления ДВО АН СССР).

31. **Ситник, С. М.** Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдейи / С. М. Ситник // Докл. Акад. наук. — 1991. — Т. 320, № 6. — С. 1326–1330.

32. **Ситник, С. М.** Операторы преобразования и их приложения / С. М. Ситник. — Исследования по современному анализу и математическому моделированию : сб. науч. тр. / отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. — Владикавказ : Владикавказ. науч. центр РАН и Республики Сев. Осетия — Алания, 2008. — С. 226–293.

33. **Катрахов, В. В.** Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 278, № 4. — С. 797–799.

34. **Katrakhov, V. V.** Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators / V. V. Katrakhov, S. M. Sitnik // Doklady Mathematics. — 1995. — Vol. 50, no. 1. — P. 70–77.

35. **Катрахов, В. В.** Оценки решений Йоста одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Докл. Акад. наук. — 1995. — Т. 340, № 1. — С. 18–20.

36. **Ситник, С. М.** Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений / С. М. Ситник // Вестн. Самар. гос. ун-та. — 2008. — № 8-1 (67). — Естественнонауч. сер. — С. 237–248.

37. **Karp, D.** Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function / D. Karp, S. M. Sitnik // J. of Approximation Theory. — 2009. — Vol. 161, no. 1. — P. 337–352.

38. **Karp, D.** Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions / D. Karp, S. M. Sitnik // J. of Mathematical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 364, no. 2. — P. 384–394.

39. **Ситник, С. М.** Решение задачи об унитарном обобщении операторов преобразования Сонина — Пуассона / С. М. Ситник // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика. — 2010. — № 5 (76). — С. 135–153.

40. **Ситник, С. М.** Ограниченность операторов преобразования Бушмана — Эрдейи / С. М. Ситник // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : сб. тр. 5-й междунар. конф. Т. 1: Математический анализ. — Минск : Нац. акад. наук Беларуси, 2010. — С. 120–125.

41. **Ситник, С. М.** О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах / С. М. Ситник // Владикавказ. мат. журн. — 2010. Т. 12, № 4. С. 73–78.

42. **Ситник, С. М.** О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С. М. Ситник // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. — 2010. — Т. 12, № 2. — С. 69–75.

43. **Ситник, С. М.** Оператор преобразования специального вида для дифференциального оператора с сингулярным в нуле потенциалом / С. М. Ситник // Неклассические уравнения математической физики : сб. науч. работ / под ред. А. И. Кожанова. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2010. — С. 264–278.

44. **Kilbas, A. A.** Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$-spaces / A. A. Kilbas, O. V. Skoromnik // Integral Transforms and Spec. Functions. — 2009. — Vol. 20, no. 9. — P. 653–672.

45. **Килбас, А. А.** Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Докл. Акад. наук. — 2009. — Т. 429, № 4. — С. 442–446.
46. **Virchenko, N. O.** Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / N. O. Virchenko, I. Fedotova. — Singapore : World Sci., 2001. — 195 p.
47. **Маричев, О. И.** Метод вычисления интегралов от специальных функций / О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1978.
48. **Хелгасон, С.** Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. — М. : Мир, 1987. — 736 с.
49. **Kufner, A.** Weighted Inequalities of Hardy Type / A. Kufner, L.-E. Persson. — New Jersey ; Lonodon ; Singapore ; Hong Kong : World Sci., 2003. — 360 p.
50. **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1965. — 294 с.
51. **Псху, А. В.** Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А. В. Псху. — Нальчик : Изд-во КБНЦ РАН, 2005. — 186 с.
52. **Глушак, А. В.** О свойствах весовых задач Коши для абстрактного уравнения Мальмстена / А. В. Глушак, О. А. Покручин // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер.: Математика. Физика. — 2011. — № 17 (112). — 102–110.
53. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). Special Issue on Dunkl Operators and Related Topics [Электронный ресурс] / eds. C. Dunkl, P. Forrester, M. de Jeu, M. Rösler, Y. Xu (2009). — URL: http://www.emis.de/journals/SIGMA/Dunkl_operators.html (дата обращения 05.10.2016).
54. **Ludwig, D.** The Radon Transform on Euclidean Space / D. Luwig // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1966. — Vol XIX. — P. 49–81.
55. **Deans, S. R.** The Radon Transform and Some of Its Applications / S. R. Deans. — N.Y. : Dover Publ., 2007. — 297 p.
56. **Aliev, I. A.** Spherical harmonics associated to the Laplace–Bessel operator and generalized spherical convolutions / I. A. Aliev, B. Rubin // Analysis and Applications (Singap.). — 2003. — Vol. 1. — P. 81–109.
57. **Rubin, B.** Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions / B. Rubin. — The Hebrew Univ. of Jerusalem, 1999/2000. — Preprint no. 2. — 38 p.
58. **Катрахов, В. В.** Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона / В. В. Катрахов // ДАН СССР. — 1981. — Т. 259, № 5. — С. 1041–1045.
59. **Катрахов, В. В.** Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона / В. В. Катрахов // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 6. — С. 849–876.
60. **Киприянов, И. А.** Об одном классе многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Мат. сб. — 1977. — Т. 104, № 1. — С. 49–68.

Поступила в редакцию 27.10.2016
После переработки 08.11.2016

Сведения об авторе

Ситник Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, Воронеж, Россия; e-mail: mathsms@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 4. P. 63–93.

A SURVEY OF BUSCHMAN — ERDELYI TRANSMUTATIONS

S.M. Sitnik

Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs, Voronezh, Russia
mathsms@yandex.ru

This is a survey paper. In introduction some historical and priority information is given. The author's convenient classification of Buschman — Erdelyi transmutations is proposed. Based on this classification results on Buschman — Erdelyi transmutations of the first, second and third kinds are surveyed, including unitarian Sonine — Katrakhov and Poisson — Katrakhov transmutations. In the last section applications of Buschman — Erdelyi transmutations are considered.

Keywords: *transmutation, integral transform, Buschman — Erdelyi transmutation, Erdelyi — Kober operator, Sonine — Poisson operator, fractional integral.*

References

1. **Carroll R.W.** *Transmutation and Operator Differential Equations.* Mathematics Studies, vol. 37. Amsterdam, New York, Oxford, North Holland, 1979. 244 p.
2. **Carroll R.W.** *Transmutation, Scattering Theory and Special Functions.* Mathematics Studies, vol. 69. Amsterdam, New York, Oxford, North Holland, 1982. 457 p.
3. **Carroll R.W.** *Transmutation Theory and Applications.* Mathematics Studies, vol. 117. Amsterdam, New York, Oxford, North Holland, 1985. 351 p.
4. **Fage M.K., Nagnibida N.I.** *Problema ekvivalentnosti obyknovennykh lineynykh differentsial'nykh operatorov* [Equivalence problem for ordinary linear differential operators]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1977. 280 p. (In Russ.).
5. **Begehr H., Gilbert R.P.** *Transformations, Transmutations and Kernel Functions.* Vol. 1, 2. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics, vol. 59. Harlow, Longman Scientific & Technical, 1993. 272 p.
6. **Triméche K.** *Transmutation Operators and Mean–Periodic Functions Associated with Differential Operators.* Mathematical Reports, vol. 4, part 1. Chur, London, Paris, New York, Melbourne, Harwood Academic Publishers, 1988. 283 p.
7. **Sitnik S.M.** *Transmutations and Applications: a survey.* Available at: http://arXiv:1012.3741, accessed 12.12.2015.
8. **Levitan B.M.** Razlozheniya po funktsiyam Besselya v ryady i integraly Furye [Expansions into Fourier series and integrals of Bessel functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1951, vol. 6, no. 2, pp. 102–143. (In Russ.).
9. **Carroll R.W.** *Singular and Degenerate Cauchy problems.* Mathematics in Science and Engineering, vol. 127. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1976. 333 p.
10. **Dimovski I.H.** *Convolutional Calculus.* Mathematics and Its Applications (East European Series), vol. 43. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1990. 184 p.
11. **Kiryakova V.S.** *Generalized Fractional Calculus and Applications.* Harlow, Longman Scientific & Technical, 1994., 360 p.
12. **Kravchenko V.V.** *Applied Pseudoanalytic Function Theory.* Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag, 2009. 182 p.
13. **Lions J.L.** *Equations Differentielles Operationnelles: Et problémes aux Limites.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1961. 291 p.

14. **Vekua I.N.** *Generalized Analytic Functions.* International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 25. Oxford, New York, Pergamon Press, 1962. xxix+668 p.
15. **Kipriyanov I.A.** *Singulyarnye ellipticheskiye krayevye zadachi* [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 198 p. (In Russ.).
16. **Levitan B.M.** *Generalized translation operators and some of their applications.* Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1964. 200 p.
17. **Levitan B.M.** *Inverse Sturm — Liouville Problems.* Utrecht, VNU Science Press, 1987. 245 p.
18. **Marchenko V.A.** *Spektral'naya teoriya operatorov Shturma — Liuvillya* [Spectral theory of Sturm — Liouville operators]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1972. 220 p. (In Russ.).
19. **Marchenko V.A.** *Sturm — Liouville Operators and Applications.* Rev. ed. Providence, Rhode Island, AMS Chelsea Publishing, 2011. 393 p.
20. **Shadan C., Sabatier P.** *Inverse problems in quantum scattering theory.* Texts and Monographs in Physics. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Springer-Verlag, 1989. 499 p.
21. **Khromov A.P.** Finite-dimensional perturbations of Volterra operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 138, no. 5, pp. 5893–6066.
22. **Kipriyanov I.A.** Preobrazovaniya Furye — Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov [Fourier — Bessel transforms and imbedding theorems for weighted classes]. *Trudy MIAN SSSR* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1967, vol. 89, pp. 130–213. (In Russ.).
23. **Buschman R.G.** An inversion integral for a Legendre transformation. *American Mathematics Monthly*, 1962, vol. 69, no. 4, pp. 288–289.
24. **Buschman R.G.** An inversion integral for a general Legendre transformation. *SIAM Review*, 1963, vol. 5, no. 3, pp. 232–233.
25. **Erdelyi A.** An integral equation involving Legendre functions. *SIAM Review*, 1964, vol. 12, no. 1, pp. 15–30.
26. **Erdelyi A.** Some integral equations involving finite parts of divergent integrals. *Glasgow Mathematical Journal*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 50–54.
27. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional integrals and derivatives: theory and applications.* London, New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1012 p.
28. **Sitnik S.M.** *Unitarnost' i ogranichennost' operatorov Bushmana — Erdeyi nulevogo poryadka gladkosti* [Unitary and Boundedness of Buschman — Erdelyi operators with zero order of smoothness]. Preprint, Vladivostok, Institute of Automation and Control Processes of FEB of USSR Academy of Sciences, 1990. 44 p. (In Russ.).
29. **Katrakhov V.V., Sitnik S.M.** Metod faktorizatsii v teorii operatorov preobrazovaniya [Factorization method in transmutation theory]. V.N. Vragov (ed.). *Neklassicheskiye uravneniya i uravneniya smeshannogo tipa* [Non-classical and mixed type equations]. Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of SB of USSR Academy of Sciences, 1990. Pp. 104–122. (In Russ.).
30. **Lyakhovetskii G.V., Sitnik S.M.** *Formuly kompozitsiy dlya operatorov Bushmana — Erdeyi* [Compositions formulas for Buschman — Erdelyi operators]. Preprint, Vladivostok, Institute of Automation and Control Processes of FEB of USSR Academy of Sciences, 1991. 11 p. (In Russ.).
31. **Sitnik S.M.** Factorization and estimates of the norms of Buschman — Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces. *Doklady Mathematics*, 1992, vol. 44, no. 2, pp. 641–646.
32. **Sitnik S.M.** Operatory preobrazovaniya i ikh prilozheniya [Transmutations and their applications]. Yu.F. Korobeinik, A.G. Kusraev (eds.). *Issledovaniya po sovremennomu analizu i matematicheskomu modelirovaniyu* [Studies in contemporary analysis and mathematical modeling]. Vladikavkaz, Vladikavkaz Scientific Center of RAS and North Ossetia — Alania Republic Publ., 2008, pp. 226–293. (In Russ.).

33. **Katrakhov V.V., Sitnik S.M.** A boundary-value problem for the steady-state Schrödinger equation with a singular potential. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1984, vol. 30, no. 2, pp. 468–470.
34. **Katrakhov V.V., Sitnik S.M.** Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 70–77.
35. **Katrakhov V.V., Sitnik S.M.** Estimates of the Jost solution to a one-dimensional Schrödinger equation with a singular potential. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 51, no. 1, pp. 14–16.
36. **Sitnik S.M.** Metod faktorizatsii operatorov preobrazovaniya v teorii differentsial'nykh uravneniy [Factorization method for transmutations in the theory of differential equations]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Samara State University], 2008, no. 8-1 (67), pp. 237–248. (In Russ.).
37. **Karp D., Sitnik S.M.** Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function. *Journal of Approximation Theory*, 2009, vol. 161, no. 1, pp. 337–352.
38. **Karp D., Sitnik S.M.** Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, vol. 364, no. 2, pp. 384–394.
39. **Sitnik S.M.** Resheniye zadachi ob unitarnom obobshchenii operatorov preobrazovaniya Sonina — Puassona [A solution to the problem of unitary generalization of Sonine–Poisson transmutations]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [Scientific statements of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics], 2010, no. 5 (76), pp. 135–153. (In Russ.).
40. **Sitnik S.M.** Ogranichennost' operatorov preobrazovaniya Bushmana — Erdeyi [Boundedness of Buschman–Erdelyi Transmutations]. *Analiticheskiye metody analiza i differentsial'nykh uravneniy* [Analytical Methods of Analysis and Differential Equations]. Proceedings of 5th International Conference, vol. 1. Mathematical Analysis. Minsk, Belorussian National Academy of Sciences, 2010. Pp. 120–125. (In Russ.).
41. **Sitnik S.M.** O predstavlenii v integral'nom vide resheniy odnogo differentsial'nogo uravneniya s osobennostyami v koeffitsientakh [On representation in integral form of solutions to a differential equation with singularities in coefficients]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal* [Vladikavkaz mathematical journal], 2010, vol. 12, no. 4, pp. 73–78. (In Russ.).
42. **Sitnik S.M.** O yavnykh realizatsiyakh drobnykh stepeney differentsial'nogo operatora Besselya i ikh prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam [On explicit realizations of fractional powers for Bessel differential operator and its applications to differential equations. *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Akademii Nauk* [Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences], 2010, vol. 12, no. 2, pp. 69–75. (In Russ.).
43. **Sitnik S.M.** Operator preobrazovaniya spetsial'nogo vida dlya differentsial'nogo operatora s singulyarnym v nule potentsialom [Transmutation operator of special form for a differential operator with singular at origin potential]. A.I. Kozhanov (ed.). *Neklassicheskiye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Non-Classical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, 2010. Pp. 264–278. (In Russ.).
44. **Kilbas A.A., Skoromnik O.V.** Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$-spaces. *Integral Transforms and Special Functions*, 2009, vol. 20, no. 9, pp. 653–672.
45. **Kilbas A.A., Skoromnik O.V.** Solution of a multidimensional integral equation of the first kind with the Legendre function in the kernel over a pyramidal domain. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 3, pp. 847–851.

46. **Virchenko N.O., Fedotova I.** *Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications.* Singapore, World Scientific, 2001. 195 p.
47. **Marichev O.I.** *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy* [Method of calculating for integrals of special functions]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1978. (In Russ.).
48. **Helgason S.** *Groups and Geometric Analysis: Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions.* Academic Press, 1984. 667 p.
49. **Kufner A., Persson L.-E.** *Weighted Inequalities of Hardy Type.* New Jersey, Lonodon, Singapore, Hong Kong, World Scientific, 2003. 360 p.
50. **Bateman H., Erdelyi A.** *Higher transcendental functions.* Vol. 1. New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1953. 302 p.
51. **Pskhu A.V.** *Krayevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual'nogo poryadka* [Boundary value problems for partial differential equations of fractional and continual order]. Nal'chik, KBNTs RAN Publ., 2005. 186 p. (In Russ.).
52. **Glushak A.V., Pokruchin O.A.** O svoystvakh vesovykh zadach Koshi dlya abstraktnogo uravneniya Mal'mstena [On properties of weighted Cauchy problems for abstract Malmsten equation]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika* [Scientific statements of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics], 2011, no. 17 (11), pp. 102–110.
53. **Dunkl C., Forrester P., de Jeu M., Rösler M., Xu Y. (eds.)** *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA).* Special Issue on Dunkl Operators and Related Topics (2009). Available at: http://www.emis.de/journals/SIGMA/Dunkl_operators.html, accessed 05.10.2016.
54. **Ludwig D.** The Radon Transform on Euclidean Space. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1966, vol XIX, pp. 49–81.
55. **Deans S.R.** *The Radon Transform and Some of Its Applications.* New York, Dover Publ., 2007. 297 p.
56. **Aliev I.A., Rubin B.** Spherical harmonics associated to the Laplace — Bessel operator and generalized spherical convolutions. *Analysis and Applications (Singap.)*, 2003, vol. 1, pp. 81–109.
57. **Rubin B.** *Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions.* The Hebrew University of Jerusalem, 1999/2000. Preprint no. 2. 38 p.
58. **Katrakhov V.V.** On a boundary value problem for the Poisson equation. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, pp. 152–156.
59. **Katrakhov V.V.** On a singular boundary value problem for the Poisson equation. *Sbornik: Mathematics*, 1992, vol. 73, no. 1, pp. 231–256.
60. **Kipriyanov I.A., Katrakhov V.V.** On a class of one-dimensional singular pseudodifferential operators. *Mathematics of the USSR — Sbornik*, 1977, vol. 33, no. 1, pp. 43–61.

Accepted article received 27.10.2016
Corrections received 08.11.2016