Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 30–55.

УДК 512.5

НАХОЖДЕНИЕ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ПОРЯДКОВ 16 И 32

Р. Ж. Алеев[1,2,a], **О. В. Митина**[1,2,b], **Т. А. Ханенко**[1,c]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *ovm@csu.ru;* [c] *tanja_1110_94@mail.ru*

В работе описываются группы единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32. Это описание получено в виде прямого произведения подгрупп. Найдены порождающие одной из этих подгрупп для порядков 16 и 32.

Ключевые слова: *групповое кольцо, единица группового кольца, циклическая группа, примитивный (первообразный) корень, след, характер.*

Введение

В работе изучаются группы единиц (обратимых элементов) целочисленных групповых колец циклических 2-групп, т. е. группы порядков 2^n, $n = 4, 5, \ldots$ Группа единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 2 и 4 тривиальна, для группы порядка 8 имеется её полное описание [1].

Получено описание групп единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 в виде разложения в прямое произведение подгрупп.

1. Основные понятия и определения

Пусть $G = \{e, g_1, ..., g_{|G|-1}\}$ — конечная группа, $\mathbb{Q}G$ и $\mathbb{Z}G$ — групповые кольца над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ соответственно:

$$\mathbb{Z}G = \{z_0 + z_1 g_1 + ... + z_{|G|-1} g_{|G|-1} | z_j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathbb{Q}G = \{a_0 + a_1 g_1 + ... + a_{|G|-1} g_{|G|-1} | a_j \in \mathbb{Q}\}.$$

Пусть $V(\mathbb{Z}G)$ — нормализованная группа единиц кольца $\mathbb{Z}G$, т. е. группа таких единиц, что при разложении этих единиц по элементам группы сумма всех коэффициентов равна 1.

Рассмотрим циклическую группу $G = G_n = \langle x | x^{2^n} = 1\rangle$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ Любой элемент u группового кольца KG группы G над кольцом K может быть представлен в виде

$$u = \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{2^n-1} \gamma_k x^k,$$

где коэффициенты $\beta_j, \gamma_k \in K$; $1, x, \ldots, x^{2^n-1}$ — элементы группы G, $e_0, e_1, \ldots, e_{2^n-1}$ — минимальные центральные идемпотенты комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

Обозначим через ζ_{2^n} примитивный (первообразный) корень из 1 степени 2^n. По таблице характеров для циклических групп коэффициенты β_j и γ_k связаны следующими соотношениями:

$$\gamma_k = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1}\zeta^{-jk}\beta_j \quad \text{и} \quad \beta_k = \sum_{j=0}^{2^n-1}\zeta^{jk}\gamma_j. \tag{$*$}$$

Согласно [2], круговое поле степени n — это поле $\mathbb{Q}(\zeta_{2^n})$, полученное присоединением к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$ первообразного корня ζ_{2^n}. Кольцом целых 2-кругового поля $\mathbb{Q}_{2^n} = \mathbb{Q}(\zeta_{2^n})$ является

$$\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}] = \{f(\zeta_{2^n}) | f \in \mathbb{Z}[t]\} -$$

множество значений на ζ_{2^n} всех многочленов с целыми коэффициентами. Обозначим через $U(\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}])$ группу обратимых элементов (единиц) кольца $\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}]$.

Пусть $\alpha = \cos\frac{2\pi}{2^n} + i\sin\frac{2\pi}{2^n}$, $\mathbb{Q}(\alpha)$ — соответствующее круговое поле. Следом элемента из $\mathbb{Q}(\alpha)$ назовём $\mathbb{Q}$-линейную функцию

$$\mathrm{tr} : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q},$$

определённую следующим правилом. Для корней из 1 степени 2^n положим

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^n}}(\alpha^k) = \begin{cases} 2^{n-1},\ k=0, \\ -2^{n-1},\ k = 2^{n-1}, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного числа $z \in \mathbb{Q}(\alpha)$ след определяется по линейности.

Для числа $a \in \{1, 2, \dots 2^n - 1\}$ определим отображение χ_a группы $G = \langle x \rangle$

$$\chi_a : G \to \langle \alpha \rangle,$$

где для любого $j \in \{1, 2, \dots 2^n - 1\}$

$$\chi_a(x^j) = \alpha^{aj}.$$

Такие отображения называются характерами (точнее, неприводимыми характерами) группы G.

След элемента в общем случае можно определить ещё таким образом. Пусть F — расширение поля P (обозначается F/P), тогда для произвольного элемента $\lambda \in F$ след $\mathrm{tr}_{F/P}(\lambda) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F,P)}\sigma(\lambda)$. Нормой элемента $\lambda \in F$ назовём

$$N_{F/P}(\lambda) = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F,P)}\sigma(\lambda),$$

где $\mathrm{Gal}(F, P)$ — группа Галуа поля F.

Для любого целого j будем использовать следующие обозначения:

$$s_j = \alpha^j + \alpha^{-j}, \quad t_j = 1 + s_j + s_{2j} = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}.$$

Положим также для удобства $m = 2^{n-3}$, тогда $2^n = 8m$.

Лемма 1. *Для любого натурального $v \geqslant 2$ и любого $\rho \in \mathbb{Z}[\zeta_{2^v}]$*

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^v}}(\rho) \equiv 0 \pmod{2^{v-1}}.$$

Доказательство. Так как
$$\rho = \sum_{j=0}^{2^{v-1}-1} b_j \zeta_{2^v}^j,$$
где $\{b_0, \ldots, b_{2^{v-1}-1}\} \subseteq \mathbb{Z}$, то $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^v}}(\rho) = 2^{v-1} b_0 \equiv 0 \pmod{2^{v-1}}$. □

Лемма 2. *Для любого элемента* $u = \sum_{k=0}^{2^n-1} \gamma_k x^k$ *группового кольца* $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ *коэффициенты* γ_k *для* $k \in \{0,1,2,3,\ldots,8m-1\}$ *удовлетворяют условию*
$$\gamma_k = \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8m}\left(1 + (-1)^k\beta_{4m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_{2m}\right) + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8m}\Biggl(1 + (-1)^k\beta_{4m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right) +$$
$$+ \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\alpha^{-2k}\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\Biggr).$$

В частности,
$$\gamma_0 = \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\beta_1\right)\right),$$
$$\gamma_{4m} = \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-4m\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\beta_1\right)\right),$$
$$\gamma_{2m} = \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2m\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(i\beta_1\right)\right).$$

Доказательство. Так как рассматриваются единицы только из группы $V(\mathbb{Z}G)$, то $\beta_0 = 1$. По лемме 1.46 из [1] для любого $k \in \{0,1,2,3,\ldots,8m-1\}$ получим требуемое. □

Предложение 1. *Пусть* u *— элемент конечного порядка в группе* $V(\mathbb{Z}\langle x\rangle)$. *Тогда* $u \in \langle x\rangle$. *Если*
$$u = x^k = \sum_{j=0}^{8m-1} \gamma_j x^j = \sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j,$$
то для любого $j \in \{0,1,\ldots,2^n-1\}$
$$\gamma_j = \begin{cases} 1 & \textit{для } j = k, \\ 0 & \textit{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad \beta_j = \alpha^{jk}.$$

Иными словами, $u = x^k = \prod_{l=0}^{n-1} u_{\chi_{2^l}}(\alpha^{kl})$*. В частности,* $\beta_1 = \alpha^k$ *и* $\beta_1 = 1$ *тогда и только тогда, когда* $u = 1$*.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 3 приложения 1 в [1]. □

2. Ограничения на выбор β_1

Предложение 2. *Не ограничивая общности, можно выбрать коэффициент* $\beta_1 \in U(\mathbb{Z}[\alpha + \alpha^{-1}]) \subset \mathbb{R}$ *и, более того,*

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где $a_j \in \mathbb{Z}$ *для всех* $\{0, 1, \ldots, 2m-1\}$*, причём* a_0 *нечётно.*

Доказательство. Пусть K — группа единиц кольца целых поля $\mathbb{Q}_{2^n}$, тогда $\beta_1 \in U(\mathbb{Z}[\alpha]) = \langle\alpha\rangle \times K$ и можно считать, что $K \subset U(\mathbb{Z}[\alpha+\alpha^{-1}]) \subset \mathbb{R}$. Умножив исходную единицу на подходящую степень x, по предложению 1 получим, что $\beta_1 \in K$. Тогда

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}).$$

Среди коэффициентов $\{a_0, a_1, \ldots, a_{4m-1}\}$ обязательно есть нечётное, иначе норма β_1 не смогла бы быть равной ± 1. Кроме того, при нахождении нормы получим число a_0^{2m-1} и произведения вида

$$b(\alpha^{j_1} + \alpha^{-j_1}) \cdot \ldots \cdot (\alpha^{j_k} + \alpha^{-j_k}), \text{ где } b \in \mathbb{Z}.$$

Каждое такое произведение не может дать 1, поскольку при перемножении двух членов получается

$$(\alpha^j + \alpha^{-j})(\alpha^l + \alpha^{-l}) = \begin{cases} \pm(\alpha^{2j} + \alpha^{-2j} + 2) \text{ при } j \equiv \pm l \pmod{4m}, \\ (\alpha^{j+l} + \alpha^{-j-l}) + (\alpha^{j-l} + \alpha^{-j+l}) \text{ при } j \not\equiv \pm l \pmod{4m}. \end{cases}$$

Отсюда по модулю 2 для нормы $a_0^{2m-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$. Следовательно, a_0 нечётно. □

Лемма 3. *Пусть*

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где коэффициенты $a_j \in \mathbb{Z}$ *для всех* $j \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$*, причём* a_0 *нечётно. Тогда для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 4m-1\}$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right) = \begin{cases} 4ma_0 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k = 2m, \\ 4ma_k & \text{при } k \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}, \\ -4ma_{4m-k} & \text{при } k \in \{2m+1, 2m+2, \ldots, 4m-1\}. \end{cases}$$

Доказательство. Ясно, что, как в лемме 1, $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}(\beta_1) = 4ma_0$. Для $k = 2m$ имеем $\alpha^{-k} = -i$ и

$$\alpha^{-2m}\beta_1 = \alpha^{-2m}\left(a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j})\right) = a_0\alpha^{-2m} + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^{j-2m} + \alpha^{-j-2m}).$$

Так как для любого $j \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ выполняется $\pm j \not\equiv 2m \pmod{4m}$, то $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}(\alpha^{-2m}\beta_1) = 0$.

Пусть $k \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$, тогда

$$\alpha^{-k}\beta_1 = \alpha^{-k}\left(a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j})\right) = a_0\alpha^{-k} + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^{j-k} + \alpha^{-j-k}) =$$

$$= a_0\alpha^{-k} + a_k(1 + \alpha^{-2k}) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{2m-1} a_j(\alpha^{j-k} + \alpha^{-j-k}).$$

Поэтому $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right) = 4ma_k$.

Пусть $k \in \{2m+1, 2m+2, \dots, 4m-1\}$, тогда $k = 2m+k'$, где $k' \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$,

$$\alpha^{-k} = \alpha^{-2m-k'} = \alpha^{8m-2m-k'} = \alpha^{6m-k'} = -\alpha^{2m-k'}.$$

Так как $2m - k' \in \{1, 2, \dots, 2m-1\}$, то $\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right) = -4ma_{2m-k'}$. Подставив $k' = k - 2m$, получим требуемое. □

Лемма 4. *Для любого $k \in \{0, 1, \dots, 4m-1\}$ коэффициент γ_k — целое число тогда и только тогда, когда γ_{k+4m} — целое число. Более точно*

$$\gamma_{k+4m} = \gamma_k - \frac{1}{4m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{4m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \in \mathbb{Z},$$

в частности

$$\gamma_{4m} = \gamma_0 - \frac{1}{4m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}(\beta_1)\right).$$

Также если

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где коэффициенты $a_j \in \mathbb{Z}$ для всех $j \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$, причём a_0 нечётно, то для любого $k \in \{0, 1, \dots, 4m-1\}$

$$\gamma_{k+4m} = \gamma_k - \begin{cases} a_0 & \text{при } k = 0,\\ 0 & \text{при } k = 2m,\\ a_k & \text{при } k \in \{1, 2, \dots, 2m-1\},\\ -a_{4m-k} & \text{при } k \in \{2m+1, 2m+2, \dots, 4m-1\}. \end{cases}$$

В частности,

$$\gamma_{4m} = \gamma_0 - a_0 \text{ и поэтому разной чётности,}$$
$$\gamma_{6m} = \gamma_{2m}.$$

Доказательство. В самом деле, по лемме 2

$$\gamma_k = \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right)$$

и

$$\gamma_{k+4m} = \frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=1}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(k+4m)\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-(k+4m)}\beta_1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=1}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\alpha^{-4m\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\alpha^{-4m}\beta_1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=1}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-8m\cdot 2^{l-1}}\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(-\alpha^{-k}\beta_1\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=1}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)-\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right).$$

Отсюда

$$\gamma_k-\gamma_{k+4m}=\frac{1}{8m}\left(2\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right)=\frac{1}{4m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right).$$

По лемме 1 это целое число, что и требуется. Остальное следует из леммы 3. □

3. Три подгруппы группы $V(\mathbb{Z}G)$

Для каждого числа $l\in\{0,1,\dots,n-1\}$ отображение

$$\varphi_l : V(\mathbb{Z}G)\to U(\mathbb{Z}[\alpha^{2^l}])\subset\mathbb{Q}_{2^{n-l}},$$

определённое правилом

$$\varphi_l\left(\sum_{j=0}^{2^n-1}\beta_j e_j\right)=\beta_{2^l},$$

является гомоморфизмом групп. Определим подмножество $Zr(G)$ группы $V(\mathbb{Z}G)$ следующим образом:

$$Zr(G)=\bigcap_{l=1}^{n-1}\ker\varphi_l.$$

Иными словами,

$$Zr(G)=\left\{\sum_{j=0}^{2^n-1}\beta_j e_j\in V(\mathbb{Z}G)\,\middle|\,\beta_{2^l}=1 \text{ для любого } l\in\{1,2,\dots,n-1\}\right\}.$$

Замечание 1. Из алгебраической сопряжённости следует, что

$$Zr(G)=\left\{\sum_{j=0}^{8m-1}\beta_j e_j\in V(\mathbb{Z}G)\,\middle|\,\beta_{2k}=1 \text{ для любого } k\in\{1,2,\dots,4m-1\}\right\}.$$

Лемма 5. *Множество $Zr(G)$ — подгруппа без кручения в группе $V(\mathbb{Z}G)$.*

Доказательство. Множество $Zr(G)$ является пересечением подгрупп, следовательно, само является подгруппой. Из предложения 1 следует, что эта подгруппа без кручения. □

Определим подмножество $On(G)$ группы $V(\mathbb{Z}G)$ следующим образом:

$$On(G) = \ker \varphi_0.$$

Иными словами,

$$On(G) = \left\{ \sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j \in V(\mathbb{Z}G) \middle| \beta_1 = 1 \right\}.$$

Замечание 2. Из алгебраической сопряжённости следует, что

$$On(G) = \left\{ \sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j \in V(\mathbb{Z}G) \middle| \beta_{2k+1} = 1 \text{ для любого } k \in \{0, 1, \dots, 4m-1\} \right\}.$$

Лемма 6. *Множество $On(G)$ — подгруппа без кручения в $V(\mathbb{Z}G)$.*

Доказательство. Множество $On(G)$ является ядром гомоморфизма, следовательно, является подгруппой. Из предложения 1 следует, что эта подгруппа без кручения. □

Рассмотрим идеал

$$2\mathbb{Z}G = \left\{ 2 \sum_{k=0}^{8m-1} \delta_k x^k \middle| \{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{8m-1}\} \subset \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть $\hat{\nu} : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G$ — естественный кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z}G$ на фактор-кольцо $\mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G$. Ограничение $\hat{\nu}$ на $V(\mathbb{Z}G)$ даёт гомоморфизм групп

$$\nu : V(\mathbb{Z}G) \to U(\mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G).$$

Определим группу $Tw(G) = \ker \nu = (1 + 2\mathbb{Z}G) \cap V(\mathbb{Z}G)$.

Лемма 7. *Множество $Tw(G)$ является подгруппой группы $V(\mathbb{Z}G)$ без кручения индекса, делящего 2^{8m-1}.*

Доказательство. По определению $Tw(G)$ и предложению 1 получим, что $Tw(G)$ является группой без кручения.

Рассмотрим элемент $\bar{a} = a + 2\mathbb{Z}G$ фактор-кольца $\mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G$. Фактор-кольцо $\mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G$ можно рассматривать как векторное пространство над полем из двух элементов F_2. Базисом этого векторного пространства является набор

$$\left(\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{8m-1}\right).$$

При вычислениях по модулю 2 возведение в квадрат является гомоморфизмом, и поэтому для любого элемента фактор-кольца

$$\bar{a} = \sum_{j=0}^{8m-1} \bar{a}_j \bar{x}^j \text{ (где } \bar{a}_j \in F_2 \text{ для каждого } j \in \{0, 1, \dots, 8m-1\})$$

имеем

$$\bar{a}^{8m} = \sum_{j=0}^{8m-1} \bar{a}_j \in F_2.$$

Значит, множество

$$\left\{ \sum_{j=0}^{8m-1} \bar{a}_j \bar{x}^j \middle| \sum_{j=0}^{8m-1} \bar{a}_j = 1 \in F_2 \right\}$$

является мультипликативной группой фактор-кольца $\mathbb{Z}G/2\mathbb{Z}G$ и эта группа имеет порядок $\frac{2^{8m}}{2} = 2^{8m-1}$. □

4. Подгруппа H

Пусть $H = G_{n-1} = \langle x^2 \rangle$ — подгруппа группы G порядка $2^{n-1} \geqslant 8$. Для определённости в качестве первообразного корня ζ_{4m} степени $4m$ из единицы выберем

$$\alpha^2 = \cos\frac{2\pi}{4m} + i\sin\frac{2\pi}{4m},$$

тогда $(\alpha^2)^{m/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ (\alpha^2)^m = i,\ (\alpha^2)^{2m} = -1.$

Рассмотрим единицу из группы $V(\mathbb{Z}H)$, для которой зафиксируем обозначения

$$\sum_{j=0}^{4m-1} \beta'_j e'_j = \sum_{k=0}^{4m-1} \gamma'_k x^{2k}.$$

Лемма 8. *Для любого* $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 4m-1\}$

$$\gamma'_k = \frac{1}{4m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-2} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta'_{2^l}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4m}\left(1 + (-1)^k\beta'_{2m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta'_m\right) + \sum_{l=2}^{n-4}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta'_{2^l}\right) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2m}}\left(\alpha^{-4k}\beta'_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\alpha^{-2k}\beta'_1\right)\right).$$

В частности,

$$\gamma'_0 = \frac{1}{4m}\left(1 + \beta'_{2m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta'_m) + \sum_{l=2}^{n-4}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}(\beta'_{2^l}) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2m}}(\beta'_2) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}(\beta'_1)\right),$$
$$\gamma'_{2m} = \frac{1}{4m}\left(1 + \beta'_{2m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta'_m) + \sum_{l=2}^{n-4}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}(\beta'_{2^l}) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2m}}(\beta'_2) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}(\beta'_1)\right),$$
$$\gamma'_m = \frac{1}{4m}\left(1 + \beta'_{2m} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta'_m) + \sum_{l=2}^{n-4}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}(\beta'_{2^l}) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2m}}(\beta'_2) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}(i\beta'_1)\right).$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Лемма 9. *Для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$ *коэффициент* γ'_k *— целое число тогда и только тогда, когда* γ'_{k+2m} *— целое число. Более точно*

$$\gamma'_{k+2m} = \gamma'_k - \frac{1}{2m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\alpha^{-2k}\beta'_1\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\alpha^{-2k}\beta'_1\right)\right) \in \mathbb{Z},$$

в частности

$$\gamma'_{2m} = \gamma_0 - \frac{1}{2m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}(\beta'_1)\right).$$

Также если

$$\beta'_1 = a'_0 + \sum_{j=1}^{m-1} a'_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где $a'_j \in \mathbb{Z}$ *для всех* $\{0,1,\ldots,m-1\}$*, причём* a'_0 *нечётно, то для любого* $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$

$$\gamma'_{k+2m} = \gamma'_k - \begin{cases} a'_0 & \text{при } k=0, \\ 0 & \text{при } k=m, \\ a'_k & \text{при } k \in \{1,2,\ldots,m-1\}, \\ -a'_{4m-k} & \text{при } k \in \{m+1,m+2,\ldots,3m-1\}, \end{cases}$$

в частности

$$\begin{aligned} &\gamma'_{2m} = \gamma'_0 - a'_0 \text{ и потому разной чётности}, \\ &\gamma'_{3m} = \gamma'_m. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 4. □

Рассмотрим естественное вложение $\mathbb{Z}H$ в $\mathbb{Z}G$

$$\sum_{l=0}^{4m-1} \delta_l x^{2l} \hookrightarrow \sum_{l=0}^{4m-1} \delta_l x^{2l} + \sum_{l=0}^{4m-1} 0 \cdot x^{2l+1}.$$

Пусть

$$w = \sum_{j=0}^{4m-1} \beta'_j e'_j = \sum_{k=0}^{4m-1} \gamma'_k x^{2k} \in V(\mathbb{Z}H).$$

Тогда считаем, что

$$w = \sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{8m-1} \gamma_k x^k \in V(\mathbb{Z}G),$$

где для любого $k \in \{0,1,\ldots,8m-1\}$

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma'_l & \text{при } k=2l, \\ 0 & \text{при } k=2l+1. \end{cases}$$

Надо найти соответствующие коэффициенты β_j для всех $j \in \{0,1,\ldots,8m-1\}$. Воспользуемся формулами $(*)$ из первого раздела этой статьи:

$$\beta_j = \sum_{l=0}^{8m-1} \alpha^{jl}\gamma_l = \sum_{l=0}^{4m-1} \alpha^{j\cdot 2l}\gamma_{2l} + \sum_{l=0}^{4m-1} \alpha^{j\cdot(2l+1)}\gamma_{2l+1} = \sum_{l=0}^{4m-1} (\alpha^2)^{jl}\gamma'_l.$$

Пусть $j \in \{0,1,\ldots,4m-1\}$, тогда

$$\beta_j = \sum_{l=0}^{4m-1} (\alpha^2)^{jl}\gamma'_l = \beta'_j.$$

Если $p \in \{4m, 4m+1,\ldots,8m-1\}$, то $p = 4m+j$, где $j \in \{0,1,\ldots,4m-1\}$. Коэффициенты

$$\beta_p = \beta_{4m+j} = \sum_{l=0}^{4m-1} (\alpha^2)^{(4m+j)l}\gamma'_l = \sum_{l=0}^{4m-1} (\alpha^{2\cdot 4ml}(\alpha^2)^{jl}\gamma'_l = \sum_{l=0}^{4m-1} (\alpha^2)^{jl}\gamma'_l = \beta'_j.$$

Таким образом, для любого $j \in \{0,1,\ldots,4m-1\}$ получим

$$\beta_j = \beta_{4m+j} = \beta'_j.$$

В частности, $\beta_0 = \beta_{4m} = \beta'_0 = 1$.

5. Подгруппа $On(G)$

В этом разделе будем рассматривать только элементы из $On(G)$, т. е.

$$\sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{8m-1} \gamma_k x^k \in V(\mathbb{Z}G) \quad \text{с условием} \quad \beta_1 = 1.$$

Наша цель состоит в следующем. Нужно найти условия для коэффициентов $\beta_2 = \beta_{2^1},\ldots,\beta_{4m} = \beta_{2^{n-1}}$, которые обеспечивали бы целочисленность коэффициентов γ_k для любого $k \in \{0,1,2,3,\ldots,8m-1\}$.

Лемма 10. *Для любого* $k \in \{0,1,2,3,\ldots,8m-1\}$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{8m}\left(1 + (-1)^k\beta_{4m} + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_{2m}\right) + \sum_{l=0}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{8m}\Bigg(1 + (-1)^k\beta_{4m} + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right) + \\
&\qquad + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\alpha^{-2k}\beta_2\right) + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\right)\Bigg).
\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right) + 4m\right), \\
\gamma_{4m} &= \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-4m\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right) - 4m\right), \\
\gamma_{2m} &= \frac{1}{8m}\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2m\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{8m}\left(1 + \beta_{4m} + \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right) + \sum_{l=2}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right) - \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}}\left(\beta_2\right)\right).
\end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Лемма 11. *Для любого* $k \in \{0,1,\ldots,4m-1\}$ *коэффициент* γ_k *— целое число тогда и только тогда, когда* γ_{k+4m} *— целое число. Более точно*

$$\gamma_{k+4m} = \begin{cases} \gamma_0 - 1 & \textit{при } k = 0, \\ \gamma_k & \textit{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Лемма 12. *При введённых выше обозначениях выполняются следующие утверждения:*

1) $\beta_{2m} = 1$, *в частности* $\beta_{4m} = 1$;
2) $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+1} = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+3} = 0$;
3) $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+2} = 0$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j} = 1$;
4) $\gamma_0 = \dfrac{1}{8m} \left(4 + 4m + \sum\limits_{l=1}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}} (\beta_{2^l}) \right)$;
5) *для любого* $k \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}$
$$\gamma_{2k} = \frac{1}{8m} \left(2(1-(-1)^k) + \sum_{l=1}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}} \left(\alpha^{-2k\cdot 2^l} \beta_{2^l} \right) \right),$$
в частности
$$\gamma_{2m} = \frac{1}{8m} \left(4 + \sum_{l=2}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}} (\beta_{2^l}) - \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{4m}} (\beta_2) \right);$$
6) *для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$
$$\gamma_{2k+1} = \frac{1}{8m} \sum_{l=1}^{n-3} \operatorname{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}} \left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l} \beta_{2^l} \right).$$

Доказательство. 1) По формулам $(*)$ из первого раздела
$$\beta_{2m} = \sum_{j=0}^{8m-1} i^j \gamma_j = \sum_{j=0}^{2m-1} i^{4j} \gamma_{4j} + \sum_{j=0}^{2m-1} i^{4j+1} \gamma_{4j+1} + \sum_{j=0}^{2m-1} i^{4j+2} \gamma_{4j+2} +$$
$$+ \sum_{j=0}^{2m-1} i^{4j+3} \gamma_{4j+3} = [\gamma_{4m} = \gamma_0 - 1 \text{ по лемме } 11] =$$
$$= \gamma_0 + \gamma_{4m} + 2\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_{4j} + 2i \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+1} - 2\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+2} - 2i \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+3} =$$
$$= 2\gamma_0 - 1 + 2\left(\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+2} \right) + 2i \left(\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+1} - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+3} \right) =$$
$$= -1 + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+2} \right) + 2i \left(\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+1} - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+3} \right).$$

По лемме 10
$$\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+3}, \text{ поэтому } \beta_{2m} = -1 + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{4j+2} \right).$$

Мы рассматриваем нормализованную группу единиц, поэтому
$$1 = \sum_{j=0}^{2m-1} \gamma_{2j}.$$

Отсюда

$$\beta_{2m} = -1 + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2}\right) = -1 + 2\left(\sum_{j=0}^{2m-1}\gamma_{2j} - 2\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2}\right) =$$
$$= -1 + 2\left(1 - 2\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2}\right) = 1 - 4\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4).$$

Так как $\beta_{2m} \in U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, i, -1, -i\}$, то $\beta_{2m} = 1$.

2) По формулам $(*)$ из первого раздела

$$\beta_0 = 1 = \sum_{j=0}^{8m-1}\alpha^{j\cdot 0}\gamma_j = \sum_{j=0}^{8m-1}\gamma_j = \gamma_0 + \gamma_{4m} + 2\left(\sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_{2l+1} + \sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_{2l}\right),$$

$$\beta_{4m} = 1 = \sum_{j=0}^{8m-1}\alpha^{4m}\gamma_j = \sum_{j=0}^{8m-1}(-1)^{4m}\gamma_j = \gamma_0 + \gamma_{4m} + 2\left(-\sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_{2l+1} + \sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_{2l}\right).$$

Вычтем эти равенства, получим

$$\beta_0 - \beta_{4m} = 0 = 4\sum_{l=0}^{2m-1}\gamma_{2l+1}, \text{ т. е. } \sum_{j=0}^{2m-1}\gamma_{2j+1} = 0,$$

и при доказательстве первого утверждения получили, что

$$\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+1} = \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+3}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+1} = \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+3} = 0.$$

3) Для элемента нормализованной группы единиц

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\gamma_{2j} = 1,$$

а при доказательстве первого утверждения получили, что

$$1 = \beta_{2m} = -1 + 2\left(\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2}\right).$$

Снова используя доказательство первого утверждения, получим

$$1 = \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j} - \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2} = 1 - 2\sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2} \iff \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j+2} = 0 \ \text{ и } \sum_{j=0}^{m-1}\gamma_{4j} = 1.$$

4)–6) Равенства получаются очевидным образом при подстановке в выражения из леммы 11 значения $\beta_{2m} = 1$. $\square$

Пусть $v \in On(G)$ и

$$v = \sum_{k=0}^{8m-1} \gamma_k x^k = \sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j = e_0 + \sum_{j=0}^{4m-1} e_{2j+1} + \sum_{j=1}^{4m-1} \beta_{2j} e_{2j}.$$

Определим отображение

$$\psi : On(G) \to \mathbb{Q}H$$

следующим образом:

$$\psi(v) = e_0' + \sum_{j=1}^{4m-1} \beta_{2j} e_j' = \sum_{k=0}^{4m-1} \gamma_k' x^{2k}.$$

Ясно, что $\psi(v) \in U(I(\mathbb{Q}H))$.

Лемма 13. *Отображение ψ является инъективным гомоморфизмом группы $On(G)$ в группу $V(\mathbb{Z}H)$. Кроме того, для любого $k \in \{0, 1, \ldots, 4m-1\}$*

$$\gamma_k' = \begin{cases} 2\gamma_0 - 1 & \text{при } k = 0, \\ 2\gamma_k & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

В частности, $\psi(On(G)) \leqslant Tw(H)$.

Предложение 3. *Отображение $\psi : On(G) \to Tw(H)$ является изоморфизмом групп.*

6. Подгруппа $Tw(G)$

Рассмотрим единицу группы из $Tw(G) < V(\mathbb{Z}G)$, для которой зафиксируем обозначения:

$$\sum_{j=0}^{8m-1} \beta_j e_j = 1 + 2 \sum_{k=0}^{8m-1} \delta_k x^k.$$

Лемма 14. *При введённых выше обозначениях*

1) $\beta_{4m} = 1$;

2) $\displaystyle\sum_{j=0}^{4m-1} \delta_{2j+1} = 0$;

3) $\displaystyle\sum_{j=0}^{4m-1} \delta_{2j} = 0$;

4) $\displaystyle\delta_0 = \frac{1}{16m}\left(2 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_{2m}) + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}(\beta_{2^l})\right) - 1$;

5) *для любого $k \in \{1, 2, \ldots, 4m-1\}$*

$$\delta_{2k} = \frac{1}{16m}\left(2 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left((-1)^k \beta_{2m}\right) + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l} \beta_{2^l}\right)\right);$$

6) *для любого $k \in \{0, 1, \ldots, 4m-1\}$*

$$\delta_{2k+1} = \frac{1}{16m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left((-1)^{-k}(-i)\beta_{2m}\right) + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l} \beta_{2^l}\right)\right).$$

Доказательство. 1) Имеем

$$1=\beta_0=1+2\sum_{j=0}^{8m-1}\delta_j=1+2\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j}+2\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j+1},$$
$$\beta_{4m}=\sum_{j=0}^{8m-1}(-1)^j\gamma_j=1+2\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j}-2\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j+1}.$$

Поэтому

$$1-\beta_{4m}=4\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j+1},$$

а значит, $\beta_{4m}\equiv 1 \pmod 4$. Так как $\beta_{4m}\in\{1,-1\}$, то $\beta_{4m}=1$.

2), 3) По доказательству первого пункта этой леммы

$$\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j+1}=0,\quad \text{значит,}\quad 1=\beta_0=\beta_{4m}=1+2\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{4m-1}\delta_{2j}=0.$$

4) В самом деле,

$$1+2\delta_0=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right)=\frac{1}{8m}\left(1+1+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(2+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right).$$

5) Для любого $k\in\{1,2,3,\ldots,2m-1\}$

$$2\delta_{2k}=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(1+1+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-2k}\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(2+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left((-1)^k\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right).$$

6) Для любого $k\in\{0,1,2,3,\ldots,2m-1\}$

$$2\delta_{2k+1}=\frac{1}{8m}\left(1+\sum_{l=0}^{n-1}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(1-1+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-(2k+1)}\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8m}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left((-1)^{-k}(-i)\beta_{2m}\right)+\sum_{l=0}^{n-3}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right).$$

□

С помощью несложных преобразований лемму 14 можно уточнить.

Лемма 15. *Имеют место следующие равенства:*

1) $\beta_{2m} = 1$, *в частности* $\beta_{4m} = 1$;
2) $\sum_{j=0}^{2m-1} \delta_{4j+1} = \sum_{j=0}^{2m-1} \delta_{4j+3} = 0$;
3) $\sum_{j=0}^{2m-1} \delta_{4j+2} = \sum_{j=0}^{2m-1} \delta_{4j} = 0$;
4) $\delta_0 = \dfrac{1}{16m}\left(4 + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\beta_{2^l}\right)\right) - 1$;
5) *для любого* $k \in \{1, 2, \ldots, 4m-1\}$

$$\delta_{2k} = \frac{1}{16m}\left(2(1-(-1)^k) + \sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-2k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right);$$

6) *для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 4m-1\}$

$$\delta_{2k+1} = \frac{1}{16m}\sum_{l=0}^{n-3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{n-l}}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right).$$

7. Подгруппа $Zr(G)$

Напомним, что по определению $\chi_1(x^j) = \alpha^j$ для любого $j = 1, 2, \ldots 2^n - 1$. Поэтому в силу локального соответствия Хигмана группа

$$Zr(G) = \{u_{\chi_1}(\lambda) \in V(\mathbb{Z}G) |\, \lambda \in U(\mathbb{Z}[\alpha])\}$$

изоморфна подгруппе из $U(\mathbb{Z}[\alpha])$ при отображении

$$u_{\chi_1}(\lambda) \mapsto \lambda.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}_{8m}$. Положим

$$u_{\chi_1}(\lambda) = 1 + \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}\mathbb{Q}_{8m}} (\sigma(\lambda) - 1)e(\chi_1^\sigma) = \sum_{k=0}^{8m-1} \gamma_k x^k.$$

Лемма 16. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{Q}_{8m}$, *тогда для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 8m-1\}$

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{8m}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}(\lambda - 1), & \text{если } k = 0, \\ \dfrac{1}{8m}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left((\lambda-1)\alpha^{-k}\right), & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Лемма 17. *Пусть* $\beta_1 = \lambda \in U(\mathbb{Z}[\alpha])$, *тогда*

$$u_{\chi_1}(\lambda) \in Zr(G) \iff \begin{cases} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}(\lambda) \\ \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\lambda\alpha^{-k}\right) \end{cases} \equiv \begin{cases} 4m \\ 0 \end{cases} \pmod{8m}$$

для любого $k \in \{0, 1, \ldots, 8m-1\}$.

Введём обозначение $M = \mathbb{Z}[\alpha+\alpha^{-1}] = \mathbb{Z}[\alpha] \cap \mathbb{R}$ и рассмотрим идеал

$$2M = \left\{ 2\delta_0 + \sum_{k=1}^{2m-1} \delta_k(\alpha^k + \alpha^{-k}) \middle| \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2m-1}\} \subset \mathbb{Z} \right\}$$

в кольце M. Пусть отображение $\hat{\nu} : M \to M/2M$ — естественный кольцевой гомоморфизм M на фактор-кольцо $M/2M$. Ограничение $\hat{\nu}$ на $U(M)$ даёт гомоморфизм групп $\nu : U(M) \to U(M/2M)$. Определим группу

$$Tw(M) = \ker \nu = (1 + 2M) \cap U(M).$$

Лемма 18. *Группа $Tw(M)$ является подгруппой группы $U(M)$ индекса, делящего 2^{2m-1}.*

Доказательство. Множество $Tw(M)$ является ядром гомоморфизма, следовательно, это подгруппа. По предложению 2.19 из [1] $|U(M/2M)| = 2^{2m-1}$. □

Лемма 19. *Пусть*

$$\beta_1 = \lambda = a_0 + \sum_{j=1}^{2m-1} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где коэффициенты $a_j \in \mathbb{Z}$ для всех $j \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$, причём a_0 нечётно. Тогда

$$u_{\chi_1}(\lambda) \in Zr(G) \iff \lambda \in Tw(M).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что для любого $k \in \{0, 1, \ldots, 4m-1\}$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{8m}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right) = \begin{cases} 4ma_0 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k = 2m, \\ 4ma_k & \text{при } k \in \{1, 2, \ldots, 2m-1\}, \\ -4ma_{4m-k} & \text{при } k \in \{2m+1, 2m+2, \ldots, 4m-1\}. \end{cases}$$

□

Лемма 20. $|U(M) : Tw(M)| \geqslant 2m = 2^{n-2}$.

Доказательство. Элемент $t = 1 + (\alpha + \alpha^{-1}) + (\alpha^2 + \alpha^{-2})$ является единицей кольца $\mathbb{Z}[\alpha + \alpha^{-1}]$. Ясно, что

$$t^2 \equiv 1 + (\alpha^2 + \alpha^{-2}) + (\alpha^4 + \alpha^{-4}) \pmod 2.$$

По индукции получим для любого натурального k

$$t^{2^k} \equiv 1 + (\alpha^{2^k} + \alpha^{-2^k}) + (\alpha^{2^{k+1}} + \alpha^{-2^{k+1}}) \pmod 2.$$

В частности,

$$t^{2m} \equiv 1 + (\alpha^{2m} + \alpha^{-2m}) + (\alpha^{4m} + \alpha^{-4m}) = 1 + (i - i) + (-1 - 1) = -1 \equiv 1 \pmod 2.$$

Покажем от противного, что $2m$ — наименьшее натуральное число с таким свойством. Для $l \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$ найдём $t^l \equiv 1 \pmod 2$. Если l нечётно, то из взаимной простоты l и $2m = 2^{n-2}$ следует, что $t \equiv 1 \pmod 2$. Но это не так, следовательно, l чётно. Тогда

$$t^m \equiv 1 + (\alpha^m + \alpha^{-m}) + (\alpha^{2m} + \alpha^{-2m}) = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) + \\ + (i - i) = 1 + \sqrt{2} \pmod 2.$$

Отсюда $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Z}[\alpha]$, что невозможно, ибо $\frac{\sqrt{2}}{2}$ не является целым алгебраическим числом. □

Из работы [3] следует

Лемма 21. *При введённых выше обозначениях* $V(ZG) = \langle x \rangle \times Zr(G) \times On(G)$.

Далее рассматриваются случаи групп порядков 16 и 32. В этих случаях группа круговых единиц [4] полей $\mathbb{Q}(\zeta_{16})$ и $\mathbb{Q}(\zeta_{32})$ совпадает с группой всех единиц колец целых этих полей (это получается на основе результатов работ [5–9] с использованием [10–12]).

8. Подгруппа $Zr(G)$ для группы порядка 16

Рассмотрим группу $G = \langle x | x^{16} = 1 \rangle$ порядка 16.

Лемма 22. *Пусть* $2^n = 8m = 16$*, тогда* $n = 4, m = 2$ *и для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 15\}$

$$\gamma_k = \frac{1}{16}\left(1 + \sum_{l=0}^{3} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{4-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \\ = \frac{1}{16}\left(1 + (-1)^k\beta_8 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_4\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left(\alpha^{-2k}\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right).$$

В частности,

$$\gamma_0 = \frac{1}{16}\left(1 + \beta_8 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_4) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_2) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_1)\right),$$
$$\gamma_8 = \frac{1}{16}\left(1 + \beta_8 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_4) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_2) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_1)\right),$$
$$\gamma_4 = \frac{1}{16}\left(1 + \beta_8 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_4) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_2) - \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(i\beta_1)\right).$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Лемма 23. *Пусть* $2^n = 8m = 16$*, тогда* $n = 4, m = 2$ *и для любого* $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ *коэффициент* γ_k *— целое число тогда и только тогда, когда* γ_{k+8} *— целое число. Более точно*

$$\gamma_{k+8} = \gamma_k - \frac{1}{8}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{8}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \in \mathbb{Z},$$

в частности $\gamma_8 = \gamma_0 - \frac{1}{8}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_1)\right)$.

Также если

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{3} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где $a_j \in \mathbb{Z}$ для $j \in \{0,1,2,3\}$, причём a_0 нечётно, то для $k \in \{0,1,\dots,7\}$

$$\gamma_{k+8} = \gamma_k - \begin{cases} a_0 & \text{при } k=0,\\ 0 & \text{при } k=4,\\ a_k & \text{при } k\in\{1,2,3\},\\ -a_{8-k} & \text{при } k\in\{5,6,7\}. \end{cases}$$

В частности, $\gamma_8 = \gamma_0 - a_0$ и поэтому разной чётности, $\gamma_{12} = \gamma_4$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 4. □

Лемма 24. *Пусть $2^n = 8m = 16$, тогда $n = 4, m = 2$ и выполняются следующие утверждения:*

1) $\beta_4 = 1,\ \beta_8 = 1$;
2) $\sum_{j=0}^{3}\delta_{4j+1} = \sum_{j=0}^{3}\delta_{4j+3} = 0$;
3) $\sum_{j=0}^{3}\delta_{4j+2} = \sum_{j=0}^{3}\delta_{4j} = 0$;
4) $\delta_0 = \frac{1}{32}\left(4 + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_2) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_1)\right) - 1$;
5) *для любого $k \in \{1,2,\dots,7\}$*
$$\delta_{2k} = \frac{1}{32}\left(2(1-(-1)^k) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left((-i)^k\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-2k}\beta_1\right)\right);$$
6) *для любого $k \in \{0,1,\dots,7\}$*
$$\delta_{2k+1} = \frac{1}{32}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2}\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-(2k+1)}\beta_1\right)\right).$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 15. □

В работе [13] доказано следующее утверждение (теорема 1).

Лемма 25. *Группа K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{16}$ имеет вид*

$$K = \langle\alpha\rangle \times \langle t_1^4\rangle \times \langle t_1^2 t_3^2\rangle \times \langle t_3^3 t_5\rangle,\ \text{где } t_j = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}.$$

С его помощью докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для группы $G = \langle x | x^{16} = 1\rangle$ при введённых выше обозначениях имеем $Zr(G) = \langle u_1\rangle \times \langle u_2\rangle \times \langle u_3\rangle$, где*

$$\begin{aligned} u_1 &= 42 + 38(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) + 29(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + \\ &\quad + 16(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 41x^8,\\ u_2 &= 4 - 2(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) - 4(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + \\ &\quad + 6(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 6x^8,\\ u_3 &= 6 - 2(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) - 4(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + \\ &\quad + 5(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 5x^8. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть

$$u = \sum_{j=0}^{15}\beta_j e_j = \sum_{k=0}^{15}\gamma_k x^k \in Zr(G),$$

тогда $u = u_{\chi_1}(\lambda)$, где $\lambda \in U(\mathbb{Z}[\alpha])$. По лемме 25 в качестве элемента λ нужно рассматривать

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= t_1^4 = 83 + 76s_1 + 58s_2 + 32s_3,\\ \lambda_2 &= t_1^2 t_3^2 = 7 - 2s_1 - 4s_2 + 6s_3,\\ \lambda_3 &= t_3^3 t_5 = 11 - 4s_1 - 8s_2 + 10s_3.\end{aligned}$$

Элементы t_1, $t_1^2t_3^2$, $t_3^3t_5$ были вычислены с помощью системы компьютерной алгебры GAP.

По лемме 16 для элемента $\lambda = a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 \in \mathbb{Q}_{16}$ получим

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1}{16}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(a_0 - 1 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3) = 1 + (a_0 - 1)/2;$$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}((\lambda-1)\alpha^{-k}) = \begin{cases} a_3\cdot 8, k=1, k=15,\\ a_2\cdot 8, k=2, k=14,\\ a_1\cdot 8, k=3, k=13,\\ 0, k=4, k=12,\\ -a_1\cdot 8, k=5, k=11,\\ -a_2\cdot 8, k=6, k=10,\\ -a_3\cdot 8, k=7, k=9,\\ -(a_0-1)\cdot 8, k=8,\end{cases} \qquad \gamma_k = \begin{cases} a_3/2, k=1, k=15,\\ a_2/2, k=2, k=14,\\ a_1/2, k=3, k=13,\\ 0, k=4, k=12,\\ -a_1/2, k=5, k=11,\\ -a_2/2, k=6, k=10,\\ -a_3/2, k=7, k=9,\\ -(a_0-1)/2, k=8.\end{cases}$$

Подставим результаты вычислений в формулу

$$u = \sum_{k=0}^{15} \gamma_k x^k.$$

Для элемента $\lambda_1 = t_1^4 = 83 + 76s_1 + 58s_2 + 32s_3$ получим

$$u_1 = 42 + 38(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) + 29(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + 16(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 41x^8.$$

Для $\lambda_2 = t_1^2t_3^2 = 7 - 2s_1 - 4s_2 + 6s_3$ получим элемент

$$u_2 = 4 - 2(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) - 4(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + 6(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 6x^8.$$

Для $\lambda_3 = t_3^3t_5 = 11 - 4s_1 - 8s_2 + 10s_3$ получим

$$u_3 = 6 - 2(x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}) - 4(x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}) + 5(x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}) - 5x^8.$$

□

9. Подгруппа $Zr(G)$ для группы порядка 32

Рассмотрим группу $G = \langle x | x^{32} = 1\rangle$ порядка 32.

Лемма 26. *Пусть $2^n = 8m = 32$, тогда $n = 5$, $m = 4$ и для любого $k \in \{0, 1, \ldots, 31\}$*

$$\gamma_k = \frac{1}{32}\left(1 + \sum_{l=0}^{4} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{2^{5-l}}}\left(\alpha^{-k\cdot 2^l}\beta_{2^l}\right)\right) = \frac{1}{32}\Bigg(1 + (-1)^k\beta_{16} + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}\left(i^{-k}\beta_8\right) +$$
$$+ \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left(\alpha^{-4k}\beta_4\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-2k}\beta_2\right) + \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\Bigg).$$

В частности,

$$\gamma_0 = \frac{1}{32}\left(1+\beta_{16}+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_8)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_{2^l})+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_2)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}(\beta_1)\right),$$
$$\gamma_{16} = \frac{1}{32}\left(1+\beta_{16}+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_8)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_4)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_2)-\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}(\beta_1)\right),$$
$$\gamma_8 = \frac{1}{32}\left(1+\beta_{16}+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_4}(\beta_8)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_4)-\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_2)-\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}(i\beta_1)\right).$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2. □

Лемма 27. *Пусть $2^n = 8m = 32$, тогда $n = 5, m = 4$ и для любого $k \in \{0,1,\ldots,15\}$ коэффициент γ_k — целое число тогда и только тогда, когда γ_{k+16} — целое число. Более точно*

$$\gamma_{k+16} = \gamma_k - \frac{1}{16}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{16}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}\left(\alpha^{-k}\beta_1\right)\right) \in \mathbb{Z},$$

в частности $\gamma_{16} = \gamma_0 - \frac{1}{16}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}(\beta_1)\right)$. Также если

$$\beta_1 = a_0 + \sum_{j=1}^{7} a_j(\alpha^j + \alpha^{-j}),$$

где $a_j \in \mathbb{Z}$ для $j \in \{0,1,\ldots,7\}$, причём a_0 нечётно, то для $k \in \{0,1,\ldots,15\}$

$$\gamma_{k+16} = \gamma_k - \begin{cases} a_0 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k = 8, \\ a_k & \text{при } k \in \{1,2,\ldots,7\}, \\ -a_{16-k} & \text{при } k \in \{9,10,\ldots,15\}. \end{cases}$$

В частности, $\gamma_{16} = \gamma_0 - a_0$ и поэтому разной чётности, $\gamma_{24} = \gamma_8$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 4. □

Лемма 28. *Пусть $2^n = 8m = 32$, тогда $n = 5, m = 4$ и выполняются следующие утверждения:*

1) $\beta_8 = 1$;
2) $\sum_{j=0}^{7} \delta_{4j+1} = \sum_{j=0}^{7} \delta_{4j+3} = 0$;
3) $\sum_{j=0}^{7} \delta_{4j+2} = \sum_{j=0}^{7} \delta_{4j} = 0$;
4) $\delta_0 = \frac{1}{64}\left(4+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}(\beta_4)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(\beta_2)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}(\beta_1)\right)-1$;
5) *для любого $k \in \{1,2,\ldots,15\}$*

$$\delta_{2k}=\frac{1}{64}\left(2(1-(-1)^k)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left((-i)^k\beta_4\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-4k}\beta_2\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}\left(\alpha^{-2k}\beta_1\right)\right);$$

6) *для любого $k \in \{0,1,\ldots,15\}$*

$$\delta_{2k+1}=\frac{1}{64}\left(\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_8}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 4}\beta_4\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}\left(\alpha^{-(2k+1)\cdot 2}\beta_2\right)+\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}\left(\alpha^{-(2k+1)}\beta_1\right)\right).$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы 15. □

Далее воспользуемся следующим утверждением [13, теорема 2].

Лемма 29. *Группа K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{32}$ имеет вид*

$$K = \langle\alpha\rangle \times \langle t_1^8\rangle \times \langle t_3^{-1}t_{13}\rangle \times \langle t_5^{-1}t_{11}\rangle \times \langle t_7^{-1}t_9\rangle \times \langle t_1^4t_3^4\rangle \times \langle t_1^6t_7^2\rangle \times \langle t_3^6t_5^2\rangle,$$

где $t_j = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}$ для любого целого j.

Теорема 2. *Для группы $G = \langle x|x^{16} = 1\rangle$ при введённых выше обозначениях*

$$Zr(G) = \langle u_1\rangle \times \langle u_2\rangle \times \langle u_3\rangle \times \langle u_4\rangle \times \langle u_5\rangle \times \langle u_6\rangle \times \langle u_7\rangle, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
u_1 = 19082 &+ 18536(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 16982(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 14640(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 11805(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\
&+ 8768(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 5744(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\
&+ 2828(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 19081x^{16}, \\
u_2 = 4660 &+ 4536(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 4267(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 3856(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 3238(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\
&+ 2542(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 1767(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\
&+ 874(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 4359x^{16}, \\
u_3 = 1370 &- 478(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 284(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 1315(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 708(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\
&- 129(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 1165(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\
&- 950(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 1369x^{16}, \\
u_4 = 250 &+ 225(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 173(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 118(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 60(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\
&+ 10(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 8(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\
&- 3(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 249x^{16}, \\
u_5 = 3332 &- 2734(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 1228(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 623(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\
&+ 3262(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 3059(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\
&+ 1796(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}, \\
u_6 = 3332 &- 623(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 3059(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 1796(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\
&- 2734(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 1228(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\
&+ 3262(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}, \\
u_7 = 3332 &- 1796(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 1228(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 3262(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\
&- 623(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 3059(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\
&- 2734(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть элемент

$$u = \sum_{j=0}^{31} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{31} \gamma_k x^k \in Zr(G),$$

тогда $u = u_{\chi_1}(\lambda)$, где $\lambda \in U(\mathbb{Z}[\alpha])$. По лемме 29 в качестве элемента λ нужно рассматривать

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = t_1^8 = 38163 + 37072s_1 + 33964s_2 + 29280s_3 + 23610s_4 + 17536s_5 + 11488s_6 + \\
&\quad + 5656s_7;\\
&\lambda_2 = t_1^4t_3^4 = 9319 + 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7;\\
&\lambda_3 = t_3^6t_5^2 = 2739 - 956s_1 - 568s_2 + 2630s_3 - 1416s_4 - 258s_5 + 2330s_6 - 1900s_7;\\
&\lambda_4 = t_1^6t_7^2 = 499 + 450s_1 + 346s_2 + 236s_3 + 120s_4 + 20s_5 - 16s_6 - 6s_7;\\
&\lambda_5 = t_5^7t_{11} = 6663 - 5468s_1 + 2456s_2 + 1246s_3 - 4612s_4 + 6524s_5 - 6118s_6 + 3592s_7\\
&\lambda_6 = t_7^7t_9 = 6663 - 1246s_1 - 6118s_2 + 3592s_3 + 4612s_4 - 5468s_5 - 2456s_6 + 6524s_7;\\
&\lambda_7 = t_3^7t_{13} = 6663 - 3592s_1 - 2456s_2 + 6524s_3 - 4612s_4 - 1246s_5 + 6118s_6 - 5468s_7.
\end{aligned}$$

Элементы $t_1^8,\ t_1^4t_3^4,\ t_3^6t_5^2,\ t_1^6t_7^2,\ t_5^7t_{11},\ t_7^7t_9,\ t_3^7t_{13}$ были вычислены с помощью системы компьютерной алгебры GAP.

Для элемента $\lambda = a_0 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 + a_5s_5 + a_6s_7 + a_7s_7 \in \mathbb{Q}_{32}$ по лемме 16 получим

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1}{16}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{16}}(a_0 - 1 + a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + a_4s_4 + a_5s_5 + a_6s_7 + a_7s_7) = 1 + (a_0-1)/2;$$

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}_{32}}((\lambda-1)\alpha^{-k}) = \begin{cases} a_1\cdot 16,\ k=1,\ k=31,\\ a_2\cdot 16,\ k=2,\ k=30,\\ a_3\cdot 16,\ k=3,\ k=29,\\ a_4\cdot 16,\ k=4,\ k=28,\\ a_5\cdot 16,\ k=5,\ k=27,\\ a_6\cdot 16,\ k=6,\ k=26,\\ a_7\cdot 16,\ k=7,\ k=25,\\ 0,\ k=8,\ k=24,\\ -a_7\cdot 16,\ k=9,\ k=23,\\ -a_6\cdot 16,\ k=10,\ k=22,\\ -a_5\cdot 16,\ k=11,\ k=21,\\ -a_4\cdot 16,\ k=12,\ k=20,\\ -a_3\cdot 16,\ k=13,\ k=19,\\ -a_2\cdot 16,\ k=14,\ k=18,\\ -a_1\cdot 16,\ k=15,\ k=17,\\ -(a_0-1)\cdot 16,\ k=16, \end{cases} \qquad \gamma_k = \begin{cases} a_1/2,\ k=1,\ k=31,\\ a_2/2,\ k=2,\ k=30,\\ a_3/2,\ k=3,\ k=29,\\ a_4/2,\ k=4,\ k=28,\\ a_5/2,\ k=5,\ k=27,\\ a_6/2,\ k=6,\ k=26,\\ a_7/2,\ k=7,\ k=25,\\ 0,\ k=8,\ k=24,\\ -a_7/2,\ k=9,\ k=23,\\ -a_6/2,\ k=10,\ k=22,\\ -a_5/2,\ k=11,\ k=21,\\ -a_4/2,\ k=12,\ k=20,\\ -a_3/2,\ k=13,\ k=19,\\ -a_2/2,\ k=14,\ k=18,\\ -a_1/2,\ k=15,\ k=17,\\ -(a_0-1)/2,\ k=16. \end{cases}$$

Подставим все вычисления в формулу $u = \sum_{k=0}^{31}\gamma_k x^k$. Для элемента

$$\lambda_1 = t_1^8 = 38163 + 37072s_1 + 33964s_2 + 29280s_3 + 23610s_4 + 17536s_5 + 11488s_6 + 5656s_7$$

получим

$$\begin{aligned}
u_1 = 19082 &+ 18536(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 16982(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\
&+ 14640(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 11805(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\
&+ 8768(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 5744(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\
&+ 2828(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 19081x^{16}.
\end{aligned}$$

Далее аналогично

$$\lambda_2 = t_1^4 t_3^4 = 9319 + 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7,$$

$$\begin{aligned} u_2 = 4660 &+ 4536(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 4267(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 3856(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 3238(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\ &+ 2542(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 1767(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\ &+ 874(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 4359x^{16}, \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = t_3^6 t_5^2 = 2739 - 956s_1 - 568s_2 + 2630s_3 - 1416s_4 - 258s_5 + 2330s_6 - 1900s_7,$$

$$\begin{aligned} u_3 = 1370 &- 478(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 284(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 1315(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 708(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\ &- 129(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 1165(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\ &- 950(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 1369x^{16}, \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = t_1^6 t_7^2 = 499 + 450s_1 + 346s_2 + 236s_3 + 120s_4 + 20s_5 - 16s_6 - 6s_7,$$

$$\begin{aligned} u_4 = 250 &+ 225(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 173(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 118(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 60(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\ &+ 10(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 8(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\ &- 3(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 249x^{16}, \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = t_5^7 t_{11} = 6663 - 5468s_1 + 2456s_2 + 1246s_3 - 4612s_4 + 6524s_5 - 6118s_6 + 3592s_7,$$

$$\begin{aligned} u_5 = 3332 &- 2734(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) + 1228(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 623(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) + \\ &+ 3262(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 3059(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\ &+ 1796(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}, \end{aligned}$$

$$\lambda_6 = t_7^7 t_9 = 6663 - 1246s_1 - 6118s_2 + 3592s_3 + 4612s_4 - 5468s_5 - 2456s_6 + 6524s_7,$$

$$\begin{aligned} u_6 = 3332 &- 623(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 3059(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 1796(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) + 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\ &- 2734(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) - 1228(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) + \\ &+ 3262(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}, \end{aligned}$$

$$\lambda_7 = t_3^7 t_{13} = 6663 - 3592s_1 - 2456s_2 + 6524s_3 - 4612s_4 - 1246s_5 + 6118s_6 - 5468s_7,$$

$$\begin{aligned} u_7 = 3332 &- 1796(x + x^{-1} - x^{15} - x^{-15}) - 1228(x^2 + x^{-2} - x^{14} - x^{-14}) + \\ &+ 3262(x^3 + x^{-3} - x^{13} - x^{-13}) - 2306(x^4 + x^{-4} - x^{12} - x^{-12}) - \\ &- 623(x^5 + x^{-5} - x^{11} - x^{-11}) + 3059(x^6 + x^{-6} - x^{10} - x^{-10}) - \\ &- 2734(x^7 + x^{-7} - x^9 - x^{-9}) - 3331x^{16}. \end{aligned}$$

$\square$

Заключение

Целью работы было описать группу единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32. Это описание получено в виде разложения в прямое произведение подгрупп.

Для циклической группы $G = G_n = \langle x | x^{2^n} = 1 \rangle$ обозначим через

$$u = \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{2^n-1} \gamma_k x^k$$

элемент группового кольца $\mathbb{Z}G$. Нормализованная группа $V(\mathbb{Z}G)$ единиц кольца $\mathbb{Z}G$ распадается в прямое произведение подгрупп

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle x \rangle \times \langle Zr(G) \rangle \times \langle On(G) \rangle,$$

где

$$Zr(G) = \left\{ \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j e_j \in V(\mathbb{Z}G) \middle| \beta_{2^l} = 1 \text{ для любого } l \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \right\},$$

$$On(G) = \left\{ \sum_{j=0}^{2^n-1} \beta_j e_j \in V(\mathbb{Z}G) \middle| \beta_1 = 1 \right\}.$$

Также найдены порождающие группы $Zr(G)$ для порядков 16 и 32.
Теорема 1. *Пусть* $G = \langle x | x^{16} = 1 \rangle$ *и* $h_j = x^j + x^{-j} - x^{8-j} - x^{-(8-j)}$, *где* $j = 1, 2, 3$. *Тогда* $Zr(G) = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle$, *где*

$$\begin{aligned} u_1 &= 42 + 38h_1 + 29h_2 + 16h_3 - 41x^8, \\ u_2 &= 4 - 2h_1 - 4h_2 + 6h_3 - 6x^8, \\ u_3 &= 6 - 2h_1 - 4h_2 + 5h_3 - 5x^8. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть* $G = \langle x | x^{16} = 1 \rangle$ *и* $h_j = x^j + x^{-j} - x^{16-j} - x^{-(16-j)}$, *где* $j = 1, 2, \ldots 7$. *Тогда* $Zr(G) = \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle \times \langle u_7 \rangle$, *где*

$$\begin{aligned} u_1 =& 19082 + 18536h_1 + 16982h_2 + 14640h_3 + 11805h_4 + 8768h_5 + 5744h_6 + 2828h_7 - \\ & -19081x^{16}, \\ u_2 =& 4660 + 4536h_1 + 4267h_2 + 3856h_3 + 3238h_4 + 2542h_5 + 1767h_6 + 874h_7 - 4359x^{16}, \\ u_3 =& 1370 - 478h_1 - 284h_2 + 1315h_3 - 708h_4 - 129h_5 + 1165h_6 - 950h_7 - 1369x^{16}, \\ u_4 =& 250 + 225h_1 + 173h_2 + 118h_3 + 60h_4 + 10h_5 - 8h_6 - 3h_7 - 249x^{16}, \\ u_5 =& 3332 - 2734h_1 + 1228h_2 + 623h_3 - 2306h_4 + 3262h_5 - 3059h_6 + 1796h_7 - 3331x^{16}, \\ u_6 =& 3332 - 623h_1 - 3059h_2 + 1796h_3 + 2306h_4 - 2734h_5 - 1228h_6 + 3262h_7 - 3331x^{16}, \\ u_7 =& 3332 - 1796h_1 - 1228h_2 + 3262h_3 - 2306h_4 - 623h_5 + 3059h_6 - 2734h_7 - 3331x^{16}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. **Алеев, Р. Ж.** Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Р. Ж. Алеев. — Челябинск, 2000. — 355 с.
2. **Кэртис, Ч.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр : пер. с англ. / Ч. Кэртис, И. Райнер. — М. : Наука, 1969. — 668 с.

3. **Алеев, Р. Ж.** Индуктивный подход к описанию групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп / Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, В. Н. Пузач // Мальцевские чтения: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 75-летию Ю. Л. Ершова. Новосибирск, 3–7 мая 2015 г. — Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2015. — С. 81.
4. **Sinnott, W.** Sinnott W. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field / W. Sinnott // Annals of Mathematics. — 1978. — Vol. 108, no. 1. — P. 107–134.
5. **Miller, J. C.** Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem / J. C. Miller // Acta Arithmetica. — 2014. — Vol. 164, no. 4. — P. 381–397.
6. **Miller, J. C.** Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor / J. C. Miller // LMS J. of Computation and Mathematics. — 2014. — Vol. 17, special iss. A. — P. 404–417.
7. **Van der Linden, F. J.** Class number computations of real Abelian number fields / F. J. van der Linden // Mathematics of Computations. — 1982. — Vol. 39, no. 160. — P. 693–707.
8. **Masley, J. M.** Solution of small class number problems for cyclotomic fields / J. M. Masley // Compositio Mathematica. — 1976. — Vol. 33, fasc. 2. — P. 179–186.
9. **Fukuda, T.** Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$ / T. Fukuda, K. Komatsu // III Intern. J. of Number Theory. — 2011. — Vol. 7, no. 6. — P. 1627–1635.
10. **Алеев, Р. Ж.** Порождающие группы круговых единиц / Р. Ж. Алеев, В. С. Такшеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2008. — № 6 (107). Математика. Механика. Информатика. Вып. 10. — С. 121–129.
11. **Bass, H.** Generators and relations for cyclotomic units / H. Bass // Nagoya Mathematical J. — 1966. — Vol. 27, no. 2. — P. 401–407.
12. **Виноградов, И. М.** Основы теории чисел : учеб. пособие. — 12-е изд., стер. / И. М. Виноградов. — СПб. : Лань, 2009. — 176 с.
13. **Алеев, Р. Ж.** Сравнение по модулю 2 круговых единиц в полях Q_{16} и Q_{32} / Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Е. А. Христенко // Челяб. физ.-мат. журн. — 2016. — Т. 1, вып. 4. — С. 8–29.

Поступила в редакцию 21.10.2016
После переработки 07.11.2016

Сведения об авторах

Алеев Рифхат Жалялович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет; профессор кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: aleev@csu.ru.

Митина Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет; доцент кафедры прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: ovm@csu.ru.

Ханенко Татьяна Александровна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: tanja_1110_94@mail.ru4@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 4. P. 30–55.

FINDING OF UNITS FOR INTEGER GROUP RINGS OF ORDERS 16 AND 32 CYCLIC GROUPS

R.Zh. Aleev[1,2,a], **O.V. Mitina**[1,2,b], **T.A. Khanenko**[1,c]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *ovm@csu.ru;* [c] *tanja_ 1110_ 94@mail.ru*

The groups of integer group rings units for cyclic groups of orders 16 and 32 are described. This description is obtained as a direct product of their subgroups. Generators of one of the subgroups are found for orders 16 and 32.

Keywords: *group ring, group ring unit, cyclic group, primitive root, track, character.*

References

1. **Aleev R.Zh.** *Tsentral'nye edinitsy tselochislennykh gruppovykh kolets konechnykh grupp* [Central units of finite groups integral group rings. Thesis]. Chelyabinsk, 2000. 355 p. (In Russ.).
2. **Curtis Ch.W., Reiner I.** *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Providence, Rhode Island, AMS Chelsea Publ., 2006. 689 p.
3. **Aleev R.Zh., Mitina O.V., Puzach V.N.** Induktivnyy podkhod k opisaniyu grupp edinits tselochislennykh gruppovykh kolets tsiklicheskikh 2-grupp [An inductive approach to the description of the units groups of units for integer group rings of cyclic 2-groups]. *Abstracts of the International Conference "Mal'tsev meeting"*, dedicated to 75th anniversary of Yu.L. Ershov, May 3–7, 2015, Novosibirsk. Novosibirsk, 2015. P. 81. (In Russ.).
4. **Sinnott W.** On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field. *Annals of Mathematics*, 1978, vol. 108, no. 1, pp. 107–134.
5. **Miller J.C.** Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem. *Acta Arithmetica*, 2014, vol. 164, no. 4, pp. 381–397.
6. **Miller J.C.** Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 2014, vol. 17, special iss. A, pp. 404–417.
7. **Van der Linden F. J.** Class number computations of real Abelian number fields. *Mathematics of Computations*, 1982, vol. 39, no. 160, pp. 693–707.
8. **Masley J.M.** Solution of small class number problems for cyclotomic fields. *Compositio Mathematica*, 1976, vol. 33, fasc. 2, pp. 179–186.
9. **Fukuda T., Komatsu K.** Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$. *III International Journal of Number Theory*, 2011, vol. 7, no. 6, pp. 1627–1635.
10. **Aleev R.Zh., Taksheeva V.S.** Porozhdayushchiye gruppy krugovykh edinits [Generators of the group of cyclotomic units]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2008, no. 6 (107), pp. 121–129. (In Russ.).
11. **Bass H.** Generators and relations for cyclotomic units. *Nagoya Mathematical Journal*, 1966, vol. 27, no. 2, pp. 401–407.
12. **Vinogradov I.M.** *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of number theory]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009. 176 p. (In Russ.).
13. **Aleev R.Zh., Mitina O.V., Khristenko E.A.** Sravneniye po modulyu 2 krugovykh yedinits v polyakh Q_{16} i Q_{32} [Congruence modulo 2 of circular units in the fields Q_{16} and Q_{32}]. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal* [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal], 2016, vol. 1, iss. 4, pp. 8–29.

Accepted article received 21.10.2016
Corrections received 07.11.2016