МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 8–29.

УДК 512.5

СРАВНЕНИЕ ПО МОДУЛЮ 2 КРУГОВЫХ ЕДИНИЦ В ПОЛЯХ Q_{16} И Q_{32}

Р. Ж. Алеев[1,2,a], **О. В. Митина**[1,2,b], **Е. А. Христенко**[1,c]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет*
(национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *ovm@csu.ru;* [c] *nice.katrin94@mail.ru*

В данной работе изучается поведение единиц (обратимых элементов) колец целых 2-круговых полей. В частности, рассмотрена сравнимость по модулю 2 для круговых единиц полей Q_{16} и Q_{32}.

Ключевые слова: *групповое кольцо, единица группового кольца, циклическая группа, примитивный (первообразный) корень.*

Введение

Эта работа является вспомогательной для изучения групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп. Группы единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 2 и 4 тривиальны, для порядка 8 имеется полное описание группы единиц её целочисленного группового кольца, например, можно найти информацию об этом в [1]. Поэтому будут исследоваться циклические 2-группы порядка $2^n \geqslant 16$. Для группы порядка 2^n полями характеров будут круговые поля Q_{2^k} для $k \leqslant n$, причём в случае циклической группы встретится любое такое k.

Цель работы состоит в изучении поведения единиц (колец целых) 2-круговых полей. Сформулируем более точно. Пусть F — подполе поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{Z}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел. Обозначим через $I(F) = F \cap \overline{\mathbb{Z}}$ кольцо целых поля F, $U(I(F))$ — группа единиц кольца $I(F)$.

Если круговое поле получено присоединением к полю $\mathbb{Q}$ первообразного (примитивного) корня из 1 степени 2^n, то такое поле будем обозначать как Q_{2^n} или $Q(\zeta_{2^n})$, где ζ_{2^n} — первообразный корень из 1 степени 2^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Отметим, что $Q = Q_1 = Q_2$ и $Q_4 = Q(i)$ — поле гауссовых чисел. Согласно [2], кольцом целых 2-кругового поля $Q_{2^n} = Q(\zeta_{2^n})$ является множество

$$\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}] = \{f(\zeta_{2^n}) \mid f \in \mathbb{Z}[t]\}$$

всех многочленов от ζ_{2^n} с целыми коэффициентами. Хорошо известно, что

$$I(Q) = Z \quad \text{и} \quad U(Z) = \langle -1 \rangle,$$
$$I(Q_4)) = Z[i] \quad \text{и} \quad U(Z[i]) = \langle i \rangle \cong Z_4.$$

1. Круговые единицы

1.1. Общие сведения

Определение 1. Пусть ζ_{2^n} — первообразный корень из единицы степени 2^n, где $n = 1, 2, 3, \ldots,$ $P = \langle 1 - \zeta_{2^n}^k \mid k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\} \rangle$ — подгруппа по умножению мультипликативной группы $\mathbb{Q}_{2^n}^*$ поля $\mathbb{Q}_{2^n}$. Назовём *группой круговых единиц поля* $\mathbb{Q}_{2^n}$ группу $K = P \cap U(\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}])$, где $U(\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}])$ — группа единиц (обратимых элементов) кольца $\mathbb{Z}[\zeta_{2^n}]$.

Для удобства при целых $n \geqslant 3$ и $m = 1, 2, \ldots$ обозначим $2^n = 8m$, т. е. $m = 2^{n-3}$.

Лемма 1. *Ранг группы $U(\mathbb{Z}[\zeta_{8m}])$ единиц кольца целых $\mathbb{Z}[\zeta_{8m}]$ кругового поля $\mathbb{Q}_{8m}$ равен $2m - 1$.*

Доказательство. Если $\widetilde{\mathbb{Q}}$ — расширение Галуа поля $\mathbb{Q}$, $[\tilde{Q} : Q]$ — степень этого расширения, то ранг r группы единиц кольца целых поля $\widetilde{\mathbb{Q}}$ вычисляется по следующей формуле ([1], лемма 1.6):

$$r = \begin{cases} [\widetilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] - 1, & \text{если поле } \tilde{Q} \text{ действительно}, \\ \dfrac{[\widetilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]}{2} - 1, & \text{если поле } \tilde{Q} \text{ комплексно}. \end{cases}$$

Тогда

$$r(U(\mathbb{Z}[\zeta_{8m}])) = \frac{\phi(2^n)}{2} - 1 = \frac{2^{n-1}}{2} - 1 = 2^{n-2} - 1 = 2m - 1.$$

□

Следствие 1. *По лемме 1 для $m = 2$ и $m = 4$ имеем:*

1) *ранг группы $U(\mathbb{Z}[\zeta_{16}])$ единиц кольца целых $\mathbb{Z}[\zeta_{16}]$ кругового поля $\mathbb{Q}_{16}$ равен* 3;
2) *ранг группы $U(\mathbb{Z}[\zeta_{32}])$ единиц кольца целых $\mathbb{Z}[\zeta_{32}]$ кругового поля $\mathbb{Q}_{32}$ равен* 7.

1.2. Полезные последовательности

1.2.1. Последовательность $\{s_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$

Введём следующие обозначения:

1. Положим $\zeta_{8m} = \alpha$ и, не ограничивая общности, будем считать, что
$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{8m}} = \cos\frac{2\pi}{8m} + i\sin\frac{2\pi}{8m}.$$
Тогда, в частности, $\alpha^{4m} = -1$, $\alpha^{2m} = i$ и $\alpha^m = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.
2. Для любого целого j положим $s_j = \alpha^j + \alpha^{-j}$.

Лемма 2. *Последовательность $\{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ имеет следующие свойства:*

1. *Последовательность $\{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ периодична с периодом $8m$ и*
$$s_0 = 2,\ s_{4m} = -2,\ s_{2m} = s_{6m} = 0,$$
$$s_m = s_{7m} = \sqrt{2},\ s_{3m} = s_{5m} = -\sqrt{2}.$$
2. *Набор $(s_0, s_1, \ldots, s_{8m})$ симметричен относительно центра, то есть для $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 4m\}$ $s_{8m-j} = s_j$. Набор $(s_0, s_1, \ldots, s_{4m})$ антисимметричен относительно центра, т. е. для $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2m\}$ $s_{4m-j} = -s_j$. Таким образом, для любого $j \in \{1, 2, \ldots, 2m - 1\}$ $s_j = -s_{4m-j} = -s_{4m+j} = s_{8m-j}$. Все эти соотношения приведены в табл. 1.*

Таблица 1

Соотношения для элементов s_j, $j \in \mathbb{Z}$

s_0	s_1	$\dots$	s_{m-1}	s_m	s_{m+1}	$\dots$	s_{2m-1}	s_{2m}
2	s_1	$\dots$	s_{m-1}	$\sqrt{2}$	s_{m+1}	$\dots$	s_{2m-1}	0
	s_{2m+1}	$\dots$	s_{3m-1}	s_{3m}	s_{3m+1}	$\dots$	s_{4m-1}	s_{4m}
	$-s_{2m-1}$	$\dots$	$-s_{m+1}$	$-\sqrt{2}$	$-s_{m-1}$	$\dots$	$-s_1$	-2
	s_{4m+1}	$\dots$	s_{5m-1}	s_{5m}	s_{5m+1}	$\dots$	s_{6m-1}	s_{6m}
	$-s_1$	$\dots$	$-s_{m-1}$	$-\sqrt{2}$	$-s_{m+1}$	$\dots$	$-s_{2m-1}$	0
	s_{6m+1}	$\dots$	s_{7m-1}	s_{7m}	s_{7m+1}	$\dots$	s_{8m-1}	s_{8m}
	s_{2m-1}	$\dots$	s_{m+1}	$\sqrt{2}$	s_{m-1}	$\dots$	s_1	2

3. Для любых целых j и l $s_js_l = s_{j+l} + s_{l-j}$, в частности $s_j^2 = s_{2j} + 2$ и
$$s_0^2 = s_{4m}^2 = 4,\ s_{2m}^2 = s_{6m}^2 = 0 \text{ и } s_m^2 = s_{3m}^2 = s_{5m}^2 = s_{7m}^2 = 2.$$

Доказательство. Используем обозначения для s_j.

1. Из того, что

$$\alpha^{4m} = -1,\ \{\alpha^{2m}, \alpha^{6m}\} = \{i, -i\} \text{ и } \alpha^m = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

получим $s_0 = \alpha^0 + \alpha^{-0} = 2$, $s_{4m} = \alpha^{4m} + \alpha^{-4m} = (-1) + (-1) = -2$, $s_{2m} = s_{6m} = \alpha^{2m} + \alpha^{-2m} = i + (-i) = 0$, $s_m = s_{7m} = \alpha^m + \alpha^{-m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + (\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)) = \sqrt{2}$.

2. Для любого целого j

$$s_{8m\pm j} = \alpha^{8m\pm j} + \alpha^{-8m\mp j} = \alpha^{\pm j} + \alpha^{\mp j} = \alpha^j + \alpha^{-j} = s_j.$$

Так как $\alpha^{4m} = -1$, то для любого целого j

$$s_{4m\pm j} = \alpha^{4m\pm j} + \alpha^{-4m\mp j} = -\alpha^{\pm j} - \alpha^{\mp j} = -\alpha^j - \alpha^{-j} = -s_j.$$

3. В самом деле,

$$\begin{aligned} s_js_l = (\alpha^j + \alpha^{-j})(\alpha^l + \alpha^{-l}) &= \alpha^{j+l} + \alpha^{-j+l} + \alpha^{j-l} + \alpha^{-j-l} = \\ =&s_{j+l} + s_{l-j} s_j^2 = s_{j+j} + s_{j-j} = s_{2j} + 2. \end{aligned}$$

□

1.2.2. Последовательность $\{t_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$

Для любого целого j положим

$$t_j = 1 + s_j + s_{2j} = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}.$$

Лемма 3. *Последовательность $\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ имеет следующие свойства:*

1. Последовательность $\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ периодична с периодом $8m$ и
$$t_0 = 5,\ t_{4m} = 1,\ t_{2m} = t_{6m} = -1,$$
$$t_m = t_{7m} = 1 + \sqrt{2} \text{ и } t_{3m} = t_{5m} = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Набор $(t_0, t_1, \dots, t_{8m})$ симметричен относительно центра, т. е. для $j \in \{0, 1, 2, \dots, 4m\}$ $t_{8m-j} = t_j$. Также $t_{4m\pm j} = t_j - 2s_j$ для любого $j \in \{0, 1, 2, \dots, 4m-1\}$, т. е. $t_{4m\pm j} \equiv t_j \pmod 2$.

3. Для любого целого j $t_j^2 = t_{2j} + 4t_j + 2(-s_{2j} + s_{3j})$, в частности $t_j^2 \equiv t_{2j} \pmod 2$,

$$t_0^2 = 25,\ t_{4m} = 1,\ t_{2m}^2 = t_{6m}^2 = 1,\ t_m^2 = t_{7m}^2 = 3 + 2\sqrt{2},\ t_{3m}^2 = t_{5m}^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Доказательство. Будем использовать лемму 2.

1. Из пункта 1 леммы 2

$$t_0 = 1+2+2 = 5,\ t_{4m} = 1-2+2 = 1,\ t_{2m} = t_{6m} = 1+0-2 = -1,$$
$$t_m = t_{7m} = 1+\sqrt{2}+0 = 1+\sqrt{2},\ t_{3m} = t_{5m} = 1-\sqrt{2}+0 = 1-\sqrt{2}.$$

2. По пункту 2 леммы 2 для любого $j \in \{1,2,\dots,4m-1\}$

$$t_{4m\pm j} = 1 - s_j + \alpha^{8m\pm 2j} + \alpha^{-8m\mp 2j} = 1 - s_j + s_{2j} = t_j - 2s_j.$$

3. В самом деле, из пунктов 3 и 4 леммы 2 для любого j

$$\begin{aligned} t_j^2 &= (1+s_j+s_{2j})^2 = 1 + (s_{2j}+2) + (s_{4j}+2) + 2(s_i + s_{2j} + s_j s_{2j}) = \\ &= 5 + s_{2j} + s_{4j} + 2(s_j + s_{2j} + s_j + s_{3j}) = 5 + 4s_j + 3s_{2j} + 2s_{3j} + s_{4j} = \\ &= (1 + s_{2j} + s_{4j}) + (4 + 4s_j + 2s_{2j} + 2s_{3j}) = t_{2j} + 4t_j + 2(-s_{2j} + s_{3j}). \end{aligned}$$

Из пункта 1 следует

$$\begin{aligned} & t_0^2 = 25,\ t_{4m} = 1,\ t_{2m}^2 = t_{6m}^2 = 1, \\ & t_m^2 = t_{7m}^2 = t_{2m} + 4t_m + 2(-s_{2m} + s_{3m}) = t_{6m} + 4t_{7m} + 2(-s_{6m} + s_{3m}) = \\ & \quad = -1 + 4(1+\sqrt{1}) + 2(-\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} t_{3m}^2 = t_{5m}^2 &= t_{6m} + 4t_{3m} + 2(-s_{6m} + s_m) = \\ &= t_{2m} + 4t_{5m} + 2(-s_{2m} + s_{7m}) = 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

1.3. Группа круговых единиц

Опишем группу круговых единиц K поля $\mathbb{Q}_{2^n}$ в удобной форме. Группа круговых единиц тесно связана с группой всех единиц кольца целых поля $\mathbb{Q}_{2^n}$ (подробности в [3–7]).

1.3.1. Описание $\boldsymbol{P}$

Сначала изучим подгруппу $P = \langle 1-\alpha^k | k \in \{1,2,\dots,8m-1\}\rangle \le \mathbb{Q}_{8m}^*$.

Лемма 4. *При введённых выше обозначениях*

$$P = \langle 1-\alpha^j | j \in \{1,3,\dots,8m-1\}\rangle, \quad \langle\alpha\rangle \le P.$$

Доказательство. Будем действовать, как в [8]. Группу P можно представить в виде

$$P = \left\langle 1-\alpha^j \mid j \in \{1,3,\dots,8m-1\}\right\rangle \left\langle 1-\alpha^j \mid j \in \{2,4,\dots,8m-2\}\right\rangle.$$

Так как $1-\alpha^{1+4m} = -\alpha^{1+4m}\left(1-\alpha^{-1-4m}\right) = \alpha\left(1-\alpha^{8m-1-4m}\right) = \alpha\left(1-\alpha^{4m-1}\right)$, то $\langle\alpha\rangle \leqslant \langle 1-\alpha^j \mid j \in \{1,3,\dots,8m-1\rangle \leqslant P$.

Пусть $k > 0$ и $k < n$; $j = 2^k(2s+1)$ для $k > 0$, $\theta = \alpha^{2s+1}$, s — целое. Отметим, что $\theta^{2^k} = \alpha^j$. Воспользуемся соотношением Милнора из [9]. Имеем следующее разложение многочлена:

$$y^{2^k} - 1 = \prod_{\eta^{2^k}=1} (y-\eta) = \prod_{l=0}^{2^k-1} (y - \alpha^{2^{n-k}l}).$$

Подставим θ^{-1} вместо y в это разложение и получим

$$\theta^{-2^k} - 1 = \prod_{l=0}^{2^k-1} \left(\theta^{-1}(1-\theta\alpha^{2^{n-k}l})\right).$$

Теперь, умножая полученное соотношение на θ^{2^k}, получим

$$1-\alpha^j = 1-\theta^{2^k} = \prod_{l=0}^{2^k-1}(1-\theta\alpha^{2^{n-k}l}) = \prod_{l=0}^{2^k-1}(1-\alpha^{2^{n-k}l+2s+1}).$$

Так как $0<k<n$, то $2^{n-k}l+2s+1$ — нечётное число. Поэтому

$$\left\langle 1-\alpha^j \mid j\in\{2,4,\ldots,8m-2\}\right\rangle \leqslant \left\langle 1-\alpha^j \mid j\in\{1,3,\ldots,8m-1\}\right\rangle.$$

$\square$

Лемма 5. *Для любых* $\varepsilon_0\in\{-1,1\},\ldots,\varepsilon_{2m-1}\in\{-1,1\}$

$$P=\langle\alpha\rangle\langle 1-\alpha^{\varepsilon_l(2l+1)}|l\in\{0,1,\ldots,2m-1\}\rangle.$$

Доказательство. Так как для любого j

$$1-\alpha^{-j} = (-\alpha^{-j})(1-\alpha^j) \iff 1-\alpha^j = (-\alpha^j)(1-\alpha^{-j}),$$

то по лемме 4 при добавлении α в порождающие P всегда из двух порождающих $\{1-\alpha^j, 1-\alpha^{-j}\}$ можно оставить только один из них, поскольку $1-\alpha^{-j}=1-\alpha^{8-j}$. $\square$

Лемма 6. $P=\langle\alpha\rangle\langle 1-\alpha^{5^k}|k\in\{0,1,\ldots,2m-1\}\rangle$.

Доказательство. Хорошо известно, например в [10], что множество

$$\left\{\pm 5^k \mid k\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}\right\}$$

образует приведённую систему вычетов по модулю 2^n. Это означает, что для любого нечётного $j\in\{1,3,\ldots,8m-1\}$ существуют такие $\varepsilon\in\{1,-1\}$ и $k\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}$, что $j\equiv\varepsilon 5^k \pmod{8m}$. Для каждого $l\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}$ найдём такие числа $\varepsilon_l\in\{1,-1\}$ и $k_l\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}$, что $2l+1\equiv\varepsilon_l 5^{k_l} \pmod{8m}$. Покажем, что

$$\left\{k_l \mid l\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}\right\} = \left\{0,1,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\right\}.$$

Допустим, что $k_l=k_p$ для $\{k_l,k_p\}\subseteq\{k_l \mid l\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}\}$. Тогда

$$\begin{matrix} 2l+1\equiv\varepsilon_l 5^{k_l} \pmod{8m}, \\ 2p+1\equiv\varepsilon_p 5^{k_l} \pmod{8m} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \varepsilon_l(2l+1)\equiv 5^{k_l} \pmod{8m}, \\ \varepsilon_p(2p+1)\equiv 5^{k_l} \pmod{8m}. \end{matrix}$$

Следовательно,

$$\varepsilon_l(2l+1)\equiv\varepsilon_p(2p+1) \pmod{8m} \iff 2l+1\equiv\pm(2p+1) \pmod{8m}.$$

Если $2l+1\equiv 2p+1 \pmod{8m}$, то по выбору l и p имеем $l=p$. Если же $2l+1\equiv -(2p+1) \pmod{8m}$, то $2(l+p)+2\equiv 0 \pmod{8m}$, что невозможно по выбору l и p. Таким образом,

$$k_l=k_p \iff l=p.$$

Теперь для любого значения $k\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}$ найдётся такое число $l_k\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}$, что

$$2l_k+1\equiv\varepsilon_{l_k}5^k \pmod{8m} \iff \varepsilon_{l_k}(2l_k+1)\equiv 5^k \pmod{8m}.$$

Отсюда по лемме 5 $P=\langle\alpha\rangle\left\langle 1-\alpha^{5^k} \mid k\in\{0,\ldots,2m-1=2^{n-2}-1\}\right\rangle$. $\square$

1.3.2. Описание K

Лемма 7. *Для любого нечётного* $j \in \{1, 3, \dots, 8m-1\}$ $N(1-\alpha^j) = 2$. *Если* $\mu \in P$, *то*

$$\mu = \alpha^k \prod_{l=0}^{2m-1} (1-\alpha^{5^l})^{k_l}$$

для подходящих $k_l, l \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$, $k \in \{0, 1, \dots, 8m-1\}$. *Кроме того,*

$$\mu \in K \longleftrightarrow \sum_{l=0}^{2m-1} k_l = 0.$$

Доказательство. Алгебраически сопряжёнными с элементом α^j являются все первообразные корни из 1 степени $8m = 2^n$: $\alpha, \alpha^3, \dots, \alpha^{8m-1}$. Они являются корнями кругового многочлена $\Phi_{8m}(y) = y^{4m} + 1$, поэтому

$$\Phi_{8m}(y) = y^{4m} + 1 = \prod_{l=0}^{4m-1} (y - \alpha^{2l+1}).$$

Отсюда

$$N(1-\alpha^j) = \prod_{l=0}^{4m-1} (1-\alpha^{2l+1}) = \Phi_{8m}(1) = 1 + 1 = 2.$$

Так как $\alpha^k \in K = P \cap U(\mathbb{Z}[\alpha])$, то достаточно найти условие обратимости элемента

$$\prod_{l=0}^{2m-1} (1-\alpha^{5^l})^{k_l}.$$

Из мультипликативности нормы следует, что

$$N\left(\prod_{l=0}^{2m-1} (1-\alpha^{5^l})^{k_l}\right) = \prod_{l=0}^{2m-1} (N(1-\alpha^{5^l}))^{k_l} = 2^{\sum_{l=0}^{2m-1} k_l}.$$

Элементы из K являются единицами в кольце $\mathbb{Z}[\alpha]$, поэтому должны иметь норму ± 1. Это даёт нужное утверждение. □

Для любого $l \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ положим

$$\beta_l = 1 + \alpha^{5^l} + \alpha^{2\cdot 5^l} + \alpha^{3\cdot 5^l} + \alpha^{4\cdot 5^l} = \alpha^{2\cdot 5^l}(\alpha^{-2\cdot 5^l} + \alpha^{-5^l} + 1 + \alpha^{5^l} + \alpha^{2\cdot 5^l}) = \alpha^{2\cdot 5^l} t_{5^l}.$$

Лемма 8. *Для любого* $l \in \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ *элементы* β_l *лежат в* K.

Доказательство. Так как $N\left(1-\alpha^{5^{l+1}}\right) = 2$ и $N(1-\alpha^{5^l}) = 2$, то

$$N(\beta_l) = N\left(\frac{1-\alpha^{5^{l+1}}}{1-\alpha^{5^l}}\right) = 1.$$

Поэтому β_l будет единицей кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$. □

Лемма 9. *При введённых выше обозначениях* $K = \langle \alpha \rangle \langle \beta_l | l \in \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\} \rangle$.

Доказательство. Пусть $\mu \in K$. Тогда по лемме 7

$$\mu = \alpha^k \prod_{l=0}^{2m-1} (1 - \alpha^{5^l})^{k_l}$$

для подходящих $k \in \{0, 1, \dots, 8m-1\}$ и целых k_l ($l \in \{0, \dots, 2m-1\}$), причём $\sum_{l=0}^{2m-1} k_l = 0$.

Достаточно найти такие целые $r_0, \dots, r_{2m-1}$, что

$$\prod_{l=0}^{2m-1} (1 - \alpha^{5^l})^{k_l} = \prod_{l=0}^{2m-1} \beta_l^{r_l} = \prod_{l=0}^{2m-1} \left((1 - \alpha^{5^l})^{-r_l} (1 - \alpha^{5^{l+1}})^{r_l} \right).$$

Так как $5^{2m} \equiv 1 \pmod{8m}$, то $\alpha^{5^{2m}} = \alpha$ и можно рассмотреть систему

$$\begin{cases} k_0 = -r_0 + r_{2m-1}, \\ k_1 = r_0 - r_1, \\ k_2 = r_1 - r_2, \\ \quad \vdots \\ k_{2m-2} = r_{2m-3} - r_{2m-2}, \\ k_{2m-1} = r_{2m-2} - r_{2m-1} \end{cases} \iff \begin{cases} r_{2m-1} = k_0 + r_0, \\ r_1 = r_0 - k_1, \\ r_2 = r_1 - k_2, \\ \quad \vdots \\ r_{2m-2} = r_{2m-3} - k_{2m-2}, \\ r_{2m-1} = r_{2m-2} - k_{2m-1} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r_{2m-1} = k_0 + r_0, \\ r_1 = r_0 - k_1, \\ r_2 = r_0 - k_1 - k_2, \\ \quad \vdots \\ r_{2m-2} = r_0 - k_1 - \dots - k_{2m-2}, \\ r_{2m-1} = r_0 - k_1 - \dots - k_{2m-1}. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{2m-1} k_l = 0 \iff k_0 = -\sum_{l=1}^{2m-1} k_l,$$

то получим систему

$$\begin{cases} r_1 = r_0 - k_1, \\ r_2 = r_0 - k_1 - k_2, \\ \quad \vdots \\ r_{2m-2} = r_0 - k_1 - \dots - k_{2m-2}, \\ r_{2m-1} = r_0 - k_1 - \dots - k_{2m-1}, \end{cases}$$

позволяющую находить решения $r_1, \dots, r_{2m-1}$ при произвольном r_0. □

Для любого $j \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ положим

$$L_j = \{0, 1, \dots, 2m-1\} \setminus \{j\} = \{0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, 2m-1\}.$$

Лемма 10. *Для любого* $j \in \{0, 1, \dots, 2m-2\}$

$$K = \langle \alpha \rangle \times \prod_{l \in L_j} \langle \beta_l \rangle.$$

Доказательство. Поскольку $5^{2m} \equiv 1 \pmod{8m}$, то $\alpha^{5^{2m}} = \alpha$, и поэтому

$$\prod_{l=0}^{2m-1} \beta_l = \prod_{l=0}^{2m-1} \frac{1-\alpha^{5^{l+1}}}{1-\alpha^{5^l}} =$$
$$= \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\alpha^{5^2}}{1-\alpha^5} \cdot \frac{1-\alpha^{5^3}}{1-\alpha^{5^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1-\alpha^{5^{2m-1}}}{1-\alpha^{5^{2m-2}}} \cdot \frac{1-\alpha^{5^{2m}}}{1-\alpha^{5^{2m-1}}} = \frac{1-\alpha^{5^{2m}}}{1-\alpha} = 1.$$

Следовательно, из порождающих $\{\beta_l \mid l \in \{0, \ldots, 2m-1\}\}$ можно удалить любой β_l. Разложение группы K в прямое произведение следует из того, что, во-первых, периодическая часть равна $\langle\alpha\rangle$, во-вторых, ранг группы единиц равен $2m-1$. □

Лемма 11. *При введённых выше обозначениях*

$$K = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{2m-2} \langle t_{2l+1} \rangle.$$

Доказательство. Для каждого $l \in \{0, \ldots, 2m-2 = 2^{n-2}-2\}$ найдём такие $\varepsilon_l \in \{1, -1\}$ и $k_l \in \{0, \ldots, 2m-1 = 2^{n-2}-1\}$, что $2l+1 \equiv \varepsilon_l 5^{k_l} \pmod{8m}$ и поэтому

$$t_{2l+1} = 1 + \alpha^{2l+1} + \alpha^{-(2l+1)} + \alpha^{2(2l+1)} + \alpha^{-2(2l+1)} =$$
$$= \alpha^{-2(2l+1)} \left(1 + \alpha^{2l+1} + \alpha^{2(2l+1)} + \alpha^{3(2l+1)} + \alpha^{4(2l+1)}\right) =$$
$$= \alpha^{-2(2l+1)} \cdot \frac{1-\alpha^{5(2l+1)}}{1-\alpha^{2l+1}} = \alpha^{-2(2l+1)} \cdot \frac{1-\alpha^{5\varepsilon_l 5^{k_l}}}{1-\alpha^{\varepsilon_l 5^{k_l}}} = \alpha^{-2(2l+1)} \cdot \frac{1-\alpha^{\varepsilon_l 5^{k_l+1}}}{1-\alpha^{\varepsilon_l 5^{k_l}}}.$$

Если $\varepsilon_l = 1$, то

$$t_{2l+1} = \alpha^{-2(2l+1)} \cdot \frac{1-\alpha^{5^{k_l+1}}}{1-\alpha^{5^{k_l}}} = \alpha^{-2(2l+1)} \cdot \beta_{k_l},$$

и по предыдущей лемме среди k_l не будет точно одного элемента из $\{0, 1, \ldots, 2m-1\}$.

Пусть $\varepsilon_l = -1$. Тогда имеем

$$\frac{1-\alpha^{-5^{k_l+1}}}{1-\alpha^{-5^{k_l}}} = \frac{-\alpha^{-5^{k_l+1}}}{-\alpha^{-5^{k_l}}} \cdot \frac{1-\alpha^{5^{k_l+1}}}{1-\alpha^{5^{k_l}}} = \alpha^{-5^{k_l+1}+5^{k_l}} \cdot \beta_{k_l} = \alpha^{-4 \cdot 5^{k_l+1}} \cdot \beta_{k_l},$$

и снова всё доказано по предыдущей лемме. □

Следствие 2. *Для циклической группы порядка 16*

$$K = \langle\alpha\rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle t_3 \rangle \times \langle t_5 \rangle,$$

для циклической группы порядка 32

$$K = \langle\alpha\rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle t_3 \rangle \times \langle t_5 \rangle \times \langle t_7 \rangle \times \langle t_9 \rangle \times \langle t_{11} \rangle \times \langle t_{13} \rangle.$$

2. Вычисления по модулю 2

Положим

$$K_0 = \prod_{l=0}^{2m-2} \langle t_{2l+1} \rangle.$$

Цель этого пункта — найти все такие $\lambda \in K_0$, что $\lambda \equiv 1 \pmod 2$. Обозначим $L = \{\lambda \in K | \lambda \equiv 1 \pmod 2\}$.

Лемма 12. *Множество L является подгруппой группы K_0.*

Доказательство. Пусть $\lambda = 1+2\lambda_1$ и $\mu = 1+2\mu_1$ — элементы из L, где $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbf{Z}[\alpha]$. Тогда
$$\lambda\mu = (1+2\lambda_1)(1+2\mu_1) = 1+2\lambda_1+2\mu_1+4\lambda_1\mu_1 \in L.$$
Найдём обратный элемент к элементу $\lambda \in L$ в виде $\lambda^{-1} = 1+x$. Тогда
$$1 = \lambda\lambda^{-1} = (1+2\lambda_1)(1+x) = 1+2\lambda_1+x+2\lambda_1 x.$$
Отсюда $x = -2\lambda_1 - 2\lambda_1 x = 2\nu$, где $\nu \in \mathbf{Z}[\alpha]$. Следовательно, $\lambda^{-1} \in L$. □

Лемма 13. *Для любого $l \in \{0,\dots,2m-1\}$ $t_{2l+1}^{2m} \equiv 1 \pmod 2$, т. е. $t_{2l+1}^{2m} \in L$, и для любого $k \in \{0,1,\dots,n-3\}$ $t_{2l+1}^{2^k} \not\equiv 1 \pmod 2$, т. е. $t_{2l+1}^{2^k} \notin L$.*

Доказательство. Поскольку элемент t_{2l+1} для любого $l \in \{0,\dots,2m-1\}$ алгебраически сопряжён с элементом
$$t_1 = 1+s_1+s_2 = 1+\alpha+\alpha^{-1}+\alpha^2+\alpha^{-2},$$
то достаточно рассмотреть t_1. По лемме 3 для любого целого j $t_j^2 \equiv t_{2j} \pmod 2$. По индукции получим, что для любого натурального k $t_1^{2^k} \equiv t_{2^k} \pmod 2$. В частности, по лемме 3
$$t_1^{2m} \equiv t_{2m} = -1 \equiv 1 \pmod 2.$$

Допустим, что для некоторого $k \in \{0,1,\dots,n-3\}$ $t_1^{2^k} \equiv t_{2^k} \equiv 1 \pmod 2$. Тогда по лемме 3 $t_1^m \equiv t_m = 1+\sqrt{2} \equiv 1 \pmod 2$. Отсюда $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{Z}[\alpha]$, что невозможно, ибо $\frac{\sqrt{2}}{2}$ не является целым алгебраическим числом. □

Для любого $l \in \{0,\dots,m-1\}$ определим подгруппу
$$T(l) = \langle t_{2l+1}, t_{4m-2l-1} \rangle .$$
Очевидно, что
$$K_0 = \langle t_1 \rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} T(l).$$

Лемма 14. *Для любого $l \in \{0,\dots,m-1\}$ $T(l) \cap L = \left\langle t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1} \right\rangle \times \left\langle t_{2l+1}^{2m} \right\rangle$.*

Доказательство. По лемме 3 $t_{4m-2l-1} \equiv t_{2l+1} \pmod 2$. Поэтому по лемме 13 для целых p и q
$$t_{2l+1}^p t_{4m-2l-1}^q \in L \iff p+q \equiv 0 \pmod{2m}.$$
Следовательно,
$$\left\langle t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1} \right\rangle \times \left\langle t_{2l+1}^{2m} \right\rangle \leqslant T(l) \cap L.$$
С другой стороны, пусть $p+q \equiv 0 \pmod 2$. Тогда
$$t_{2l+1}^p t_{4m-2l-1}^q \cdot \left(t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1}\right)^{-q} = t_{2l+1}^{p-2mq+q} \in \left\langle t_{2l+1}^{2m} \right\rangle .$$
Отсюда
$$\left\langle t_{2l+1}^{2m-1} t_{4m-2l-1} \right\rangle \times \left\langle t_{2l+1}^{2m} \right\rangle \geqslant T(l) \cap L,$$
что и требовалось. □

Лемма 15. *Для любого* $l = \{0, 1, \ldots, 2m-2\}$ $t_1^m \equiv t_{2l+1}^m \pmod 2$. *Поэтому для любого* $l = \{0, 1, \ldots, 2m-2\}$ $t_1^m t_{2l+1}^m \in L$.

Доказательство. Для любого целого j по лемме 3 имеем $t_j^2 \equiv t_{2j} \pmod 2$. Поэтому для любого $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ с учётом того, что $m = 2^{n-3}$, получим

$$t_{2l+1}^m = t_{2l+1}^{2^{n-3}} \equiv t_{2^{n-3}(2l+1)} = t_{m(2l+1)} \pmod 2.$$

Рассмотрим такие элементы. По нашим обозначениям

$$t_{m(2l+1)} = 1 + s_{m(2l+1)} + s_{2m(2l+1)}.$$

Из леммы 3 следует, что $t_{m(2l+1)} = 1 \pm \sqrt{2}$. Так как

$$(1 \pm \sqrt{2})^2 = 1 \ \pm 2\sqrt{2} + 2 \equiv 1 \pmod 2,$$

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 \equiv 1 \pmod 2,$$

то произведение любых двух таких элементов сравнимо с 1 по модулю 2. □

3. Вычисления для группы круговых единиц поля $\mathbf{Q_{16}}$

Найдём группу K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{16}$, т. е. рассмотрим $m = 2$. Имеем

$$G = Z_{16} = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{15}\}, \quad \mathbb{Z}G = \{c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{15}\alpha^{15} | c_i \in \mathbb{Z}\},$$

где $\alpha = \cos\frac{2\pi}{16} + i\sin\frac{2\pi}{16} = \zeta_{16}$ — первообразный корень из 1 степени 16. Поскольку $\alpha^{16} = 1$, то $\alpha^{-i} = \alpha^{-i+16}$ и любой элемент из $\mathbb{Z}G$ имеет вид

$$\sum_{i=0}^{15} c_i\alpha^j = \sum_{i=0}^{7}(c_i - c_{i+8})\alpha^i = \tilde{c_0} + \tilde{c_1}\alpha + \tilde{c_2}\alpha^2 + \ldots + \tilde{c_7}\alpha^7 =$$

$$= \tilde{c_0} + \tilde{c_4}\alpha^4 + \tilde{c_1}\alpha - \tilde{c_7}\alpha^{-1} + \tilde{c_2}\alpha^2 - \tilde{c_6}\alpha^{-2} + \tilde{c_3}\alpha^3 - \tilde{c_5}\alpha^{-3}.$$

Поэтому достаточно рассматривать слагаемые вида $\alpha^j + \alpha^{-j}$ для $j = 1, 2, 3$. По лемме 2 имеем для $s_j = \alpha^j + \alpha^{-j}$ следующие соотношения:

$$s_j s_i = s_{i+j} + s_{i-j}, \quad s_j^2 = s_{2j} + 2,$$

$$s_0 = 2, \quad s_8 = -2, \quad s_4 = 0, \quad s_2 = \sqrt{2}, \quad s_6 = -\sqrt{2}, \quad s_{16-j} = s_j = -s_{8-j} = -s_{8+j}.$$

Все эти соотношения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Соотношения для элементов s_j, $j \in \mathbb{Z}$

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
2	$2\cos(\pi/8)$	$\sqrt{2}$	$2\sin(\pi/8)$	0	$-s_3$	$-s_2$	$-s_1$	$-s_0$
	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
	$-s_1$	$-s_2$	$-s_3$	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0

Для элемента $t_j = 1 + s_j + s_{2j} = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}$ по лемме 3 имеем следующие соотношения:

$$t_0 = 5, \quad t_8 = 1, \quad t_4 = -1, \quad t_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad t_6 = 1 - \sqrt{2},$$

$$t_0^2 = 25, \quad t_8^2 = 1, \quad t_4^2 = 1, \quad t_2^3 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad t_6^2 = 3 - 2\sqrt{2},$$
$$t_j^2 = t_{2j} + 4t_j + 2(-s_{2j} + s_{3j}), \quad t_{16-j} = t_j.$$

По лемме 11 группа круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{16}$ имеет вид

$$K = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{2} \langle t_{2l+1}\rangle = \langle\alpha\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t_3\rangle \times \langle t_5\rangle.$$

Теорема 1. *Подгруппа* $L = \{\lambda \in K | \lambda \equiv 1 \pmod 2\}$ *группы круговых единиц поля* $\mathbb{Q}_{16}$ *при введённых выше обозначениях имеет вид* $L = \langle t_1^4\rangle \times \langle t_1^2 t_3^2\rangle \times \langle t_3^3 t_5\rangle$, *где*
$t_1^4 = 76s_1 + 58s_2 + 32s_3 + 83$,
$t_1^2 t_3^2 = -2s_1 - 4s_2 + 6s_3 + 7$,
$t_3^3 t_5 = -4s_1 - 8s_2 + 10s_3 + 11$.

Доказательство. По лемме 11 произвольный элемент подгруппы K имеет вид $t_1^{k_0} t_3^{k_1} t_5^{k_2}$ для целых показателей. Найдем условия для того, чтобы $t_1^{k_0} t_3^{k_1} t_5^{k_2} \in L$. По лемме 13 элемент $t_1^4 \in L$. Далее,

$$\begin{aligned} t_3^3 t_5 &= (1 + s_3 + s_6)^3(1 + s_5 + s_{10}) = (1 + s_3 - s_2)^3(1 - s_3 - s_2) = \\ &= (1 + s_3^2 + s_2^2 + 2(s_3 - s_2 - s_2 s_3))((1 - s_2)^2 - s_3^2 \equiv \\ &\equiv (1 + s_6 + 2 + s_4 + 2)(1 - 2s_2 + s_2^2 - s_6 - 2) \equiv \\ &\equiv (1 - s_2)(1 + s_4 + 2 + s_2) = (1 - s_2)(1 + s_2) = \\ &= 1 - s_2^2 = 1 - s_4 - 2 \equiv 1 \pmod 2. \end{aligned}$$

Значит, $t_3^3 t_5 \in L$, поэтому

$$t_1^{k_0} t_3^{k_1} t_5^{k_2} = t_1^{k_0} t_3^{k_1 - 3k_2} (t_3^3 t_5)^{k_2} \in L \iff t_1^{k_0} t_3^{k_1 - 3k_2} \in L.$$

Следовательно, достаточно рассматривать элементы вида $t_1^{k_0} t_3^{k_1} \in L$. По лемме 13 $k_0 \neq 0$ и $k_1 \neq 0$ и оба показателя можно рассматривать по модулю $2m = 4$. По лемме 15 имеем $k_1 < m = 2$, значит, $k_1 = 1$. Нужно рассмотреть только случаи $t_1^{k_0} t_3^{k_1}$, где $k_0 \in \{1, 2, 3\}$ и $k_1 = 1$. Допустим, что $t_1^{k_0} t_3^{k_1} \in L$ для некоторых $k_0 \in \{1, 2, 3\}$ и $k_1 = 1$, тогда

$$(t_1^{k_0} t_3^{k_1})^2 = t_1^{2k_0} t_3^{2k_1} \in L.$$

Это приводит к противоречию, кроме случая $t_1^2 t_3$. Имеем по лемме 3

$$t_1^2 \equiv t_2 = 1 + \sqrt{2} \pmod 2.$$

Далее, $s_6 = -\sqrt{2}$, поэтому $t_3 = 1 + s_3 + s_6 = 1 + s_3 - \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned} t_1^2 t_3 &\equiv (1 + \sqrt{2})(1 + s_3 - \sqrt{2}) = (1 - 2) + (1 + \sqrt{2})s_3 = -1 + (1 + s_2)s_3 = \\ &= -1 + (1 + \alpha^2 + \alpha^{-2})(\alpha^3 + \alpha^{-3}) = -1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^{-5} = \\ &= -1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 - \alpha^3 - \alpha^5 - \alpha^7 = -1 + s_1 \not\equiv 1 \pmod 2. \end{aligned}$$

Значит, $t_1^2 t_3 \notin L$.

С помощью программы Excel и системы компьютерной алгебры GAP были найдены элементы $t_1^{k_0} t_3^{k_1}$, где $(k_0, k_1) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$:

$$\begin{aligned} t_1 t_3 &= s_1 + s_2 + s_3 - 1, \\ t_1 t_3^2 &= 2s_1 + 4s_2 - 5s_3 - 5, \\ t_1^2 t_3 &= s_1 + 2s_3 + 3, \\ t_1^2 t_3^2 &= -2s_1 - 4s_2 + 6s_3 + 7, \\ t_1^3 t_3 &= 7s_1 + 6s_2 + s_3 + 5, \\ t_1^3 t_3^2 &= 5s_1 + 7s_2 - 6s_3 - 5. \end{aligned}$$

Среди них только $t_1^2 t_3^2 \in L$. □

4. Вычисления для группы круговых единиц поля $\mathbf{Q}_{32}$

Найдём группу K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{32}$, т. е. рассмотрим $m = 4$. Тогда

$$G = Z_{32} = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{31}\}, \quad \mathbb{Z}G = \{c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{31}\alpha^{31}\},$$

где $\alpha = \cos\frac{2\pi}{32} + i\sin\frac{2\pi}{32} = \zeta_{32}$ — первообразный корень из 1 степени 32. Поскольку $\alpha^{32} = 1$, то $\alpha^{-i} = \alpha^{-i+32}$. По лемме 2 имеем для $s_j = \alpha^j + \alpha^{-j}$ следующие соотношения:

$$s_j s_i = s_{i+j} + s_{i-j}, \quad s_j^2 = s_{2j} + 2,$$

$$s_0 = 2, \quad s_{16} = -2, \quad s_8 = 0, \quad s_4 = \sqrt{2}, \quad s_{12} = -\sqrt{2},$$

$$s_{32-j} = s_j = -s_{16-j} = -s_{16+j}.$$

Все эти соотношения приведены в табл. 3.

Таблица 3

Соотношения для элементов s_j, $j \in \mathbb{Z}$

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	
2	$2\cos\frac{\pi}{16}$	$2\cos\frac{\pi}{8}$	$2\cos\frac{3\pi}{16}$	$\sqrt{2}$	$2\sin\frac{3\pi}{16}$	$2\sin\frac{\pi}{8}$	$2\sin\frac{\pi}{16}$	
s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
0	$-s_7$	$-s_6$	$-s_5$	$-s_4$	$-s_3$	$-s_2$	$-s_1$	$-s_0$
	s_{17}	s_{18}	s_{19}	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	
	$-s_1$	$-s_2$	$-s_3$	$-s_4$	$-s_5$	$-s_6$	$-s_7$	
s_{24}	s_{25}	s_{26}	s_{27}	s_{28}	s_{29}	s_{30}	s_{31}	s_{32}
0	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	s_0

Для элемента $t_j = 1 + s_j + s_{2j} = 1 + \alpha^j + \alpha^{-j} + \alpha^{2j} + \alpha^{-2j}$ по лемме 3 имеем следующие соотношения:

$$t_0 = 5, \quad t_{16} = 1, \quad t_8 = -1, \quad t_4 = 1 + \sqrt{2}, \quad t_{12} = 1 - \sqrt{2},$$

$$t_0^2 = 25, \quad t_{16}^2 = 1, \quad t_8^2 = 1, \quad t_4^3 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad t_{12}^2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$t_j^2 = t_{2j} + 4t_j + 2(-s_{2j} + s_{3j}), \quad t_{32-j} = t_j.$$

По лемме 11 группа K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{32}$ имеет вид

$$K = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{6} \langle t_{2l+1}\rangle.$$

Теорема 2. *При введённых выше обозначениях для порядка 32 подгруппа* $L = \{\lambda \in K | \lambda \equiv 1 \pmod 2\}$ *группы круговых единиц поля* $\mathbb{Q}_{32}$ *имеет вид*

$$L = \langle t_1^8\rangle \times \langle t_3^7 t_{13}\rangle \times \langle t_5^7 t_{11}\rangle \times \langle t_7^7 t_9\rangle \times \langle t_1^4 t_3^4\rangle \times \langle t_1^6 t_7^2\rangle \times \langle t_3^6 t_5^2\rangle,$$

где

$t_1^8 = 37072s_1 + 33964s_2 + 29280s_3 + 23610s_4 + 17536s_5 + 11488s_6 + 5656s_7 + 38163,$
$t_3^7 t_{13} = -3592s_1 - 2456s_2 + 6524s_3 - 4612s_4 - 1246s_5 + 6118s_6 - 5468s_7 + 6663,$
$t_5^7 t_{11} = -5468s_1 + 2456s_2 + 1246s_3 - 4612s_4 + 6524s_5 - 6118s_6 + 3592s_7 + 6663,$
$t_7^7 t_9 = -1246s_1 - 6118s_2 + 3592s_3 + 4612s_4 - 5468s_5 - 2456s_6 + 6524s_7 + 6663,$
$t_1^4 t_3^4 = 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7 + 9319,$
$t_1^6 t_7^2 = 450s_1 + 346s_2 + 236s_3 + 120s_4 + 20s_5 - 16s_6 - 6s_7 + 499,$
$t_3^6 t_5^2 = -956s_1 - 568s_2 + 2630s_3 - 1416s_4 - 258s_5 + 2330s_6 - 1900s_7 + 2739.$

Доказательство. По лемме 11 произвольный элемент подгруппы K имеет вид $t_1^{k_0}t_3^{k_1}t_5^{k_2}t_7^{k_3}t_9^{k_4}t_{11}^{k_5}t_{13}^{k_6}$, где $k_j \in \{0,1,\ldots,7\}$. Найдём условия для того, чтобы этот элемент лежал в L. По леммам 14 и 15 достаточно рассмотреть $t_1^{k_0}t_3^{k_1}t_5^{k_2}t_7^{k_3}$ при $k_0,k_1,k_2,k_3 \in \{0,1,\ldots,7\}$. Эти элементы вычислены с помощью программы Excel и системы компьютерной алгебры GAP. Приведём результаты вычислений.

При $k_0 = 0$

1,
$t_5 = 1 + s_5 + s_{10}$,
$t_7 = 1 + s_7 + s_{14}$,
$t_5t_7 = t - s_1 + s_5 - s_6 + 1$,

$t_3 = 1 + s_3 + s_6$,
$t_3t_5 = s_1 + s_2 + s_4 + s_7 - 1$,
$t_3t_7 = -s_2 - s_5 + s_7 + 1$,
$t_3t_5t_7 = -1 - s_5$,

$t_3^2 = 4s_3 - s_4 + 3s_6 - 2s_7 + 5$,
$t_3^2t_5 = 4s_1 + 3s_2 - 2s_3 + 4s_4 + 2s_5 - 3s_6 + 3s_7 - 1$,
$t_3^2t_7 = -s_1 - 2s_2 - s_5 + s_7 + 1$,
$t_3^2t_5t_7 = -s_1 - s_2 - s_3 - s_6 - 1$,

$t_3^3 = -3s_1 - s_2 + 18s_3 - 6s_4 + 15s_6 - 10s_7 + 19$,
$t_3^3t_5 = 16s_1 + 13s_2 - 11s_3 + 17s_4 + 7s_5 - 13s_6 + 16s_7 - 11$,
$t_3^3t_7 = -3s_1 - 4s_2 - 2s_4 - 3s_5 + 1$,
$t_3^3t_5t_7 = -2s_1 - 2s_2 - 4s_3 - s_4 - 2s_5 - 3s_6 + s_7 - 5$,

$t_3^4 = t_3^4 = -20s_1 - 10s_2 + 80s_3 - 35s_4 - 4s_5 + 68s_6 - 52s_7 + 85$,
$t_3^4t_5 = 69s_1 + 53s_2 - 62s_3 + 75s_4 + 29s_5 - 68s_6 + 73s_7 - 59$,
$t_3^4t_7 = -12s_1 - 12s_2 + s_3 - 9s_4 - 7s_5 + 3s_6 - 5s_7 + 1$,
$t_3^4t_5t_7 = -6s_1 - 7s_2 - 17s_3 - s_4 - 4s_5 - 12s_6 + 5s_7 - 19$,

$t_3^5 = t_3^5 = -121s_1 - 69s_2 + 365s_3 - 185s_4 - 30s_5 + 320s_6 - 255s_7 + 381$,
$t_3^5t_5 = 299s_1 + 226s_2 - 324s_3 + 338s_4 + 122s_5 - 337s_6 + 347s_7 - 319$,
$t_3^5t_7 = -45s_1 - 40s_2 + 11s_3 - 41s_4 - 24s_5 + 19s_6 - 30s_7 + 9$,
$t_3^5t_5t_7 = -13s_1 - 18s_2 - 70s_3 + 3s_4 - 13s_5 - 52s_6 + 27s_7 - 77$,

$t_3^6 = t_3^6 = -660s_1 - 405s_2 + 1686s_3 - 950s_4 - 190s_5 + 1506s_6 - 1246s_7 + 1751$,
$t_3^6t_5 = 1332s_1 + 985s_2 - 1651s_3 + 1547s_4 + 525s_5 - 1665s_6 + 1645s_7 - 1641$,
$t_3^6t_7 = -180s_1 - 150s_2 + 80s_3 - 175s_4 - 85s_5 + 110s_6 - 146s_7 + 69$,
$t_3^6t_5t_7 = -14s_1 - 41s_2 - 296s_3 + 51s_4 - 31s_5 - 229s_6 + 139s_7 - 321$,

$t_3^7 = t_3^7 = -3451s_1 - 2205s_2 + 7875s_3 - 4767s_4 - 1065s_5 + 7139s_6 - 6048s_7 + 8135$,
$t_3^7t_5 = 6034s_1 + 4389s_2 - 8253s_3 + 7174s_4 + 2317s_5 - 8149s_6 + 7840s_7 - 8273$,
$t_3^7t_7 = -736s_1 - 590s_2 + 485s_3 - 761s_4 - 330s_5 + 580s_6 - 691s_7 + 449$,
$t_3^7t_5t_7 = 104s_1 - 35s_2 - 1281s_3 + 364s_4 - 55s_5 - 1036s_6 + 701s_7 - 1371$.

При $k_0 = 1$
$t_1 = 1 + s_1 + s_2$,
$t_1t_5 = s_1 + s_2 + s_3 + 1$,
$t_1t_7 = -2s_1 - 3s_2 - s_3 + s_6 + 2s_7 - 1$,
$t_1t_5t_7 = -s_1 - 1$,

$t_1t_3 = 1 + 2s_1 + 2s_2 + s_3 + 2s_4 + 2s_5 + s_6 + s_7,$
$t_1t_3t_5 = 3 + 2s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 2s_4 + 2s_5 + 2s_6,$
$t_1t_3t_7 = -1 - 2s_3 - 2s_4 - s_7,$
$t_1t_3t_5t_7 = -1 - s_1 - s_2 - s_3 - s_4 - s_5 - s_6 - s_7,$

$t_1t_3^2 = 9s_1 + 8s_2 + 3s_3 + 6s_4 + 4s_5 + 3s_7 + 5,$
$t_1t_3^2t_5 = 8s_1 + 8s_2 + 11s_3 + 4s_4 + 4s_5 + 6s_6 - s_7 + 13,$
$t_1t_3^2t_7 = -3s_1 - 2s_2 - 4s_3 - 3s_4 - s_7 - 5,$
$t_1t_3^2t_5t_7 = -5s_1 - 4s_2 - 3s_3 - 3s_4 - 2s_5 - s_6 - s_7 - 5,$

$t_1t_3^3 = 30s_1 + 27s_2 + 8s_3 + 26s_4 + 17s_5 - s_6 + 15s_7 + 11,$
$t_1t_3^3t_5 = 23s_1 + 24s_2 + 42s_3 + 13s_4 + 16s_5 + 27s_6 - 6s_7 + 47,$
$t_1t_3^3t_7 = -9s_1 - 8s_2 - 12s_3 - 9s_4 - 5s_5 - 5s_6 - 3s_7 - 13,$
$t_1t_3^3t_5t_7 = -15s_1 - 14s_2 - 11s_3 - 12s_4 - 9s_5 - 5s_6 - 5s_7 - 13,$

$t_1t_3^4 = 115s_1 + 100s_2 + 11s_3 + 99s_4 + 57s_5 - 23s_6 + 64s_7 + 25,$
$t_1t_3^4t_5 = 70s_1 + 76s_2 + 164s_3 + 27s_4 + 47s_5 + 109s_6 - 39s_7 + 185,$
$t_1t_3^4t_7 = -34s_1 - 31s_2 - 39s_3 - 24s_4 - 17s_5 - 18s_6 - 4s_7 - 47,$
$t_1t_3^4t_5t_7 = -55s_1 - 50s_2 - 35s_3 - 41s_4 - 29s_5 - 12s_6 - 16s_7 - 45,$

$t_1t_3^5 = 435s_1 + 371s_2 - 40s_3 + 401s_4 + 215s_5 - 150s_6 + 290s_7 + 1,$
$t_1t_3^5t_5 = 181s_1 + 220s_2 + 661s_3 + 25s_4 + 146s_5 + 470s_6 - 215s_7 + 731,$
$t_1t_3^5t_7 = -110s_1 - 106s_2 - 139s_3 - 75s_4 - 65s_5 - 76s_6 - 5s_7 - 161,$
$t_1t_3^5t_5t_7 = -191s_1 - 175s_2 - 111s_3 - 150s_4 - 105s_5 - 35s_6 - 65s_7 - 139,$

$t_1t_3^6 = 1712s_1 + 1422s_2 - 519s_3 + 1647s_4 + 806s_5 - 880s_6 + 1316s_7 - 379,$
$t_1t_3^6t_5 = 357s_1 + 572s_2 + 2738s_3 - 259s_4 + 401s_5 + 2052s_6 - 1140s_7 + 2993,$
$t_1t_3^6t_7 = -361s_1 - 356s_2 - 510s_3 - 220s_4 - 216s_5 - 296s_6 + 25s_7 - 591,$
$t_1t_3^6t_5t_7 = -686s_1 - 621s_2 - 331s_3 - 546s_4 - 366s_5 - 70s_6 - 260s_7 - 431,$

$t_1t_3^7 = 6903s_1 + 5587s_2 - 3613s_3 + 6977s_4 + 3134s_5 - 4741s_6 + 6074s_7 - 3177,$
$t_1t_3^7t_5 = -69s_1 + 1071s_2 + 11661s_3 - 2522s_4 + 929s_5 + 9182s_6 - 5832s_7 + 12573,$
$t_1t_3^7t_7 = -1128s_1 - 1153s_2 - 1932s_3 - 616s_4 - 717s_5 - 1202s_6 + 250s_7 - 2203,$
$t_1t_3^7t_5t_7 = -2479s_1 - 2219s_2 - 903s_3 - 2043s_4 - 1307s_5 - 26s_6 - 1091s_7 - 1233.$

При $k_0 = 2$
$t_1^2 = 4s_1 + 3s_2 + 2s_3 + s_4 + 5,$
$t_1^2t_5 = 5s_1 + 4s_2 + 3s_3 + 2s_4 + s_5 + 5,$
$t_1^2t_7 = -2s_1 - 3s_2 - s_3 + s_6 + 2s_7 - 1,$
$t_1^2t_5t_7 = -3s_1 - 2s_2 - s_3 - 3,$

$t_1^2t_3 = 8s_1 + 8s_2 + 9s_3 + 8s_4 + 7s_5 + 6s_6 + 3s_7 + 9,$
$t_1^2t_3t_5 = 12s_1 + 12s_2 + 11s_3 + 11s_4 + 9s_5 + 6s_6 + 4s_7 + 11,$
$t_1^2t_3t_7 = -3s_1 - 5s_2 - 4s_3 - 4s_4 - 5s_5 - 3s_6 - 1,$
$t_1^2t_3t_5t_7 = -5s_1 - 5s_2 - 5s_3 - 5s_4 - 5s_5 - 4s_6 - 2s_7 - 5,$

$t_1^2t_3^2 = 34s_1 + 31s_2 + 30s_3 + 21s_4 + 16s_5 + 13s_6 + 4s_7 + 39,$
$t_1^2t_3^2t_5 = 48s_1 + 44s_2 + 35s_3 + 33s_4 + 24s_5 + 13s_6 + 10s_7 + 45,$
$t_1^2t_3^2t_7 = -17s_1 - 17s_2 - 12s_3 - 9s_4 - 8s_5 - 4s_6 - 15,$
$t_1^2t_3^2t_5t_7 = -22s_1 - 20s_2 - 17s_3 - 13s_4 - 10s_5 - 7s_6 - 3s_7 - 23,$

$t_1^2t_3^3 = 106s_1 + 102s_2 + 108s_3 + 77s_4 + 65s_5 + 57s_6 + 16s_7 + 125,$
$t_1^2t_3^3t_5 = 159s_1 + 149s_2 + 118s_3 + 122s_4 + 92s_5 + 50s_6 + 43s_7 + 141,$
$t_1^2t_3^3t_7 = -51s_1 - 51s_2 - 43s_3 - 39s_4 - 34s_5 - 22s_6 - 10s_7 - 47,$
$t_1^2t_3^3t_5t_7 = -68s_1 - 65s_2 - 61s_3 - 51s_4 - 42s_5 - 31s_6 - 14s_7 - 71,$

$t_1^2t_3^4 = 366s_1 + 350s_2 + 382s_3 + 244s_4 + 208s_5 + 197s_6 + 34s_7 + 455,$
$t_1^2t_3^4t_5 = 565s_1 + 522s_2 + 384s_3 + 423s_4 + 308s_5 + 144s_6 + 156s_7 + 477,$
$t_1^2t_3^4t_7 = -185s_1 - 175s_2 - 145s_3 - 129s_4 - 102s_5 - 63s_6 - 35s_7 - 177,$
$t_1^2t_3^4t_5t_7 = -240s_1 - 226s_2 - 210s_3 - 167s_4 - 133s_5 - 98s_6 - 41s_7 - 255,$

$t_1^2t_3^5 = 1202s_1 + 1168s_2 + 1382s_3 + 797s_4 + 716s_5 + 756s_6 + 65s_7 + 1613,$
$t_1^2t_3^5t_5 = 1974s_1 + 1818s_2 + 1233s_3 + 1522s_4 + 1087s_5 + 426s_6 + 616s_7 + 1533,$
$t_1^2t_3^5t_7 = -626s_1 - 591s_2 - 495s_3 - 461s_4 - 360s_5 - 221s_6 - 141s_7 - 593,$
$t_1^2t_3^5t_5t_7 = -807s_1 - 766s_2 - 732s_3 - 576s_4 - 466s_5 - 355s_6 - 140s_7 - 871,$

$t_1^2t_3^6 = 3948s_1 + 3883s_2 + 5068s_3 + 2476s_4 + 2370s_5 + 2889s_6 - 74s_7 + 5889,$
$t_1^2t_3^6t_5 = 7017s_1 + 6401s_2 + 3809s_3 + 5504s_4 + 3792s_5 + 1054s_6 + 2453s_7 + 4851,$
$t_1^2t_3^6t_7 = -2179s_1 - 2038s_2 - 1663s_3 - 1598s_4 - 1217s_5 - 707s_6 - 512s_7 - 2025,$
$t_1^2t_3^6t_5t_7 = -2755s_1 - 2615s_2 - 2550s_3 - 1934s_4 - 1573s_5 - 1242s_6 - 436s_7 - 3045,$

$t_1^2t_3^7 = 12603s_1 + 12677s_2 + 18988s_3 + 7344s_4 + 7831s_5 + 11444s_6 - 1607s_7 + 21803,$
$t_1^2t_3^7t_5 = 25167s_1 + 22714s_2 + 11070s_3 + 20321s_4 + 13418s_5 + 1757s_6 + 10111s_7 + 14577,$
$t_1^2t_3^7t_7 = -7544s_1 - 7032s_2 - 5546s_3 - 5620s_4 - 4217s_5 - 2285s_6 - 1919s_7 - 6765,$
$t_1^2t_3^7t_5t_7 = -9313s_1 - 8877s_2 - 8951s_3 - 6498s_4 - 5370s_5 - 4467s_6 - 1333s_7 - 10629.$

При $k_0 = 3$
$t_1^3 = 18s_1 + 15s_2 + 10s_3 + 6s_4 + 3s_5 + s_6 + 19,$
$t_1^3t_5 = 22s_1 + 19s_2 + 15s_3 + 10s_4 + 6s_5 + 3s_6 + s_7 + 23,$
$t_1^3t_7 = -9s_1 - 7s_2 - 6s_3 - 3s_4 + 2s_5 + 3s_6 + s_7 - 11,$
$t_1^3t_5t_7 = -12s_1 - 9s_2 - 6s_3 - 3s_4 - s_5 - 13,$

$t_1^3t_3 = 42s_1 + 42s_2 + 40s_3 + 38s_4 + 33s_5 + 24s_6 + 13s_7 + 41,$
$t_1^3t_3t_5 = 58s_1 + 57s_2 + 55s_3 + 49s_4 + 41s_5 + 30s_6 + 15s_7 + 59,$
$t_1^3t_3t_7 = -16s_1 - 17s_2 - 21s_3 - 21s_4 - 16s_5 - 12s_6 - 8s_7 - 17,$
$t_1^3t_3t_5t_7 = -25s_1 - 25s_2 - 25s_3 - 24s_4 - 21s_5 - 16s_6 - 9s_7 - 25,$

$t_1^3t_3^2 = 168s_1 + 155s_2 + 132s_3 + 111s_4 + 84s_5 + 54s_6 + 29s_7 + 169,$
$t_1^3t_3^2t_5 = t_1^3t_3^2t_5 = 220s_1 + 205s_2 + 184s_3 + 149s_4 + 115s_5 + 80s_6 + 37s_7 + 229,$
$t_1^3t_3^2t_7 = t_1^3t_3^2t_7 = -78s_1 - 70s_2 - 63s_3 - 50s_4 - 33s_5 - 21s_6 - 12s_7 - 83,$
$t_1^3t_3^2t_5t_7 = t_1^3t_3^2t_5t_7 = -104s_1 - 95s_2 - 82s_3 - 67s_4 - 50s_5 - 33s_6 - 17s_7 - 107,$

$t_1^3t_3^3 = 547s_1 + 518s_2 + 458s_3 + 409s_4 + 323s_5 + 215s_6 + 122s_7 + 541,$
$t_1^3t_3^3t_5 = 726s_1 + 689s_2 + 640s_3 + 531s_4 + 425s_5 + 307s_6 + 142s_7 + 757,$
$t_1^3t_3^3t_7 = -243s_1 - 231s_2 - 218s_3 - 189s_4 - 148s_5 - 105s_6 - 56s_7 - 251,$
$t_1^3t_3^3t_5t_7 = -333s_1 - 316s_2 - 287s_3 - 250s_4 - 199s_5 - 138s_6 - 73s_7 - 337,$

$t_1^3t_3^4 = 1919s_1 + 1797s_2 + 1550s_3 + 1381s_4 + 1065s_5 + 683s_6 + 405s_7 + 1887,$
$t_1^3t_3^4t_5 = 2513s_1 + 2371s_2 + 2202s_3 + 1781s_4 + 1415s_5 + 1031s_6 + 452s_7 + 2651,$
$t_1^3t_3^4t_7 = -867s_1 - 811s_2 - 736s_3 - 614s_4 - 474s_5 - 329s_6 - 165s_7 - 897,$
$t_1^3t_3^4t_5t_7 = -1171s_1 - 1098s_2 - 976s_3 - 834s_4 - 649s_5 - 439s_6 - 231s_7 - 1187,$

$t_1^3t_3^5 = 6567s_1 + 6162s_2 + 5265s_3 + 4819s_4 + 3716s_5 + 2334s_6 + 1472s_7 + 6353,$
$t_1^3t_3^5t_5 = 8532s_1 + 8080s_2 + 7634s_3 + 6086s_4 + 4884s_5 + 3651s_6 + 1513s_7 + 9117,$
$t_1^3t_3^5t_7 = -2931s_1 - 2766s_2 - 2533s_3 - 2128s_4 - 1678s_5 - 1183s_6 - 581s_7 - 3027,$
$t_1^3t_3^5t_5t_7 = -3983s_1 - 3752s_2 - 3347s_3 - 2895s_4 - 2269s_5 - 1537s_6 - 821s_7 - 4017,$

$t_1^3t_3^6 = 22736s_1 + 21264s_2 + 17745s_3 + 16686s_4 + 12729s_5 + 7661s_6 + 5259s_7 + 21551,$
$t_1^3t_3^6t_5 = 29095s_1 + 27582s_2 + 26523s_3 + 20560s_4 + 16612s_5 + 12803s_6 + 4846s_7 + 31687,$
$t_1^3t_3^6t_7 = -10084s_1 - 9503s_2 - 8695s_3 - 7223s_4 - 5697s_5 - 4034s_6 - 1924s_7 - 10459,$
$t_1^3t_3^6t_5t_7 = -13720s_1 - 12899s_2 - 11427s_3 - 9914s_4 - 7735s_5 - 5185s_6 - 2815s_7 - 13785,$

$t_1^3t_3^7 = 78674s_1 + 73415s_2 + 59443s_3 + 58284s_4 + 44000s_5 + 25012s_6 + 19275s_7 + 72363,$
$t_1^3t_3^7t_5 = 98695s_1 + 93849s_2 + 92690s_3 + 69280s_4 + 56677s_5 + 45607s_6 + 15175s_7 + 110339,$
$t_1^3t_3^7t_7 = -34431s_1 - 32507s_2 - 29959s_3 - 24700s_4 - 19587s_5 - 14041s_6 - 6502s_7 - 35917,$
$t_1^3t_3^7t_5t_7 = -47083s_1 - 44268s_2 - 39009s_3 - 34163s_4 - 26619s_5 - 17668s_6 - 9837s_7 - 47009.$

При $k_0 = 4$
$t_1^4 = 80s_1 + 68s_2 + 52s_3 + 35s_4 + 20s_5 + 10s_6 + 4s_7 + 85,$
$t_1^4t_5 = 101s_1 + 89s_2 + 72s_3 + 53s_4 + 35s_5 + 20s_6 + 9s_7 + 105,$
$t_1^4t_7 = -42s_1 - 36s_2 - 23s_3 - 11s_4 - 3s_5 + 3s_6 + 5s_7 - 43,$
$t_1^4t_5t_7 = -52s_1 - 43s_2 - 31s_3 - 19s_4 - 10s_5 - 4s_6 - s_7 - 55,$

$t_1^4t_3 = 207s_1 + 203s_2 + 195s_3 + 177s_4 + 148s_5 + 108s_6 + 57s_7 + 209,$
$t_1^4t_3t_5 = 287s_1 + 278s_2 + 260s_3 + 232s_4 + 190s_5 + 135s_6 + 71s_7 + 289,$
$t_1^4t_3t_7 = -87s_1 - 92s_2 - 91s_3 - 87s_4 - 78s_5 - 57s_6 - 28s_7 - 83,$
$t_1^4t_3t_5t_7 = -125s_1 - 124s_2 - 120s_3 - 111s_4 - 95s_5 - 70s_6 - 37s_7 - 125,$

$t_1^4t_3^2 = 792s_1 + 735s_2 + 650s_3 + 536s_4 + 410s_5 + 278s_6 + 138s_7 + 815,$
$t_1^4t_3^2t_5 = 1058s_1 + 987s_2 + 873s_3 + 733s_4 + 565s_5 + 381s_6 + 195s_7 + 1079,$
$t_1^4t_3^2t_7 = -372s_1 - 344s_2 - 294s_3 - 237s_4 - 179s_5 - 116s_6 - 54s_7 - 379,$
$t_1^4t_3^2t_5t_7 = -492s_1 - 455s_2 - 398s_3 - 327s_4 - 249s_5 - 167s_6 - 83s_7 - 505,$

$t_1^4t_3^3 = 2611s_1 + 2473s_2 + 2255s_3 + 1923s_4 + 1527s_5 + 1069s_6 + 538s_7 + 2671,$
$t_1^4t_3^3t_5 = 3538s_1 + 3343s_2 + 3011s_3 + 2592s_4 + 2045s_5 + 1405s_6 + 732s_7 + 3587,$
$t_1^4t_3^3t_7 = -1186s_1 - 1132s_2 - 1029s_3 - 891s_4 - 716s_5 - 498s_6 - 253s_7 - 1199,$
$t_1^4t_3^3t_5t_7 = -1606s_1 - 1523s_2 - 1385s_3 - 1190s_4 - 947s_5 - 660s_6 - 337s_7 - 1635,$

$t_1^4t_3^4 = 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7 + 9319,$
$t_1^4t_3^4t_5 = 12250s_1 + 11518s_2 + 10282s_3 + 8800s_4 + 6881s_5 + 4679s_6 + 2446s_7 + 12419,$
$t_1^4t_3^4t_7 = -4178s_1 - 3925s_2 - 3502s_3 - 2964s_4 - 2318s_5 - 1582s_6 - 803s_7 - 4253,$
$t_1^4t_3^4t_5t_7 = -5603s_1 - 5266s_2 - 4728s_3 - 3996s_4 - 3129s_5 - 2153s_6 - 1088s_7 - 5725,$

$t_1^4t_3^5 = 30914s_1 + 29166s_2 + 26529s_3 + 22296s_4 + 17606s_5 + 12341s_6 + 6050s_7 + 31811,$
$t_1^4t_3^5t_5 = 41895s_1 + 39449s_2 + 35216s_3 + 30335s_4 + 23768s_5 + 16134s_6 + 8535s_7 + 42341,$
$t_1^4t_3^5t_7 = -14188s_1 - 13385s_2 - 12036s_3 - 10288s_4 - 8103s_5 - 5570s_6 - 2861s_7 - 14421,$
$t_1^4t_3^5t_5t_7 = -19082s_1 - 17994s_2 - 16246s_3 - 13800s_4 - 10869s_5 - 7522s_6 - 3806s_7 - 19487,$

$t_1^4t_3^6 = 106032s_1 + 99982s_2 + 91160s_3 + 76085s_4 + 60080s_5 + 42335s_6 + 20390s_7 + 109551,$
$t_1^4t_3^6t_5 = 143982s_1 + 135447s_2 + 120372s_3 + 104080s_4 + 81344s_5 + 54821s_6 + 29415s_7 + 145041,$
$t_1^4t_3^6t_7 = -48825s_1 - 45964s_2 - 41202s_3 - 35152s_4 - 27573s_5 - 18878s_6 - 9731s_7 - 49633,$
$t_1^4t_3^6t_5t_7 = -65551s_1 - 61745s_2 - 55695s_3 - 47160s_4 - 37076s_5 - 25649s_6 - 12920s_7 - 67023,$

$t_1^4t_3^7=362569s_1+342179s_2+313816s_3+260154s_4+206014s_5+146571s_6+69012s_7+$
$+376541,$
$t_1^4t_3^7t_5=494268s_1+464853s_2+411191s_3+358103s_4+279429s_5+186739s_6+102284s_7+$
$+495427,$
$t_1^4t_3^7t_7=-167245s_1-157514s_2-141184s_3-120794s_4-94789s_5-64830s_6-33628s_7-$
$-169793,$
$t_1^4t_3^7t_5t_7=-224452s_1-211532s_2-191142s_3-161727s_4-127296s_5-88287s_6-$
$-44287s_7-229711.$

При $k_0=5$
$t_1^5=365s_1+320s_2+255s_3+185s_4+121s_5+69s_6+30s_7+381,$
$t_1^5t_5=468s_1+420s_2+350s_3+269s_4+189s_5+117s_6+55s_7+485,$
$t_1^5t_7=-186s_1-155s_2-115s_3-70s_4-29s_5-6s_6-199,$
$t_1^5t_5t_7=-233s_1-200s_2-155s_3-107s_4-65s_5-34s_6-14s_7-245,$

$t_1^5t_3=1021s_1+991s_2+930s_3+831s_4+685s_5+490s_6+256s_7+1029,$
$t_1^5t_3t_5=1401s_1+1346s_2+1247s_3+1095s_4+888s_5+628s_6+325s_7+1419,$
$t_1^5t_3t_7=-440s_1-440s_2-435s_3-405s_4-341s_5-250s_6-135s_7-441,$
$t_1^5t_3t_5t_7=-619s_1-605s_2-575s_3-520s_4-433s_5-313s_6-165s_7-623,$

$t_1^5t_3^2=3784s_1+3528s_2+3123s_3+2609s_4+2012s_5+1362s_6+688s_7+3869,$
$t_1^5t_3^2t_5=5055s_1+4730s_2+4216s_3+3539s_4+2747s_5+1874s_6+946s_7+5169,$
$t_1^5t_3^2t_7=-1761s_1-1626s_2-1426s_3-1170s_4-880s_5-586s_6-295s_7-1811,$
$t_1^5t_3^2t_5t_7=-2342s_1-2177s_2-1921s_3-1596s_4-1224s_5-826s_6-416s_7-2399,$

$t_1^5t_3^3=12621s_1+11933s_2+10789s_3+9247s_4+7312s_5+5057s_6+2596s_7+12839,$
$t_1^5t_3^3t_5=17017s_1+16071s_2+14529s_3+12396s_4+9785s_5+6774s_6+3450s_7+17349,$
$t_1^5t_3^3t_7=-5732s_15437s_2-4954s_3-4266s_4-3387s_5-2358s_6-1214s_7-5835,$
$t_1^5t_3^3t_5t_7=-7755s_1-7339s_2-6651s_3-5705s_4-4519s_5-3134s_6-1607s_7-7893,$

$t_1^5t_3^4=43709s_1+41113s_2+36878s_3+31340s_4+24554s_5+16842s_6+8618s_7+4453,$
$t_1^5t_3^4t_5=58719s_1+55269s_2+49731s_3+42160s_4+33088s_5+22806s_6+11560s_7+59955,$
$t_1^5t_3^4t_7=-20036s_1-18822s_2-16887s_3-14291s_4-11169s_5-7667s_6-3900s_7-20459,$
$t_1^5t_3^4t_5t_7=-26925s_1-25318s_2-22722s_3-19272s_4-15094s_5-10366s_6-5282s_7-27463,$

$t_1^5t_3^5=149334s_1+140716s_2+126511s_3+107938s_4+84822s_5+58293s_6+29947s_7+151971,$
$t_1^5t_3^5t_5=200796s_1+189236s_2+170663s_3+144902s_4+113988s_5+78772s_6+39902s_7+$
$+205029,$
$t_1^5t_3^5t_7=-68218s_1-64318s_2-58000s_3-49382s_4-38858s_5-26822s_6-13673s_7-69567,$
$t_1^5t_3^5t_5t_7=-91891s_1-86609s_2-77991s_3-66431s_4-52243s_5-35997s_6-18391s_7-93639,$

$t_1^5t_3^6=512757s_1+482810s_2+433339s_3+369642s_4+290050s_5+198890s_6+102415s_7+$
$+521579,$
$t_1^5t_3^6t_5=688824s_1+648922s_2+585225s_3+496064s_4+390032s_5+269660s_6+136165s_7+$
$+703899,$
$t_1^5t_3^6t_7=-234449s_1-220776s_2-198716s_3-168769s_4-132536s_5-91334s_6-46451s_7-$
$-239211,$
$t_1^5t_3^6t_5t_7=-315565s_1-297174s_2-267227s_3-227325s_4-178500s_5-122805s_6-$
$-62725s_7-321615,$

$t_1^5t_3^7 = 1757674s_1 + 1655259s_2 + 1484732s_3 + 1268734s_4 + 995567s_5 + 681751s_6 + 352585s_7 + 1786037,$
$t_1^5t_3^7t_5 = 2360007s_1 + 2223842s_2 + 2007844s_3 + 1700315s_4 + 1337746s_5 + 926555s_6 + 466168s_7 + 2413669,$
$t_1^5t_3^7t_7 = -802981s_1 - 756530s_2 - 681526s_3 - 579111s_4 - 455225s_5 - 314041s_6 - 159619s_7 - 819311,$
$t_1^5t_3^7t_5t_7 = -1081289s_1 - 1018564s_2 - 916149s_3 - 779984s_4 - 612739s_5 - 421597s_6 - 215583s_7 - 1101679.$

При $k_0 = 6$
$t_1^6 = 1686s_1 + 1506s_2 + 1246s_3 + 950s_4 + 660s_5 + 405s_6 + 190s_7 + 1751,$
$t_1^6t_5 = 2191s_1 + 1992s_2 + 1696s_3 + 1345s_4 + 980s_5 + 630s_6 + 306s_7 + 2261,$
$t_1^6t_7 = -841s_1 - 725s_2 - 555s_3 - 375s_4 - 220s_5 - 105s_6 - 35s_7 - 881,$
$t_1^6t_5t_7 = -1066s_1 - 940s_2 - 760s_3 - 561s_4 - 375s_5 - 220s_6 - 99s_7 - 111,$

$t_1^6t_3 = 4992s_1 + 4802s_2 + 4458s_3 + 3927s_4 + 3192s_5 + 2262s_6 + 1175s_7 + 5053,$
$t_1^6t_3t_5 = 6814s_1 + 6508s_2 + 5977s_3 + 5204s_4 + 4183s_5 + 2936s_6 + 1516s_7 + 6913,$
$t_1^6t_3t_7 = -2196s_1 - 2161s_2 - 2061s_3 - 1871s_4 - 1566s_5 - 1131s_6 - 591s_7 - 2201,$
$t_1^6t_3t_5t_7 = -3041s_1 - 2942s_2 - 2752s_3 - 2446s_4 - 2006s_5 - 1431s_6 - 746s_7 - 3071,$

$t_1^6t_3^2 = 18088s_1 + 16913s_2 + 15056s_3 + 12634s_4 + 9794s_5 + 6671s_6 + 3374s_7 + 18493,$
$t_1^6t_3^2t_5 = 24225s_1 + 22709s_2 + 20287s_3 + 17106s_4 + 13322s_5 + 9106s_6 + 4621s_7 + 24739,$
$t_1^6t_3^2t_7 = -8385s_1 - 7794s_2 - 6863s_3 - 5688s_4 - 4357s_5 - 2931s_6 - 1466s_7 - 8585,$
$t_1^6t_3^2t_5t_7 = -11181s_1 - 10435s_2 - 9260s_3 - 7744s_4 - 5983s_5 - 4062s_6 - 2050s_7 - 11437,$

$t_1^6t_3^3 = 60803s_1 + 57429s_2 + 51902s_3 + 44338s_4 + 35001s_5 + 24212s_6 + 12369s_7 + 61947,$
$t_1^6t_3^3t_5 = 81983s_1 + 77362s_2 + 69798s_3 + 59555s_4 + 46934s_5 + 32405s_6 + 16559s_7 + 83525,$
$t_1^6t_3^3t_7 = -27690s_1 - 26224s_2 - 23776s_3 - 20402s_4 - 16179s_5 - 11225s_6 - 5745s_7 - 28173,$
$t_1^6t_3^3t_5t_7 = -37393s_1 - 35343s_2 - 31969s_3 - 27348s_4 - 21616s_5 - 14965s_6 - 7653s_7 - 38081,$

$t_1^6t_3^4 = 209940s_1 + 197571s_2 + 177594s_3 + 150727s_4 + 118232s_5 + 81354s_6 + 41396s_7 + 214175,$
$t_1^6t_3^4t_5 = 282393s_1 + 265834s_2 + 238967s_3 + 203054s_4 + 159345s_5 + 109614s_6 + 55894s_7 + 287931,$
$t_1^6t_3^4t_7 = -96240s_1 - 90495s_2 - 81205s_3 - 68836s_4 - 53914s_5 - 37027s_6 - 18836s_7 - 98175,$
$t_1^6t_3^4t_5t_7 = -129353s_1 - 121700s_2 - 109331s_3 - 92772s_4 - 72736s_5 - 50014s_6 - 25460s_7 - 131949,$

$t_1^6t_3^5 = 717866s_1 + 676470s_2 + 609321s_3 + 518280s_4 + 407511s_5 + 281000s_6 + 143115s_7 + 732071,$
$t_1^6t_3^5t_5 = 966520s_1 + 910626s_2 + 819585s_3 + 697561s_4 + 548227s_5 + 377564s_6 + 192760s_7 + 985093,$
$t_1^6t_3^5t_7 = -328321s_1 - 309485s_2 - 278776s_3 - 237380s_4 - 186735s_5 - 128735s_6 - 65680s_7 - 334639,$
$t_1^6t_3^5t_5t_7 = -442021s_1 - 416561s_2 - 375165s_3 - 319271s_4 - 251053s_5 - 173062s_6 - 88240s_7 - 450639,$

$t_1^6t_3^6 = 2463242s_1 + 2320127s_2 + 2088598s_3 + 1774731s_4 + 1394336s_5 + 960997s_6 + 488940s_7 + 2512713,$
$t_1^6t_3^6t_5 = 3315694s_1 + 3122934s_2 + 2809067s_3 + 2389903s_4 + 1877146s_5 + 1291921s_6 + 659692s_7 + 3379391,$

$t_1^6t_3^6t_7 = -1127601s_1 - 1061921s_2 - 955246s_3 - 812131s_4 - 637806s_5 - 439090s_6 - -223870s_7 - 1149661,$
$t_1^6t_3^6t_5t_7 = -1517146s_1 - 1428906s_2 - 1285791s_3 - 1093031s_4 - 858582s_5 - 591355s_6 - -301305s_7 - 1547093,$

$t_1^6t_3^7 = 8441376s_1 + 7952436s_2 + 7161966s_3 + 6086043s_4 + 4783369s_5 + 3298637s_6 + +1677318s_7 + 8611903,$
$t_1^6t_3^7t_5 = 11365369s_1 + 10705677s_2 + 9629754s_3 + 8196302s_4 + 6438628s_5 + 4430784s_6 + +2264301s_7 + 11581367,$
$t_1^6t_3^7t_7 = -3863329s_1 - 3639459s_2 - 3275373s_3 - 2786433s_4 - 2189522s_5 - 1507996s_6 - -769266s_7 - 3938333,$
$t_1^6t_3^7t_5t_7 = -5198970s_1 - 4897665s_2 - 4408725s_3 - 3749033s_4 - 2946052s_5 - 2029903s_6 - -1034336s_7 - 5301385.$

При $k_0 = 7$
$t_1^7 = 7875s_1 + 7139s_2 + 6048s_3 + 4767s_4 + 3451s_5 + 2205s_6 + 1065s_7 + 8135,$
$t_1^7t_5 = 10331s_1 + 9485s_2 + 8204s_3 + 6643s_4 + 4957s_5 + 3261s_6 + 1610s_7 + 10627,$
$t_1^7t_7 = -3843s_1 - 3377s_2 - 2716s_3 - 1980s_4 - 1290s_5 - 735s_6 - 325s_7 - 4013,$
$t_1^7t_5t_7 = -4943s_1 - 4438s_2 - 3702s_3 - 2856s_4 - 2015s_5 - 1255s_6 - 595s_7 - 5123,$

$t_1^7t_3 = 24297s_1 + 23232s_2 + 21371s_3 + 18641s_4 + 15014s_5 + 10556s_6 + 5454s_7 + 24641,$
$t_1^7t_3t_5 = 33026s_1 + 31416s_2 + 28686s_3 + 24808s_4 + 19816s_5 + 13839s_6 + 7119s_7 + 33557,$
$t_1^7t_3t_7 = -10815s_1 - 10490s_2 - 9855s_3 - 8790s_4 - 7220s_5 - 5159s_6 - 2697s_7 - 10915,$
$t_1^7t_3t_5t_7 = -14847s_1 - 14252s_2 - 13187s_3 - 11577s_4 - 9381s_5 - 6629s_6 - 3437s_7 - 15037,$

$t_1^7t_3^2 = 86638s_1 + 81184s_2 + 72485s_3 + 61068s_4 + 47529s_5 + 32473s_6 + 16465s_7 + 88495,$
$t_1^7t_3^2t_5 = 33026s_1 + 31416s_2 + 28686s_3 + 24808s_4 + 19816s_5 + 13839s_6 + 7119s_7 + 33557,$
$t_1^7t_3^2t_7 = -40012s_1 - 37315s_2 - 33087s_3 - 27633s_4 - 21305s_5 - 14442s_6 - 7288s_7 - 40943,$
$t_1^7t_3^2t_5t_7 = -53494s_1 - 50057s_2 - 44603s_3 - 37484s_4 - 29099s_5 - 19839s_6 - 10045s_7 - 54669,$

$t_1^7t_3^3 = 292884s_1 + 276419s_2 + 249473s_3 + 212882s_4 + 167822s_5 + 115920s_6 + 59213s_7 + +298411,$
$t_1^7t_3^3t_5 = 394651s_1 + 372223s_2 + 335632s_3 + 286054s_4 + 225251s_5 + 155453s_6 + 79339s_7 + +402215,$
$t_1^7t_3^3t_7 = -133553s_1 - 126265s_2 - 114271s_3 - 97806s_4 - 77327s_5 - 53551s_6 - 27404s_7 - -136001,$
$t_1^7t_3^3t_5t_7 = -180179s_1 - 170134s_2 - 153669s_3 - 131241s_4 - 103551s_5 - 71582s_6 - -36581s_7 - 183553,$

$t_1^7t_3^4 = 1009220s_1 + 950007s_2 + 854064s_3 + 725478s_4 + 569303s_5 + 391709s_6 + +199586s_7 + 1029197,$
$t_1^7t_3^4t_5 = 1357518s_1 + 1278179s_2 + 1149593s_3 + 976814s_4 + 766874s_5 + 527907s_6 + +268959s_7 + 1384385,$
$t_1^7t_3^4t_7 = -462355s_1 - 434951s_2 - 390690s_3 - 331477s_4 - 259818s_5 - 178613s_6 - 90941s_7 - -471645,$
$t_1^7t_3^4t_5t_7 = -621686s_1 - 585105s_2 - 525892s_3 - 446553s_4 - 350313s_5 - 240982s_6 - -122750s_7 - 634055,$

$t_1^7t_3^5 = 3453594s_1 + 3254008s_2 + 2929448s_3 + 2492582s_4 + 1959227s_5 + 1349906s_6 + +688511s_7 + 3520743,$

$t_1^7t_3^5t_5 = 4648344s_1 + 4379385s_2 + 3942519s_3 + 3353563s_4 + 2635697s_5 + 1816112s_6 + 925791s_7 + 4739385$,
$t_1^7t_3^5t_7 = -1579542s_1 - 1488601s_2 - 1340697s_3 - 1141111s_4 - 897306s_5 - 618530s_6 - 315470s_7 - 1610251$,
$t_1^7t_3^5t_5t_7 = -2126407s_1 - 2003657s_2 - 1804071s_3 - 1535112s_4 - 1206791s_5 - 831626s_6 - 424115s_7 - 2167803$,

$t_1^7t_3^6 = 11847922s_1 + 11159411s_2 + 10041034s_3 + 8538789s_4 + 6707602s_5 + 4619004s_6 + 2355333s_7 + 12079451$,
$t_1^7t_3^6t_5 = 15942780s_1 + 15016989s_2 + 13514744s_3 + 11490971s_4 + 9027729s_5 + 6218662s_6 + 3169067s_7 + 16256647$,
$t_1^7t_3^6t_7 = -5422030s_1 - 5106560s_2 - 4594705s_3 - 3906194s_4 - 3068143s_5 - 2112897s_6 - 1076896s_7 - 5528705$,
$t_1^7t_3^6t_5t_7 = -7296082s_1 - 6871967s_2 - 6183456s_3 - 5257665s_4 - 4130064s_5 - 2844273s_6 - 1449937s_7 - 7439197$,

$t_1^7t_3^7 = 40609057s_1 + 38253724s_2 + 34425190s_3 + 29282451s_4 + 23007333s_5 + 15845367s_6 + 8082006s_7 + 41399527$,
$t_1^7t_3^7t_5 = 54647536s_1 + 51478469s_2 + 46335730s_3 + 39401145s_4 + 30959769s_5 + 21330015s_6 + 10869412s_7 + 55723459$,
$t_1^7t_3^7t_7 = -18579823s_1 - 17502927s_2 - 15754116s_3 - 13398783s_4 - 10528590s_5 - 7253217s_6 - 3697518s_7 - 18943909$,
$t_1^7t_3^7t_5t_7 = -25005715s_1 - 23555778s_2 - 21200445s_3 - 18031378s_4 - 14168049s_5 - 9759324s_6 - 4975955s_7 - 25494655$.

Среди этих элементов только $t_1^4t_3^4 = 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7 + 9319$ удовлетворяет условию. Также вычислены остальные порождающие подгруппы L:
$t_1^8 = 37072s_1 + 33964s_2 + 29280s_3 + 23610s_4 + 17536s_5 + 11488s_6 + 5656s_7 + 38163$,
$t_1^4t_3^4 = 9072s_1 + 8534s_2 + 7712s_3 + 6476s_4 + 5084s_5 + 3534s_6 + 1748s_7 + 9319$,
$t_3^6t_5^2 = -956s_1 - 568s_2 + 2630s_3 - 1416s_4 - 258s_5 + 2330s_6 - 1900s_7 + 2739$,
$t_1^6t_7^2 = 450s_1 + 346s_2 + 236s_3 + 120s_4 + 20s_5 - 16s_6 - 6s_7 + 499$,
$t_5^7t_{11} = -5468s_1 + 2456s_2 + 1246s_3 - 4612s_4 + 6524s_5 - 6118s_6 + 3592s_7 + 6663$,
$t_7^7t_9 = -1246s_1 - 6118s_2 + 3592s_3 + 4612s_4 - 5468s_5 - 2456s_6 + 6524s_7 + 6663$,
$t_3^7t_{13} = -3592s_1 - 2456s_2 + 6524s_3 - 4612s_4 - 1246s_5 + 6118s_6 - 5468s_7 + 6663$. □

Заключение

Пусть $\alpha = \cos\frac{2\pi}{2^n} + i\sin\frac{2\pi}{2^n}$ — первообразный корень из 1 степени 2^n для натурального n. Для $j = 1, 2, \ldots$ обозначим $t_j = 1 + s_j + s_{2j}$, $s_j = \alpha^j + \alpha^{-j}$. Тогда группа K круговых единиц поля $\mathbb{Q}_{2^n}$ имеет вид

$$K = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{2^{n-2}-2} \langle t_{2l+1}\rangle.$$

В данной работе найдены порождающие подгруппы $L = \{\lambda \in K | \lambda \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$ группы K для кругового поля порядка 16 и 32.

Список литературы

1. **Алеев, Р. Ж.** Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп : дис. ...д-ра физ.-мат. наук / Р. Ж. Алеев. — Челябинск, 2000. — 355 с.

2. **Кэртис, Ч.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр : пер. с англ. / Ч. Кэртис, И. Райнер. — М. : Наука, 1969. — 668 с.
3. **Miller, J. C.** Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem / J. C. Miller // Acta Arithmetica. — 2014. — Vol. 164, no. 4. — P. 381–397.
4. **Miller, J. C.** Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor / J. C. Miller // LMS J. of Computation and Mathematics. — 2014. — Vol. 17, special iss. A. — P. 404–417.
5. **Van der Linden, F. J.** Class number computations of real Abelian number fields / F. J. van der Linden // Mathematics of Computations. — 1982. — Vol. 39, no. 160. — P. 693–707.
6. **Masley, J. M.** Solution of small class number problems for cyclotomic fields / J. M. Masley // Compositio Mathematica. — 1976. — Vol. 33, fasc. 2. — P. 179–186.
7. **Fukuda, T.** Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$ / T. Fukuda, K. Komatsu // III Intern. J. of Number Theory. — 2011. — Vol. 7, no. 6. — P. 1627–1635.
8. **Алеев, Р. Ж.** Порождающие группы круговых единиц / Р. Ж. Алеев, В. С. Такшеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2008. — № 6 (107). Математика. Механика. Информатика. Вып. 10. — С. 121–129.
9. **Bass, H.** Generators and relations for cyclotomic units / H. Bass // Nagoya Mathematical J. — 1966. — Vol. 27, no. 2. — P. 401–407.
10. **Виноградов, И. М.** Основы теории чисел : учеб. пособие. — 12-е изд., стер. / И. М. Виноградов. — СПб. : Лань, 2009. — 176 с.

Поступила в редакцию 21.10.2016
После переработки 07.11.2016

Сведения об авторах

Алеев Рифхат Жалялович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет; профессор кафедры системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: aleev@csu.ru.

Митина Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры, Челябинский государственный университет; доцент кафедры прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия; e-mail: ovm@csu.ru.

Христенко Екатерина Андреевна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: nice.katrin94@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 4. P. 8–29.

CONGRUENCE MODULO 2 OF CIRCULAR UNITS IN THE FIELDS Q_{16} AND Q_{32}

R.Zh. Aleev[1,2,a], **O.V. Mitina**[1,2,b], **E.A. Khristenko**[1,c]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a] *aleev@csu.ru;* [b] *ovm@csu.ru;* [c] *nice.katrin94@mail.ru*

In this paper the behavior of units (invertible elements) of the rings of integer of 2-circular fields is studied. In particular, the comparability of modulo 2 for the circular units of fields Q_{16} и Q_{32} is considered.

Keywords: *group ring, group ring unit, cyclic group, primitive root.*

References

1. **Aleev R.Zh.** *Tsentral'nye edinitsy tselochislennykh gruppovykh kolets konechnykh grupp* [Central units of finite groups integral group rings. Thesis]. Chelyabinsk, 2000. 355 p. (In Russ.).
2. **Curtis Ch.W., Reiner I.** *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Providence, Rhode Island, AMS Chelsea Publ., 2006. 689 p.
3. **Miller J.C.** Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem. *Acta Arithmetica*, 2014, vol. 164, no. 4, pp. 381–397.
4. **Miller J.C.** Class numbers of real cyclotomic fields of composite conductor. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 2014, vol. 17, special iss. A, pp. 404–417.
5. **Van der Linden F. J.** Class number computations of real Abelian number fields. *Mathematics of Computations*, 1982, vol. 39, no. 160, pp. 693–707.
6. **Masley J.M.** Solution of small class number problems for cyclotomic fields. *Compositio Mathematica*, 1976, vol. 33, fasc. 2, pp. 179–186.
7. **Fukuda T., Komatsu K.** Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$. *III International Journal of Number Theory*, 2011, vol. 7, no. 6, pp. 1627–1635.
8. **Aleev R.Zh., Taksheeva V.S.** Porozhdayushchiye gruppy krugovykh edinits [Generators of the group of cyclotomic units]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2008, no. 6 (107), pp. 121–129. (In Russ.).
9. **Bass H.** Generators and relations for cyclotomic units. *Nagoya Mathematical Journal*, 1966, vol. 27, no. 2, pp. 401–407.
10. **Vinogradov I.M.** *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of number theory]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009. 176 p. (In Russ.).

Accepted article received 21.10.2016
Corrections received 07.11.2016