Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 2. С. 152–161.

УДК 512.542 DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16202

СПУТНИКИ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ $\Omega\zeta$-РАССЛОЕННЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

О. В. Камозина

Брянский государственный инженерно-технологический университет, Брянск, Россия
ovkamozina@yandex.ru

Все группы предполагаются конечными. $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ называется класс Фиттинга $\Omega\zeta R(f,\varphi) = \Big(G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G)\Big)$. Направления $\Omega\zeta$-свободного и $\Omega\zeta$-канонического классов Фиттинга обозначаются через φ_0 и φ_1 соответственно. В работе описан минимальный $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$. Показано, что фиттингово произведение двух $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга является $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга для $\Omega\zeta$-направлений φ, таких, что $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Для $\Omega\zeta$-свободных и $\Omega\zeta$-канонических классов Фиттинга получены результаты в качестве следствий из теорем. Описаны максимальный внутренний $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-свободного класса Фиттинга и максимальный внутренний $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник $\Omega\zeta$-канонического класса Фиттинга. Полученные результаты могут быть использованы для исследования решёток, дальнейшего изучения произведений и критических $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга.

Ключевые слова: *конечная группа, класс Фиттинга, $\Omega\zeta$-расслоенный, $\Omega\zeta$-свободный, $\Omega\zeta$-канонический, минимальный $\Omega\zeta$-спутник, максимальный внутренний $\Omega\zeta$-спутник, фиттингово произведение.*

Введение

В исследованиях формаций и классов Фиттинга большое значение имеет информация об их минимальных, максимальных спутниках, а также спутниках произведений. Используя строение минимального и максимального спутника, Ю. А. Скачкова в работе [1] установила индуктивность и модулярность решётки всех n-кратно Ω-канонических формаций и решётки всех n-кратно Ω-биканонических формаций. А. Б. Еловиков в работе [2] описал класс однопорождённых несократимых произведений Ω-расслоенных формаций. В. А. Ведерников и В. Е. Егорова в работах [3; 4] изучили критические неоднопорождённые тотально канонические формации и классы Фиттинга.

В работе автора [5] с помощью идеи А. Н. Скибы из работы [6] разбиения области определения спутников были введены $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга. Цель данной работы — описать строение минимального и максимального внутреннего спутников $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга и установить, является ли фиттингово произведение двух $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга.

Все группы предполагаются конечными. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно. Группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M — простая группа, и любая собственная нормальная подгруппа N группы G содержится в M [7].

Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы групп, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G$ имеет нормальную подгруппу $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Если $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{Y}$ — класс групп, то $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y} = (G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$ называется фиттинговым произведением $\mathfrak{X}$ с $\mathfrak{Y}$. $\mathfrak{F}^*$ обозначает наименьший класс Фиттинга, содержащий непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ [8].

$\mathfrak{I}$ обозначает класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$, $K(G)$ обозначает класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех конечных групп, $\mathfrak{G}_{\Omega}$ и $\mathfrak{G}_{\Omega'}$ — классы всех Ω- и Ω'-групп соответственно, Ω-группа — группа G, где $K(G) \subseteq \Omega$ [9]; $\zeta = \{\zeta_i \mid i \in I\}$, где ζ_i — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \cup_{i\in I}\zeta_i$ и $\zeta_i \cap \zeta_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$, $\Omega\zeta = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \neq \varnothing\}$, $\Omega\zeta(G) = \{\Omega \cap \zeta_i \mid \Omega \cap \zeta_i \cap K(G) \neq \varnothing\}$, $\Omega\zeta(\mathfrak{F}) = \{\Omega\zeta(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$.

Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах их области определения. Функция $f : \Omega\zeta \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга групп$\}$, где $f(\Omega') \neq \varnothing$, называется $\Omega\zeta R$-функцией; функция $\varphi : \Omega\zeta \cup \{\Omega'\} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ называется $\Omega\zeta FR$-функцией. $\Omega\zeta FR$-функции φ_0 и φ_1 определяются следующим образом: $\varphi_0(\Omega') = \mathfrak{G}_{\Omega}$, $\varphi_0(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ для любого $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$; $\varphi_1(\Omega') = \mathfrak{G}_{\Omega}$, $\varphi_1(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ для любого $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi) = \Big(G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)\Big)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция, φ — $\Omega\zeta FR$-функция, называется $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-спутником f и $\Omega\zeta$-направлением φ. $\Omega\zeta$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi)$ называется внутренним, если $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi)$ называется $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\zeta FrR(f)$, если $\varphi = \varphi_0$; $\Omega\zeta$-каноническим классом Фиттинга и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega\zeta KR(f)$, если $\varphi = \varphi_1$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\Omega\zeta R$-функции ($\Omega\zeta FR$-функции). Полагаем, что $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\Omega') \subseteq \mu_2(\Omega')$ и $\mu_1(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mu_2(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$ [5].

1. Минимальный $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество $\Omega\zeta R$-функций. Через $\cap_{j\in J}f_j$ обозначим такую $\Omega\zeta R$-функцию f, что $f(\Omega') = \cap_{j\in J}f_j(\Omega')$ и $f(\Omega \cap \zeta_i) = \cap_{j\in J}f_j(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$.

Лемма 1. *Пусть φ — произвольная $\Omega\zeta FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \Omega\zeta R(f_j,\varphi)$, $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi)$, где $f = \cap_{j\in J}f_j$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\zeta R(f,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, то $G \in \mathfrak{F}_j$ для любого $j \in J$. Из $\mathfrak{F}_j = \Omega\zeta R(f_j,\varphi)$ получаем, что $O^{\Omega}(G) \in f_j(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f_j(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$ и для любого $j \in J$. Тогда $O^{\Omega}(G) \in \cap_{j\in J}f_j(\Omega') = f(\Omega')$ и $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \cap_{j\in J}f_j(\Omega\cap\zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $T \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \cap_{j\in J} f_j(\Omega')$ и $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T)$. Отсюда следует, что $O^{\Omega}(T) \in f_j(\Omega')$ и $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f_j(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T)$ и для любого $j \in J$. Поэтому $T \in \mathfrak{F}_j$, $j \in J$, а значит, $T \in \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и лемма доказана. □

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество всех его $\Omega\zeta$-спутников. Тогда $\Omega\zeta$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовём *минимальным $\Omega\zeta$-спутником*, если f является минимальным элементом множества $\{f_j \mid j \in J\}$, т. е. $f \le f_j$, $j \in J$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Напомним, что $\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$ [7]. Аналогично, обозначим через $\Omega\zeta R(\mathfrak{X},\varphi)$ пересечение всех $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ, содержащих $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(\mathfrak{X},\varphi)$ с $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big);$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \mathrm{fit}\Big(G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} : G \in \mathfrak{X}\Big),\ \text{если}\ \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{X});$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \varnothing,\ \text{если}\ \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Согласно примеру 2 [5] $\mathfrak{G}$ является $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$. Значит, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(\mathfrak{X},\varphi)$ существует и множество L всех его $\Omega\zeta$-спутников непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. Тогда по лемме 1 $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f_1,\varphi)$. Так как $f_1 \le f_i$ для любого $f_i \in L$, то f_1 — единственный минимальный $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в заключении теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $T \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega')$ и из $\Omega\zeta(T) \subseteq \Omega\zeta(\mathfrak{X})$ следует, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(T)$. Значит, $T \in \Omega\zeta R(f,\varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega\zeta R(f,\varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(\mathfrak{X},\varphi) \subseteq \Omega\zeta R(f,\varphi)$.

Покажем, что $\Omega\zeta R(f,\varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f_1,\varphi)$, а значит, $O^{\Omega}(G) \in f_1(\Omega')$. Так как $f_1(\Omega')$ — класс Фиттинга, то $f(\Omega') = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big) \subseteq f_1(\Omega')$.

Пусть $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{X})$. Тогда найдётся такая группа $H \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, что $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(H)$. Из $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f_1,\varphi)$ следует, что $H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f_1(\Omega\cap\zeta_i)$. Поэтому $f_1(\Omega\cap\zeta_i) \ne \varnothing$. Если $G \in \mathfrak{X}$ и $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G)$, то из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f_1,\varphi)$ получаем, что $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f_1(\Omega\cap\zeta_i)$. Пусть теперь $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{X}) \setminus \Omega\zeta(G)$. Тогда G — $(\Omega\cap\zeta_i)'$-группа. Так как по условию $\varphi_0 \le \varphi$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi_0(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \varphi(\Omega\cap\zeta_i)$, а значит, $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = 1 \in f_1(\Omega\cap\zeta_i)$. Так как $f_1(\Omega\cap\zeta_i)$ — класс Фиттинга, то $f(\Omega\cap\zeta_i) = \mathrm{fit}\Big(G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} : G \in \mathfrak{X}\Big) \subseteq f_1(\Omega\cap\zeta_i)$. Если $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\setminus\Omega\zeta(\mathfrak{X})$, то $f(\Omega\cap\zeta_i) = \varnothing \subseteq f_1(\Omega\cap\zeta_i)$. Таким образом, $f \le f_1$. Пусть $S \in \Omega\zeta R(f,\varphi)$. Тогда $O^{\Omega}(S) \in f(\Omega') \subseteq f_1(\Omega')$ и $S^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq f_1(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(S)$. Значит, $S \in \Omega\zeta R(f_1,\varphi) = \mathfrak{F}$ и $\Omega\zeta R(f,\varphi) \subseteq \Omega\zeta R(f_1,\varphi) = \mathfrak{F}$.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi)$ и $f \in L$. Так как f_1 — единственный минимальный $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то из $f \le f_1$ следует, что $f = f_1$. □

Следствие 1. *Пусть f_i — минимальный $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда соотношение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ выполняется в том и только в том случае, когда $f_1 \le f_2$.*

Доказательство. Пусть $f_1 \le f_2$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f_1,\varphi) \subseteq \Omega\zeta R(f_2,\varphi) = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $f_1 \le f_2$. Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \Omega\zeta R(\mathfrak{F}_1,\varphi)$ и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \Omega\zeta R(\mathfrak{F}_2,\varphi)$, то из теоремы 1 следует, что

$$f_1(\Omega') = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{F}_1\Big) \subseteq \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{F}_2\Big) = f_2(\Omega');$$
$$f_1(\Omega\cap\zeta_i) = \mathrm{fit}\Big(G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} : G \in \mathfrak{F}_1\Big) \subseteq \mathrm{fit}\Big(G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} : G \in \mathfrak{F}_2\Big) = f_2(\Omega\cap\zeta_i), \text{ если}$$
$$\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Omega\zeta(\mathfrak{F}_2);$$
$$f_1(\Omega\cap\zeta_i) = \varnothing \subseteq f_2(\Omega\cap\zeta_i), \text{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{F}_1).$$

Тогда по определению $f_1 \le f_2$. Следствие доказано. □

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\Omega\zeta$-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big);$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \mathrm{fit}\Big(O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big), \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{X});$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \varnothing, \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{X}).$$

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда $\Omega\zeta$-канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega\zeta KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big);$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \mathrm{fit}\Big(O^{\Omega\cap\zeta_i,(\Omega\cap\zeta_i)'}(G) : G \in \mathfrak{X}\Big), \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{X});$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \varnothing, \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{X}).$$

2. Фиттингово произведение $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга

Определение 2. $\Omega\zeta$-направление φ $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга назовём *правильным*, если $\varphi(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга с внутренними $\Omega\zeta$-спутниками m и h соответственно и с правильным $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\Omega\zeta$-расслоенным классом Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ и с внутренним $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathfrak{F};$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = \mathfrak{M} \diamond h(\Omega\cap\zeta_i), \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{H});$$
$$f(\Omega\cap\zeta_i) = m(\Omega\cap\zeta_i), \textit{ если } \Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{H}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\zeta R(f,\varphi)$, где f — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в формулировке теоремы.

1) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим противное, и пусть T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}_1}$.

Так как $T \in \mathfrak{F}$ и $O^{\Omega}(T) \triangleleft T$, то $O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$.

а) Пусть $T = T_{\mathfrak{M}}$. Тогда $T \in \mathfrak{M}$ и из того, что $\mathfrak{M} = \Omega\zeta R(m,\varphi)$, получаем, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in m(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(T)$.

Если $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{H})$, то найдётся такая группа $H \in \mathfrak{H}$, что $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(H)$. Из $\mathfrak{H} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$ следует, что $H^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in h(\Omega \cap \zeta_i)$. Поэтому $h(\Omega \cap \zeta_i) \neq \varnothing$. Тогда, учитывая, что m — внутренний $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{M}$, получем $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in m(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Если $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{H})$, то $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in m(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Таким образом, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие.

б) Пусть $T \neq T_{\mathfrak{M}}$. Тогда $T_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. Из $T \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ следует, что $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$.

Допустим, что T/M является Ω'-группой. Тогда $L = O^{\Omega'}(T) \subseteq M \in \mathfrak{F}_1$. Так как $T/L \in \mathfrak{G}_{\Omega'} \subseteq \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ и $T/L \cong T/L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/L/L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$, то $T/L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(L) = \Omega\zeta(T)$. Поскольку φ является правильным $\Omega\zeta$-направлением, то $\varphi(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} = \varphi(\Omega\cap\zeta_i)$, а следовательно, $T/L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \varphi(\Omega\cap\zeta_i)$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$. Из $L \in \mathfrak{F}_1$ получаем, что $L^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$, а значит, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие. Следовательно, T/M является Ω -группой.

Так как $T/M \cong T/T_{\mathfrak{M}}/M/T_{\mathfrak{M}}$, то $\Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \Omega\zeta(\mathfrak{H})$. Тогда для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T/M)$, учитывая, что $\varphi(\Omega \cap \zeta_i)$ — формация и $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, по лемме 1, пункт 3) [10] имеем $(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cong T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}T_{\mathfrak{M}}/T_{\mathfrak{M}} \cong T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cap T_{\mathfrak{M}} = T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/(T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)})_{\mathfrak{M}}$. Из $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$ получаем, что $(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in h(\Omega \cap \zeta_i)$, а значит, $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/(T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)})_{\mathfrak{M}} \in h(\Omega \cap \zeta_i)$. Следовательно, $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{M} \diamond h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Если $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T) \setminus \Omega\zeta(T/M)$, то T/M является $(\Omega \cap \zeta_i)'$-группой. Тогда, как и выше, можно показать, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq M^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$. Из $M \in \mathfrak{F}_1$ получаем, что $M^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(M) = \Omega\zeta(T)$.

Таким образом, $T \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

2) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное, и пусть T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$.

Из $T \in \mathfrak{F}_1$ следует, что $O^{\Omega}(T) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Допустим, что T/M является Ω'-группой. Тогда $T = O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, T/M является Ω-группой.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$. Поскольку m и h — внутренние $\Omega\zeta$-спутники классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, то $m(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ и $h(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \mathfrak{H}$, а значит, $\mathfrak{M} \diamond h(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq M$.

Так как $\varphi \leq \varphi_1$, то $\varphi(\Omega\cap\zeta_i) \subseteq \varphi_1(\Omega\cap\zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$. По лемме 1, пункт 1) [10] имеем $T^{\varphi_1(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq M$. По лемме 1, пункт 7) [10] получаем $T^{\varphi_1(\Omega\cap\zeta_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} = (T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}})^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}}$. Если $T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} \neq T$, то $T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} \subseteq M$ и $T/M \cong T/T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}}/M/T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$. Противоречие. Следовательно, $T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} = T$. Тогда $T^{\varphi_1(\Omega\cap\zeta_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}} = O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)/M/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{H})$. Тогда $O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) = T^{\varphi_1(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i) = m(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Так как $T/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\Omega}$, то по лемме 7, пункт 2) [9] $O^{\Omega}(T) = O^{\Omega}\Big(O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)\Big) \in m(\Omega')$. Пусть $\Omega \cap \zeta_j \in \Omega\zeta(T) \setminus \{\Omega \cap \zeta_i\}$. Так как $O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \subseteq T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}$, то $T/T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \cong T/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)/T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)}/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_j)'}$ и $\Omega \cap \zeta_j \in \Omega\zeta(T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)})$. Поскольку φ является правильным $\Omega\zeta$-направлением, то $\varphi(\Omega \cap \zeta_j)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_j)'} = \varphi(\Omega \cap \zeta_j)$ и по лемме 1, пункт 9) [10] получаем $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} = (T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)})^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)}$. Из $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{M} = \Omega\zeta R(m, \varphi)$ следует, что $(T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)})^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} \in m(\Omega \cap \zeta_j)$. Тогда получаем, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} \in m(\Omega \cap \zeta_j)$ и по определению $T \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{H})$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ и $T \notin \mathfrak{F}$, то $T \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, $T \neq T_{\mathfrak{M}}$ и $T_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. По лемме 1, пункт 3) [10] $M_{\mathfrak{M}} = M \cap T_{\mathfrak{M}}$, поэтому $M_{\mathfrak{M}} = T_{\mathfrak{M}}$. Из $M \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ следует, что $M/M_{\mathfrak{M}} = M/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. Тогда $\Omega\zeta(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \Omega\zeta(\mathfrak{H})$ и для всех $\Omega \cap \zeta_k \in \Omega\zeta(T/T_{\mathfrak{M}}) \subseteq \Omega\zeta(T)$ из $T \in \mathfrak{F}_1$ получаем, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_k)} \in f(\Omega \cap \zeta_k) = \mathfrak{M} \diamond h(\Omega \cap \zeta_k)$. По лемме 1, пункт 3) [10], как и выше, имеем $(T/T_{\mathfrak{M}})^{\varphi(\Omega\cap\zeta_k)} = T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_k)}/(T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_k)})_{\mathfrak{M}} \in h(\Omega\cap\zeta_k)$. В силу леммы 2, пункт 2) [5] можем считать, что $h(\Omega') = \mathfrak{H}$. Так как $O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, то по лемме 1, пункт 3) [10] $O^{\Omega}(T/T_{\mathfrak{M}}) = O^{\Omega}(T)T_{\mathfrak{M}}/T_{\mathfrak{M}} \cong O^{\Omega}(T)/O^{\Omega}(T) \cap T_{\mathfrak{M}} = O^{\Omega}(T)/\Big(O^{\Omega}(T)\Big)_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = h(\Omega')$. Следовательно, по определению $T/T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$, а значит, $T \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана. □

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\Omega\zeta$-свободные классы Фиттинга с внутренними $\Omega\zeta$-спутниками m и h соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\Omega\zeta$-свободным классом Фиттинга с внутренним $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathfrak{F};$$
$$f(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{M} \diamond h(\Omega \cap \zeta_i), \text{ если } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{H});$$
$$f(\Omega \cap \zeta_i) = m(\Omega \cap \zeta_i), \text{ если } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{H}).$$

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — $\Omega\zeta$-канонические классы Фиттинга с внутренними $\Omega\zeta$-спутниками m и h соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ является $\Omega\zeta$-каноническим классом Фиттинга с внутренним $\Omega\zeta$-спутником f, таким, что*

$$f(\Omega') = \mathfrak{F};$$
$$f(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{M} \diamond h(\Omega \cap \zeta_i), \text{ если } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(\mathfrak{H});$$
$$f(\Omega \cap \zeta_i) = m(\Omega \cap \zeta_i), \text{ если } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta \setminus \Omega\zeta(\mathfrak{H}).$$

3. Максимальный $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга

Определение 3. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — множество всех его внутренних $\Omega\zeta$-спутников. Тогда $\Omega\zeta$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовём *внутренним максимальным $\Omega\zeta$-спутником*, если f является максимальным элементом множества $\{f_j \mid j \in J\}$, т. е. $f \geq f_j$, $j \in J$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-свободный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\Omega\zeta$-спутником h, таким, что*

$$h(\Omega') = \mathfrak{F},\ h(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{F} \text{ для всех } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\zeta FrR(h)$, где h — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в заключении теоремы, и m — минимальный $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. По следствию 2 получаем, что $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $m(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$, а значит, $m \leq h$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонотитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta FrR(h)$, то $O^{\Omega}(T) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, а значит, $O^{\Omega}(T) \subseteq M$. Тогда $T/M \cong T/O^{\Omega}(T)/M/O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T)$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta FrR(h)$, то $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \in h(\Omega\cap\zeta_i) = \mathfrak{F}$, а значит, $O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \subseteq M$. Тогда $T/M \cong T/O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T)/M/O^{(\Omega\cap\zeta_i)'}(T) \in \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть f_1 — произвольный внутренний $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f_1(\Omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $f_1(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Следовательно,

$f_1 \le h$. В силу произвольности выбора внутреннего $\Omega\zeta$-спутника f_1 получаем, что h — единственный максимальный внутренний $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. $\square$

Следующее утверждение очевидно.

Следствие 6. *Пусть h_i — максимальный внутренний $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-свободного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $h_1 \le h_2$.*

Лемма 2. *Пусть f — внутренний $\Omega\zeta$-спутник $\Omega\zeta$-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с правильным $\Omega\zeta$-направлением φ, где $\varphi_1 \le \varphi$. Тогда*

1) *$f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$;*

2) *если $\varphi = \varphi_1$, то $\mathfrak{F}$ обладает $\Omega\zeta$-спутником h, таким, что*

$$h(\Omega') = \mathfrak{F};$$
$$h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \text{ для всех } \Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta.$$

Доказательство. 1) Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta$. Допустим, что $f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и T — группа наименьшего порядка из $f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как f — внутренний $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F}$ и по лемме 1, пункт 2) [10] получаем, что $T_{f(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq T_{\mathfrak{F}} = M \in \mathfrak{F}$. Из $T \in f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ следует, что существует $N \lhd T$, $N \in f(\Omega \cap \zeta_i)$, такая, что $T/N \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Тогда $N \subseteq T_{f(\Omega\cap\zeta_i)}$ и $T/T_{f(\Omega\cap\zeta_i)} \cong T/N/T_{f(\Omega\cap\zeta_i)}/N \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Следовательно, $T/M \cong T/T_{f(\Omega\cap\zeta_i)}/M/T_{f(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\Omega}$. Поэтому в силу включения $M \in \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$ и леммы 7, пункт 2) [9] имеем $O^{\Omega}(T) = O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$.

Так как $\varphi_1 \le \varphi$, то $\varphi_1(\Omega \cap \zeta_i) = \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'} \subseteq \varphi(\Omega \cap \zeta_i)$. Тогда по лемме 1, пункт 1) [10] получаем, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq T^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}}$. Из $\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$ по лемме 1, пункт 1) [10] имеем $T^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} \subseteq O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)$. Поскольку $T/T_{f(\Omega\cap\zeta_i)} \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$, то $O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \subseteq T_{f(\Omega\cap\zeta_i)}$. Поэтому $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \subseteq O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \subseteq T_{f(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega \cap \zeta_i)$.

Пусть $\Omega\cap\zeta_j \in \Omega\zeta(T)\setminus\{\Omega\cap\zeta_i\}$. Тогда $\Omega\cap\zeta_j \in \Omega\zeta\Big(O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)\Big)$. Так как $T/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_j)'}$ и φ является правильным $\Omega\zeta$-направлением, то $\varphi(\Omega \cap \zeta_j)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_j)'} = \varphi(\Omega \cap \zeta_j)$ и по лемме 1, пункт 9 [10] получаем, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} = \Big(O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)\Big)^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)}$. Из $O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq \mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f, \varphi)$ получаем, что $\Big(O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)\Big)^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} \in f(\Omega \cap \zeta_j)$. Тогда $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_j)} \in f(\Omega \cap \zeta_j)$ и по определению $T \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

2) Пусть $\mathfrak{H} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$, где h — $\Omega\zeta R$-функция, описанная в формулировке пункта 2) данной леммы. Так как $f(\Omega \cap \zeta_i) \subseteq f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} = h(\Omega \cap \zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta$ и f — внутренний $\Omega\zeta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, а значит, $f(\Omega') \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega')$, то $f \le h$. Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и T — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонотитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. В силу леммы 2, пункт 2) [5] можем считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$, то $O^{\Omega}(T) \in h(\Omega') = \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Из $T \notin \mathfrak{F}$ получаем, что $O^{\Omega}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{\Omega}(T)/M/O^{\Omega}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega}$.

Пусть $\Omega \cap \zeta_i \in \Omega\zeta(T/M) \subseteq \Omega\zeta(T)$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \Omega\zeta R(h, \varphi)$, то $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in h(\Omega \cap \zeta_i) = f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Если $\varphi = \varphi_1$, то, как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что $T^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} = T^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}} = (T^{\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}})^{\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}} = O^{\Omega\cap\zeta_i}(T)$. Тогда $O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Так как $T/O^{\Omega\cap\zeta_i}(T) \in \mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$, то, учитывая пункт 1) данной леммы, имеем $T \in \Big(f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\Big)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} = f(\Omega \cap \zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана. $\square$

Определение 4. $\Omega\zeta$-спутник f назовём *$\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутником*, если $f(\Omega\cap\zeta_i)$ — класс Локетта для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$.

Лемма 3. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутники $\Omega\zeta$-канонического класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда*

1) *$f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$, $f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ — классы Локетта для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$;*
2) *$f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$.*

Доказательство. 1) Так как $\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ — формация, то в силу утверждения 1.25 главы X [8] $\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ является классом Локетта и в силу замечания 1.11 главы IX [8] $f_1(\Omega\cap\zeta_i)\diamond\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Согласно лемме 1.26 b) главы X [8] фиттингово произведение двух классов Локетта — снова класс Локетта. Тогда $f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ является классом Локетта. Аналогично, $f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ — класс Локетта.

2) Так как $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(f_1)$ и $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(f_2)$, то по лемме 2 $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(h_1)$ и $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(h_2)$, где $h_1(\Omega')=\mathfrak{F}$, $h_1(\Omega\cap\zeta_i)=f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\subseteq\mathfrak{F}$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$ и $h_2(\Omega')=\mathfrak{F}$, $h_2(\Omega\cap\zeta_i)=f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\subseteq\mathfrak{F}$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$.

Допустим, что существует $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$, такое, что $h_1(\Omega\cap\zeta_i)\not\subseteq h_2(\Omega\cap\zeta_i)$ и H — группа из $h_1(\Omega\cap\zeta_i)\setminus h_2(\Omega\cap\zeta_i)$. Рассмотрим группу $T=H\wr Z_{\Omega\cap\zeta_i}=[K]Z_{\Omega\cap\zeta_i}$, где K — база регулярного сплетения T, $Z_{\Omega\cap\zeta_i}\in\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$.

Так как $H\notin h_2(\Omega\cap\zeta_i)$ и по пункту 1) данной леммы $h_2(\Omega\cap\zeta_i)$ — класс Локетта, то по утверждению 2.1 a) главы X [8] $T_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)}=K_1$, где K_1 — база сплетения $H_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)}\wr Z_{\Omega\cap\zeta_i}$. Тогда по лемме 18.2 d) главы A [8] $T/T_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)}=T/K_1\cong(H/H_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)})\wr Z_{\Omega\cap\zeta_i}$. Следовательно, $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta(T/T_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)})$.

Так как $H\in h_1(\Omega\cap\zeta_i)$, то $K\in h_1(\Omega\cap\zeta_i)$, а значит, $K\subseteq T_{h_1(\Omega\cap\zeta_i)}$. Поскольку $T/K\cong Z_{\Omega\cap\zeta_i}\in\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$, то $T/K/T_{h_1(\Omega\cap\zeta_i)}/K\cong T/T_{h_1(\Omega\cap\zeta_i)}\in\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$. Следовательно, $T\in h_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=\Big(f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\Big)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=h_1(\Omega\cap\zeta_i)\subseteq\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(f_2)$. Тогда $O^{\Omega\cap\zeta_i,(\Omega\cap\zeta_i)'}(T)\in f_2(\Omega\cap\zeta_i)$. Так как $T/O^{\Omega\cap\zeta_i,(\Omega\cap\zeta_i)'}(T)\in\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$, то $T\in f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}=h_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$. Следовательно, $T/T_{h_2(\Omega\cap\zeta_i)}\in\mathfrak{G}_{(\Omega\cap\zeta_i)'}$.

Получили противоречие. Тогда $h_1(\Omega\cap\zeta_i)\subseteq h_2(\Omega\cap\zeta_i)$. В силу симметрии $h_2(\Omega\cap\zeta_i)\subseteq h_1(\Omega\cap\zeta_i)$, а значит, $f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=f_2(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$. $\square$

Определение 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\Omega\zeta$-расслоенный класс Фиттинга с $\Omega\zeta$-направлением φ и $\{f_j\mid j\in J\}$ — множество всех его внутренних $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутников. Тогда $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовём внутренним *максимальным $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутником*, если f является максимальным элементом множества $\{f_j\mid j\in J\}$, т. е. $f\geq f_j$, $j\in J$.

Теорема 4. *Пусть f — внутренний $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник $\Omega\zeta$-канонического класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутником h, таким, что*

$$h(\Omega')=\mathfrak{F};$$
$$h(\Omega\cap\zeta_i)=f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=h(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\ \textit{для всех}\ \Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(f)$, то по лемме 2, пункт 2) $\mathfrak{F}=\Omega\zeta KR(h)$, где $h(\Omega')=\mathfrak{F}$, $h(\Omega\cap\zeta_i)=f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$.

Пусть f_1 — произвольный внутренний $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f_1(\Omega')\subseteq\mathfrak{F}=h(\Omega')$ и в силу леммы 3, пункт 2) $f_1(\Omega\cap\zeta_i)\subseteq f_1(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}=h(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$. Отсюда следует, что $f_1\leq h$. Учитывая лемму 2, пункт 1) и лемму 3, пункт 1), получаем, что h — максимальный внутренний $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В силу произвольности выбора внутреннего

$\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутника f_1 получаем, что h — единственный максимальный внутренний $\Omega\zeta\mathcal{L}$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Кроме того, $h(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} = \Big(f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i}\Big)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} = f(\Omega\cap\zeta_i)\mathfrak{G}_{\Omega\cap\zeta_i} = h(\Omega\cap\zeta_i)$ для всех $\Omega\cap\zeta_i\in\Omega\zeta$. Теорема доказана. □

Заключение

Описанные в теоремах 1–4 и следствиях $\Omega\zeta$-спутники могут быть использованы в дальнейшем изучении $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга с дистрибутивными, индуктивными, стоуновыми решётками, исследовании однопорождённых произведений $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга, изучении критических $\Omega\zeta$-расслоенных классов Фиттинга и т. д.

Список литературы

1. **Скачкова Ю. А.** Решётки Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 2. С. 85–94.
2. **Еловиков А. Б.** Факторизация однопорождённых частично расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 99–118.
3. **Ведерников В. А., Егорова В. Е.** Критические тотально Ω-канонические формации конечных групп // Изв. Гомель. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 3 (36). С. 8–13.
4. **Егорова В. Е.** Критические неоднопорождённые тотально канонические классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 520–527.
5. **Камозина О. В.** $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 4. С. 424–433.
6. **Skiba A. N.** On one generalization of the local formations // Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki (Problems of Physics, Mathematics and Technics). 2018. № 1 (34). С. 79–82.
7. **Скиба А. Н., Шеметков Л. А.** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
8. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. — Berlin; New York : Walter de Gruyter, 1992.
9. **Ведерников В. А., Сорокина М. М.** Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
10. **Ведерников В. А.** О новых типах ω-веерных классов Фиттинга конечных групп // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 897–906.

Поступила в редакцию 04.12.2020
После переработки 06.02.2021

Сведения об авторе

Камозина Олеся Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математика», Брянский государственный инженерно-технологический университет, Брянск, Россия; e-mail: ovkamozina@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 2. P. 152–161.

DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16202

SATELLITES AND PRODUCTS OF $\Omega\zeta$-FOLIATED FITTING CLASSES

O.V. Kamozina

Bryansk State University of Engineering and Technology, Bryansk, Russia
ovkamozina@yandex.ru

All groups are assumed to be finite. Fitting class $\mathfrak{F} = \Omega\zeta R(f,\varphi) = (G : O^{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ and $G^{\varphi(\Omega\cap\zeta_i)} \in f(\Omega\cap\zeta_i)$ for all $\Omega\cap\zeta_i \in \Omega\zeta(G))$ is called the $\Omega\zeta$-foliated Fitting class with $\Omega\zeta$-satellite f and $\Omega\zeta$-direction φ. The directions of the $\Omega\zeta$-free and $\Omega\zeta$-canonical Fitting classes are denoted by φ_0 and φ_1, respectively. The paper describes the minimal $\Omega\zeta$-satellite of the $\Omega\zeta$-foliated Fitting class with $\Omega\zeta$-direction φ, where $\varphi_0 \leq \varphi$. It is shown that the Fitting product of two $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes is $\Omega\zeta$-foliated Fitting class for $\Omega\zeta$-directions φ such that $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. For $\Omega\zeta$-free and $\Omega\zeta$-canonical Fitting classes, results are obtained as corollaries of theorems. A maximal inner $\Omega\zeta$-satellite of an $\Omega\zeta$-free Fitting class and a maximal inner $\Omega\zeta\mathcal{L}$-satellite of the $\Omega\zeta$-canonical Fitting class are described. The results obtained can be used to study lattices, further study products and critical $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes.

Keywords: *finite group, Fitting class, $\Omega\zeta$-foliated, $\Omega\zeta$-free, $\Omega\zeta$-canonical, minimal $\Omega\zeta$-satellite, maximal internal $\Omega\zeta$-satellite, Fitting product.*

References

1. **Skachkova Yu.A.** Lattices of Ω-foliated formations. *Discrete Mathematics and Applications*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 269–278.
2. **Elovikov A.B.** The factorisation of one-generated partially foliated formations. *Discrete Mathematics and Applications*, 2009, vol. 19, no. 4, pp. 411–430.
3. **Vedernikov V.A., Egorova V.E.** Critical totally Ω-canonical formations of finite groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny* [News of F. Skorina Gomel State University], 2006, no. 3 (36), pp. 8–13.
4. **Egorova V.E.** Critical non-singly-generated totally canonical Fitting classes of finite groups. *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, no. 4, pp. 478–484.
5. **Kamozina O.V.** $\Omega\zeta$-foliated Fitting classes. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya Seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics], 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 424–433.
6. **Skiba A.N.** On one generalization of the local formations. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki (Problems of Physics, Mathematics and Technics)*, 2018, no. 1 (34), pp. 79–82.
7. **Skiba A.N., Shemetkov L.A.** Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 112–141.
8. **Doerk K., Hawkes T.** *Finite Soluble Groups.* Berlin; New York, Walter de Gruyter, 1992. 892 p.
9. **Vedernikov V.A., Sorokina M.M.** Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2001, vol. 11, no. 5, pp. 507–527.
10. **Vedernikov V.A.** On new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1086–1097.

Article received 04.12.2020.
Corrections received 06.02.2021.