Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 2. С. 162–171.

УДК 517.95 DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16203

КОНТАКТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КОНТАКТА

Ю. А. Крутова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Lulia_74rus@mail.ru

Рассмотрено проводящее тело в форме параллелепипеда, по торцам которого подключены малые контакты одинаковой прямоугольной формы. Длина и ширина этих контактов равна величинам 2ε и 2μ, рассматриваемым далее как малые параметры. Рассмотрен случай равномерной плотности тока на контактах. Близкая к нему физическая ситуация возникает, например, при наличии тонкой плохо проводящей плёнки на поверхности контактов. Потенциал электрического тока образца моделируется с помощью решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в параллелепипеде. Вычислено электрическое сопротивление в виде суммы двойного ряда, сингулярно зависящего от двух малых параметров ε и μ. Рассмотрен случай, когда $\mu = k\varepsilon$, где k — некоторая постоянная. Главный член асимптотического разложения суммы данного ряда при $\varepsilon \to 0$ соответствует контактному сопротивлению прямоугольного контакта со сторонами 2ε и 2μ. Целью данной работы является получение явного выражения для этого контактного сопротивления.

Ключевые слова: *контактное сопротивление, электрический потенциал, краевая задача, уравнение Лапласа, малый параметр, асимптотическое разложение.*

Введение

Целью нашей работы является нахождение аналитического выражения контактного сопротивления малого прямоугольного контакта с постоянной плотностью тока на нём. Результаты исследований аналогичной двумерной задачи опубликованы в работах [1–3].

Контактное сопротивление возникает из-за стягивания линий тока к пятну контакта. По определению Р. Хольма [4] можно вычислить контактное сопротивление прямоугольного контакта со сторонами ε и μ как сопротивление полубесконечного тела следующим образом. Пусть $u(x,y,z)$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad z > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \begin{cases} -\dfrac{I}{4\varepsilon\mu\sigma}, \quad (x,y) \in (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\mu,\mu), \\ 0, \quad (x,y) \notin [-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\mu,\mu], \end{cases} \\ u(x,y,z) \to 0 \text{ при } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty. \end{cases}$$

Здесь функция $u(x,y,z)$ описывает электрический потенциал внутри полубесконечного тела и, вообще говоря, зависит ещё от малых параметров ε и μ. Через σ обозначена электрическая проводимость, через I — сила тока, протекающая через единственный прямоугольный контакт со сторонами 2ε и 2μ.

Используя функцию Грина для полупространства в случае второй краевой задачи

$$G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right),$$

можно найти

$$u(x,y,z) = -\iint\limits_{\{\zeta=0\}} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi,\eta,\zeta)dS =$$

$$= \frac{I}{8\pi\varepsilon\mu\sigma}\int\limits_{-\mu}^{\mu}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}. \qquad (1)$$

Тогда контактное сопротивление

$$R_{cont.} = \frac{W}{I^2} = \frac{1}{I^2}\iiint\limits_{z>0}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\sigma dxdydz,$$

где W — мощность выделяемой энергии.

Однако аналитическое вычисление данных интегралов связано со значительными трудностями, поэтому найдём контактное сопротивление иначе, как главный член асимптотики сопротивления тела конечных размеров с двумя малыми прямоугольными контактами.

1. Сведение к математической постановке

Вычислим асимптотику электрического сопротивления образца с формой параллелепипеда, подключённого с помощью двух малых квадратных контактов со сторонами 2ε и 2μ (рис. 1) по малому параметру ε.

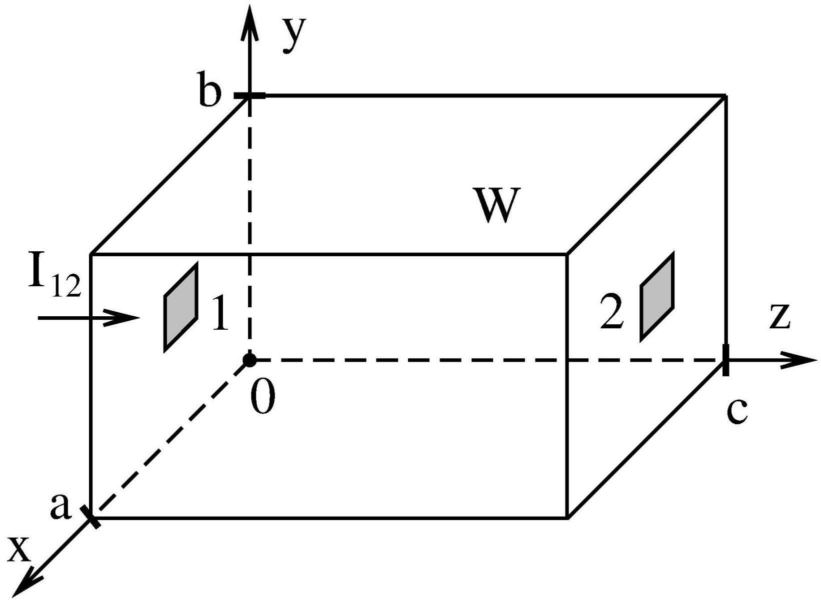

Рис. 1. Схема протекания тока через образец

Электрический потенциал при протекании тока через образец прямоугольной формы $\Omega = \{(x,y,z) : 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$ с малыми прямоугольными контактами может быть смоделирован с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0,x=a} = 0, \quad (y,z) \in (0,b)\times(0,c), \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0,y=b} = 0, \quad (x,z) \in (0,a)\times(0,c), \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0,z=c} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in (0,a)\times(0,b), \end{cases} \tag{2}$$

где функция

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1, \quad (x,y) \in \left(\dfrac{a}{2}-\varepsilon, \dfrac{a}{2}+\varepsilon\right) \times \left(\dfrac{b}{2}-\mu, \dfrac{b}{2}+\mu\right), \\ 0, \quad (x,y) \notin \left[\dfrac{a}{2}-\varepsilon, \dfrac{a}{2}+\varepsilon\right] \times \left[\dfrac{b}{2}-\mu, \dfrac{b}{2}+\mu\right]. \end{cases}$$

Методом разделения переменных можно получить следующее решение задачи (2):

$$\varphi(x,y,z) = A_0 + \frac{4\varepsilon\mu}{ab}z + \frac{2\mu a}{\pi^2 b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi n}{a}c\right)}\cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{a}z\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{a}(c-z)\right)\right) +$$

$$+\frac{2\varepsilon b}{\pi^2 a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi m}{b}\mu\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi m}{b}c\right)}\cos\left(\frac{2\pi m}{b}y\right)\left(\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi m}{b}z\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi m}{b}(c-z)\right)\right) +$$

$$+\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\sin\left(\dfrac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)\sin\left(\dfrac{2\pi m}{b}\mu\right)}{mn\sqrt{\left(\dfrac{n}{a}\right)^2+\left(\dfrac{m}{b}\right)^2}\operatorname{sh}\left(2\pi\sqrt{\left(\dfrac{n}{a}\right)^2+\left(\dfrac{m}{b}\right)^2}\,c\right)}\cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{b}y\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{ch}\left(2\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2}\,z\right) - \operatorname{ch}\left(2\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\left(\frac{m}{b}\right)^2}\,(c-z)\right)\right),$$

где A_0 — произвольная постоянная.

Силу электрического тока, протекающего через контакты 1 и 2 (рис. 1), можно вычислить следующим образом [5]:

$$I_{12} = \sigma\int_0^a\int_0^b \psi(x,y)\,dydx = \sigma\cdot 2\varepsilon\cdot 2\mu = 4\varepsilon\mu\sigma,$$

где σ — удельная электрическая проводимость образца.

Мощность выделяемой энергии можно выразить через интеграл [5]

$$W = \sigma\iiint\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)dxdydz.$$

Тогда сопротивление

$$R = \frac{W}{I_{12}^2} = \frac{c}{\sigma ab} + \frac{2}{\sigma\pi b}S_1 + \frac{2}{\sigma\pi a}S_2 + \frac{4}{\sigma\pi ab}S_3, \tag{3}$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)^2} \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{\pi n}{a}\,c\right)}{n}, \qquad S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi m}{b}\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)^2} \frac{\operatorname{th}\left(\dfrac{\pi m}{b}\,c\right)}{m},$$

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)^2} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)^2} \frac{\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}\;c\right)}{\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}}.$$

Для суммы S_1 в работах [1; 3] уже была вычислена следующая асимптотика:

$$S_1 = \ln\left(\frac{e^{3/2}a}{4\pi\varepsilon}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{n\,\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi n}{a}\,b\right)} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi n}{a}\,b\right)}\right)\left(\frac{2\pi\varepsilon}{a}\right)^2 + O\left(\frac{\varepsilon^4}{a^4}\right), \ \ \frac{\varepsilon}{a} \to 0,$$

аналогичное асимптотическое разложение имеет место для S_2, поэтому нашей задачей является нахождение асимптотики суммы ряда S_3.

2. Вычисление асимптотики

Теорема 1. *Пусть $\mu = k\varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место следующее асимптотическое равенство:*

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)^2} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)^2} \frac{\operatorname{th}\left(\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}\;c\right)}{\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}} =$$

$$= \frac{\pi ab}{6k^2\varepsilon}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\right)+\frac{3k^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{th} x = 1 - e^{-x}/\operatorname{ch} x$, то

$$S_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)^2} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}} + O(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

Обозначим через

$$F(m,n,\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\right)^2} \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi m}{b}\,\mu\right)^2} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}}}.$$

Заменим сингулярный ряд из правой части (4) на интеграл следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} F(m,n,\varepsilon) = J + H, \tag{5}$$

где

$$J=\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty F(x,y,\varepsilon)dxdy,\qquad H=\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\int\limits_n^{n+1}\int\limits_m^{m+1}\big(F(m,n,\varepsilon)-F(x,y,\varepsilon)\big)dxdy.$$

Разобьём интеграл J на слагаемые следующим образом:

$$J=\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\frac{2\pi x}{a}\,\varepsilon\right)^2}\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi y}{b}\,\mu\right)}{\left(\frac{2\pi y}{b}\,\mu\right)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}=J_1-J_2^{(1)}-J_2^{(2)}+J_3,$$

где

$$J_1=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\,\varepsilon\right)}{\left(\frac{2\pi x}{a}\,\varepsilon\right)^2}\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi y}{b}\,\mu\right)}{\left(\frac{2\pi y}{b}\,\mu\right)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}=\left[\begin{array}{c} x=\dfrac{a\xi}{2\pi\varepsilon},\\ y=\dfrac{b\eta}{2\pi\mu}\end{array}\right]$$

$$=\frac{ab}{k\varepsilon}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\frac{\sin^2\eta}{\eta^2}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2+\frac{\eta^2}{k^2}}}=\left[\begin{array}{c}\xi=r\cos\varphi,\\ \eta=k\,r\sin\varphi,\\ |I|=k\,r\end{array}\right]=$$

$$=\frac{ab}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(r\cos\varphi)}{r^2\cos^2\varphi}\cdot\frac{\sin^2(k\,r\sin\varphi)}{k^2r^2\sin^2\varphi}d\varphi dr=$$

$$=\frac{ab}{\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int\limits_0^\infty\frac{(1-\cos(2r\cos\varphi))(1-\cos(2kr\sin\varphi))}{4r^4}drd\varphi=$$

$$=\frac{ab}{4\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int\limits_0^\infty r^{-4}\Big(1-\cos(2r\cos\varphi)-\cos(2kr\sin\varphi)+$$

$$+\frac{\cos(2r(\cos\varphi+k\sin\varphi))+\cos(2r(\cos\varphi-k\sin\varphi))}{2}\Big)drd\varphi=$$

$$=\frac{ab}{4\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int\limits_0^\infty(\dots)\frac{dr^{-3}}{-3}\,d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{4\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\left((\dots)\frac{r^{-3}}{-3}\Big|_{r=0}^\infty-\int\limits_0^\infty\frac{r^{-3}}{-3}(\dots)'_r\right)d\varphi=$$

$$=\dots=\frac{ab}{6\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\int\limits_0^\infty r^{-1}\big(-2\cos^3\varphi\cdot\sin(2r\cos\varphi)-$$

$$-2k^3\sin^3\varphi\cdot\sin(2kr\sin\varphi)+(\cos\varphi+k\sin\varphi)^3\sin(2r(\cos\varphi+k\sin\varphi))+$$

$$+(\cos\varphi-k\sin\varphi)^3\sin(2r(\cos\varphi-k\sin\varphi))\big)drd\varphi=$$

$$= \frac{ab}{6\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\cdot 2\cos\varphi)}{r}\,dr-$$

$$-2k^3\sin^3\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\cdot 2k\sin\varphi)}{r}\,dr+(\cos\varphi+k\sin\varphi)^3\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\cdot 2(\cos\varphi+k\sin\varphi))}{r}\,dr+$$

$$+(\cos\varphi-k\sin\varphi)^3\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\cdot 2(\cos\varphi-k\sin\varphi))}{r}\,dr\Big)d\varphi=$$

$$= \frac{ab}{6\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi\cdot\mathrm{sign}(\cos\varphi)\cdot\frac{\pi}{2}-2k^3\sin^3\varphi\cdot\mathrm{sign}(\sin\varphi)\cdot\frac{\pi}{2}+$$

$$+(\cos\varphi+k\sin\varphi)^3\cdot\mathrm{sign}(\cos\varphi+k\sin\varphi)\cdot\frac{\pi}{2}+(\cos\varphi-k\sin\varphi)^3\cdot\mathrm{sign}(\cos\varphi+k\sin\varphi)\cdot\frac{\pi}{2}\Big)d\varphi=$$

$$= \frac{\pi ab}{12\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi-2k^3\sin^3\varphi+(\cos\varphi+k\sin\varphi)^3+|\cos\varphi-k\sin\varphi|^3\Big)d\varphi=$$

$$= \frac{\pi ab}{12\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\mathrm{arcctg}\,k}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\Big(-2k^3\sin^3\varphi+6k^2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\Big)d\varphi+$$

$$+\frac{\pi ab}{12\varepsilon k^2}\int\limits_{\mathrm{arcctg}\,k}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi+6k\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi\Big)d\varphi=$$

$$= \frac{\pi ab}{12\varepsilon k^2}\int\limits_0^{\mathrm{arcctg}\,k}\Big(-2k^3\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+6k^2\frac{1}{\cos\varphi}\Big)d\varphi+\frac{\pi ab}{12\varepsilon k^2}\int\limits_{\mathrm{arcctg}\,k}^{\pi/2}\Big(-2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+6k\frac{1}{\sin\varphi}\Big)d\varphi=$$

$$= \frac{\pi ab}{6\varepsilon k^2}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\Big(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\Big)+\frac{3k^2}{2}\ln\Big(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\Big)\right),$$

так как $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(at)}{t}\,dt=\mathrm{sign}(a)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x)=\mathrm{sign}(a)\frac{\pi}{2}$ (здесь $\mathrm{Si}(\cdot)$ — интегральный синус [6, § 9.9], $\mathrm{sign}(\cdot)$ — знак числа),

$$0<J_2^{(1)}=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\Big)^2}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}\leqslant\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1}\frac{dxdy}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}+\int\limits_1^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\Big)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}\leqslant$$

$$\leqslant ab\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{2}} dr d\varphi + \int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)^2}\frac{dy}{y} = O(\ln\mu) = O(\ln\varepsilon)$$

в силу оценок из [1],

$$J_2^{(2)} = \int\limits_0^1\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)}{\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)^2}\frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}} = O(\ln\varepsilon)$$

по тем же соображениям, и, наконец,

$$J_3 = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(1).$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$J = \frac{\pi ab}{6k^2\varepsilon}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\right)+\frac{3k^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\right)\right)+O(\ln\varepsilon). \tag{6}$$

Оценим величину H. Для этого разобьём сумму H на два слагаемых:

$$H = H_1 + H_2, \tag{7}$$

где

$$H_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1}\int\limits_m^{m+1}\big(F(m,n,\varepsilon)-F(x,n,\varepsilon)\big)dxdy,$$

$$H_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1}\int\limits_m^{m+1}\big(F(x,n,\varepsilon)-F(x,y,\varepsilon)\big)dxdy.$$

По теореме Лагранжа для любого $x \in [m, m+1]$ имеет место равенство

$$F(x,n,\varepsilon) - F(m,n,\varepsilon) = F'_x(\xi_m,n,\varepsilon)\cdot(x-m),$$

где $\xi_m \in (m, m+1)$. Так как

$$F'_x(x,y,\varepsilon) = \frac{2\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)\sin^2(\dfrac{2\pi y}{b}\mu)}{\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)^2\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)^2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2\pi}{a}\,\varepsilon -$$

$$-2\frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)\sin^2(\dfrac{2\pi y}{b}\mu)}{\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)^2 x\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)^2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)\sin^2(\dfrac{2\pi y}{b}\mu)}{\left(\dfrac{2\pi x}{a}\varepsilon\right)^2\left(\dfrac{2\pi y}{b}\mu\right)^2}\cdot\frac{x}{a^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}},$$

то

$$|F'_x(\xi_m,n,\varepsilon)| \leqslant \left|\frac{2\sin\left(\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\right)\sin^2\left(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\right)}{\left(\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\right)^2\left(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\right)^2\sqrt{\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}}}\cdot\frac{2\pi}{a}\,\varepsilon\right| \times$$

$$\times\left|\cos\Big(\frac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\Big)-\frac{\sin\Big(\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\Big)}{\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon}\right|+$$

$$+\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi\xi_m}{a}\varepsilon\Big)^2}\cdot\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)^2}\cdot\frac{\xi_m}{a^2(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}\leqslant\frac{2\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)^2}\cdot\frac{2}{\xi_m\sqrt{\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}}}+$$

$$+\frac{\xi_m}{a^2\Big(\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\Big)^{3/2}}\leqslant\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)^2}\cdot\frac{2\sqrt{2ab}}{\xi_m\sqrt{\xi_m n}}+\frac{\xi_m}{a^2\Big(\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\Big)^{3/2}},$$

соответственно, $|H_1|\leqslant T_1+T_2$, где

$$T_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1}\int\limits_m^{m+1}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)^2}\cdot\frac{2\sqrt{2ab}}{\xi_m\sqrt{\xi_m n}}(x-m)dxdy=$$

$$=\sqrt{2ab}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_m\sqrt{\xi_m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{b}\mu\Big)^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2ab}\cdot\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y}}\max_{z\in[y,y+1]}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi z}{b}\mu\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi z}{b}\mu\Big)^2}dy=\Big[y=\frac{\eta}{\mu}\Big]=$$

$$=\sqrt{\frac{2ab}{\mu}}\cdot\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\cdot\max_{z\in[\eta,\eta+\mu]}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi z}{b}\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi z}{b}\Big)^2}\,d\eta=$$

$$=\sqrt{\frac{2ab}{\mu}}\cdot\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\left(\int\limits_{\mu}^{b/(4\pi)}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)}{\sqrt{\eta}\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)^2}\,d\eta+\int\limits_{b/(4\pi)}^{\infty}\frac{\max\limits_{z\in[\eta,\eta+\mu]}\sin^2\Big(\dfrac{2\pi z}{b}\Big)}{\sqrt{\eta}\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)^2}\,d\eta\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2ab}{\mu}}\cdot\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\left(\int\limits_{0}^{b/(4\pi)}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)}{\sqrt{\eta}\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)^2}\,d\eta+\int\limits_{b/(4\pi)}^{\infty}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}\Big(\dfrac{2\pi\eta}{b}\Big)^2}\right)=O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big),$$

$$T_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_n^{n+1}\int\limits_m^{m+1}\frac{\xi_m}{a^2\Big(\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\Big)^{3/2}}\,dxdy=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_m}{a^2\Big(\dfrac{\xi_m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\Big)^{3/2}}=O(1).$$

Таким образом, $H_1=O(1/\sqrt{\mu})$. Аналогично можно доказать, что $H_2=O(1/\sqrt{\mu})$. Отсюда из формулы (7) и соотношения $\mu=k\varepsilon$ следует оценка

$$H=O\Big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big),\quad\varepsilon\to 0.\tag{8}$$

Подставляя равенства (6) и (8) в (5), получаем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} F(m,n,\varepsilon) =$$

$$= \frac{\pi ab}{6k^2\varepsilon}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\right)+\frac{3k^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Отсюда и из (4) следует утверждение теоремы. □

Заключение

Из теоремы 1 и выражения для полного электрического сопротивления (3) следует, что контактное сопротивление прямоугольного контакта размером $2\varepsilon\times 2k\varepsilon$ составляет

$$R_{cont.} = \frac{\pi ab}{12k^2\varepsilon}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\right)+\frac{3k^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\right)\right). \quad (9)$$

В силу определения Р. Хольма контактное сопротивление обратно пропорционально линейному размеру контакта, и поэтому других членов асимптотики в его составе не может быть. Важно отметить, что в частном случае $\varepsilon = \mu$ выражение (9) переходит в ранее выведенную формулу для контактного сопротивления квадратного контакта [7].

В качестве второго следствия теоремы 1 получаем равенство

$$\frac{1}{4\varepsilon\mu}\iiint\limits_{z>0}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\sigma dxdydz =$$

$$= \frac{\pi ab}{12k^2\varepsilon}\left(1+k^3-(1+k^2)^{3/2}+\frac{3k}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+k}{\sqrt{1+k^2}-k}\right)+\frac{3k^2}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{\sqrt{1+k^2}-1}\right)\right),$$

где функция $u(x,y,z)$ определена выражением (1).

Список литературы

1. **Ершов А. А.** Асимптотика решения задачи Неймана с дельтообразной граничной функцией // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 479–485.
2. **Ершов А. А.** Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 7. С. 1064–1080.
3. **Ершов А. А.** К задаче об измерении электропроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 6. С. 1004–1007.
4. **Хольм Р.** Электрические контакты. М. : Иностр. лит., 1961.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М. : Физматлит, 2005.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М. : Наука, 1974.
7. **Ершов А. А.** Контактное сопротивление квадратного контакта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 105–113.

Поступила в редакцию 07.01.2021.
После переработки 17.02.2021.

Сведения об авторе

Крутова Юлия Александровна, аспирант математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: Lulia_74rus@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 2. P. 162–171.

DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16203

CONTACT RESISTANCE OF RECTANGULAR CONTACT

Y.A. Krutova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
Lulia_74rus@mail.ru

The conductive body is considered in the form of a parallelepiped, at the ends of which small contacts of the same rectangular shape are connected. The length and the width of these contacts is equal to the values ε and μ, considered below as small parameters. The case of a uniform current density at the contacts is considered. A physical situation close to it occurs, for example, in the presence of a thin, poorly conductive film on the contact surface. The potential of the electric current of the sample is modeled with the help of a solution for the Neumann problem to the Laplace equation in a parallelepiped. The electrical resistance is calculated as the sum of a double series, singularly depending on two small parameters ε and μ. We consider the case when $\mu = k\varepsilon$, where k is some constant. The principal term of the asymptotic expansion of the sum of the given series for $\varepsilon \to 0$ corresponds to the contact resistance of a rectangular contact with the sides 2ε and 2μ. The purpose of this paper is to obtain an explicit expression for this contact resistance.

Keywords: *contact resistance, electric potential, boundary value problem, Laplace equation, small parameter, asymptotic expansion.*

References

1. **Ershov A.A.** Asymptotics of the solution to the Neumann problem with a delta-function-like boundary function. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 3, pp. 457–463.
2. **Ershov A.A.** Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 7, pp. 994–1010.
3. **Ershov A.A.** On measurement of electrical conductivity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 6, pp. 823–826.
4. **Holm R.** *Electrical contacts.* Moscow, Foreign Literature, 1961.
5. **Landau L.D., Lifshitz E.M.** *Course of Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media.* Oxford, Butterworth — Heinemann, 1984.
6. **Bateman H., Erdelyi A.** *Higher transcendental functions.* Vol. 2. New York, McGraw-Hill Book Company Inc., 1953.
7. **Ershov A.A.** Contact resistance of a square contact. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 303, suppl. 1, pp. 70–78.

Accepted article received 07.01.2021
Corrections received 17.02.2021