МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 2. С. 137–151.

УДК 517.928 DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16201

МОДЕЛЬ ДЕЛОВОГО ЦИКЛА ГУДВИНА И СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭКОНОМИК

О. В. Баева[1,a], **Д. А. Куликов**[2,b]

[1] *Академия ФСИН России, Рязань, Россия*
[2] *Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия*
[a] *Olga8682@mail.ru,* [b] *kulikov_d_a@mail.ru*

Рассматриваются три известные версии математической модели бизнес-цикла, предложенной Р. Гудвином. Для их анализа были использованы такие методы теории динамических систем, как метод интегральных многообразий и нормальных форм А. Пуанкаре. Показано, что только одна из версий этой модели может иметь устойчивый цикл из окрестности состояния экономического равновесия. В двух иных моделях циклы существуют, но они неустойчивы. Для всех трёх рассмотренных вариантов модели Р. Гудвина получены асимптотические формулы для периодических решений.

Также рассмотрен вопрос о конкурентном взаимодействии двух экономик. Показано, что задача может быть проинтерпретирована как задача о синхронизации колебаний двух автоколебательных систем при наличии слабой связи. Рассмотрены два типа такой связи. Анализ такой задачи был сведён к изучению нормальной формы А. Пуанкаре. В результате для одной из поставленных задач были выявлены колебания двух типов: синхронные и противофазные колебания. Изучен вопрос об их устойчивости. Для таких периодических решений получены асимптотические формулы.

При построении нормальных форм во всех случаях использован соответствующим образом модифицированный алгоритм Крылова — Боголюбова.

Ключевые слова: *модель Гудвина, синхронные и противофазные режимы, устойчивость, бифуркация, нормальная форма, асимптотическая формула.*

Введение

Классическая экономическая теория исходит из двух основных положений. Во-первых, утверждается, что вряд ли возможна ситуация, в которой уровень совокупных расходов будет недостаточен для закупки продукции, произведённой при полной занятости ресурсов. Во-вторых, если ситуация изменится, то незамедлительно изменится заработная плата, цены и рыночная ставка процента и вслед за спадом совокупного спроса произойдёт быстрый и незначительный спад производства, что стабилизирует ситуацию. Важно, что денежный рынок всегда гарантирует равенство инвестиций и сбережений и, следовательно, полную занятость ресурсов. Возможна лишь «добровольная» безработица в пределах естественного уровня. Это нашло своё отражение в математических моделях, созданных на основе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00672).

классических положений. Например, модель «спрос-предложение» (см., например, гл. 5 «Экономические циклы» из монографии [1]) в своём классическом варианте всегда имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия и не может иметь циклов. Тем не менее циклы характерны для рыночной экономики, что показала экономическая практика уже начиная с XIX в.

Кейнсианская теория оспаривает существование такого механизма саморегулирования. На основе эмпирических данных, полученных в период Великой депрессии 1930-х г. [2], Дж. Кейнсу удалось доказать, что полная занятость в нерегулируемой рыночной экономике может возникнуть только «случайно». Одним из результатов этой теории стало создание математических моделей деловых циклов. Наиболее известные такие модели можно найти в главе 5 из [1] (например, математическую модель делового цикла содержит раздел 5.3). Среди них в первую очередь следует назвать «упрощённую» модель делового цикла Кейнса.

В середине прошлого века Р. Гудвин [3] предложил свою версию математической модели для описания экономических циклов. Впоследствии стали рассматривать модификации такой модели. Один из наиболее известных вариантов модели Гудвина представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка [4–7]

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0.$$

Здесь $x = x(t)$ — отклонение дохода от положения равновесия, $A(x)$ — гладкая чётная функция x, $B(x)$ — гладкая нечётная функция x. Например, в статьях [4–7] был предложен следующий вариант для этих функций:

$$A(x) = a\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},\ B(x) = -bx + x^3,\ a, b > 0.$$

Естественно, возможны варианты для выбора этих функций, но обычно к общим свойствам $A(x)$ из «экономических» соображений добавлялось условие $A(0) < 0$. Следовательно, подходящими наборами для $A(x), B(x)$ можно считать такие: $A(x) = x^2 - \alpha$, $B(x) = -bx + x^3$ или $A(x) = x^2 - \alpha$, $B(x) = bx + x^3$, $\alpha, b > 0$ и при этом они не противоречат условиям, предложенным в [4–7].

Подчеркнём, что из экономической теории Кейнса вытекает, что соответствующие математические модели должны иметь:

– состояния равновесия, устойчивость которых может меняться при изменении параметров;

– устойчивый цикл при некотором диапазоне параметров и если состояние равновесия потеряло устойчивость.

Наличие устойчивого цикла демонстрирует в определённой степени адекватность модели экономическим реалиям [1; 2]. В работе будут изучены некоторые варианты модели Гудвина, а также задача о взаимодействии двух экономик, если каждая из них описывается с помощью уравнений, характерных для такой модели. Такая задача, частично, была поставлена в главе 4 монографии [8]. Следует отметить, что в этой монографии рассматривались версии модели делового цикла, отличные от рассматриваемых в данной статье вариантов модели Гудвина.

1. Циклы модели Гудвина

В рамках данной работы рассмотрим, следуя статьям [4–7], три версии модели бизнес-цикла Гудвина. Первая версия имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + a(x^2 - \alpha^2)\dot{x} + bx + x^3 = 0, \tag{1}$$

где $a > 0$, $b = \omega^2 > 0$, $x = x(t)$, как уже отмечалось ранее, отклонение дохода от некой равновесной величины.

Второй вариант имеет вид

$$\ddot{x} + a\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\dot{x} - bx + x^3 = 0, \qquad (2)$$

где, как и в уравнении (1), $a > 0$, $b > 0$.

Наконец, третий вариант имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + a(x^2 - \beta^2)\dot{x} - bx + x^3 = 0, \qquad (3)$$

$a, b, \beta > 0$. Уравнение (2) рассматривалось в [4–7] в качестве основной версии модели Гудвина. Отметим, что уравнения (1)–(3) записаны уже после соответствующих перенормировок.

В данном разделе будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости циклов. Подчеркнём, что наличие устойчивых циклов делает содержательной ту или иную версию модели Гудвина и вряд ли её можно считать содержательной, если в окрестности состояния равновесия нет устойчивого цикла.

Начнём с анализа дифференциального уравнения (1). Это уравнение имеет нулевое состояние равновесия. Оно неустойчиво, если $\alpha \neq 0$ (без нарушения общности можно считать, что $\alpha > 0$). Устойчивость нулевого состояния равновесия дифференциального уравнения (1), как обычно, изучается с помощью линеаризованного в нуле уравнения (1), т. е.

$$\ddot{x} - a\alpha^2\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (4)$$

где использовано обозначение $b = \omega^2$ ($b > 0$ по условию). В свою очередь, для этого следует рассмотреть соответствующее дифференциальному уравнению (4) характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - a\alpha^2\lambda + \omega^2 = 0, \qquad (5)$$

корни которого лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости.

Пусть $a\alpha^2 = 2\varepsilon$ (т. е. α мало), где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. В таком случае характеристическое уравнение (5) имеет два корня

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon),$$

где $\tau(\varepsilon) = \varepsilon$, $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) = 1 > 0$, $\sigma(0) = \omega$ ($\omega > 0$). При данном выборе $a\alpha^2$, как мы убедились, характеристическое уравнение (5) имеет пару комплексно сопряжённых корней. Они близки к чисто мнимым $\pm i\omega$. Данные условия входят в первую группу условий бифуркационной теоремы Андронова — Хопфа, формулировку которой можно найти, например, на с. 26 монографии [9] (см. также главу 5 из [9], в которой содержится перевод оригинальной работы Э. Хопфа). Этой теореме посвящена часть гл. 6 (§ 3.1) из [10], а также § 3.4 из [11]. Проверка второй группы условий этой теоремы будет дана ниже.

Вопрос о структуре окрестности нулевого решения и, в частности, вопрос о существовании цикла можно и целесообразно свести к анализу вспомогательного дифференциального уравнения — нормальной формы (НФ) Пуанкаре [10; 11] (см. гл. 5 из [10] и § 3.3 из [11]).

Для построения НФ можно использовать известный алгоритм, ведущий своё начало от известного метода Крылова — Боголюбова.

Решения уравнения (1) при данных предположениях ($a\alpha^2 = 2\varepsilon$) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_1(t,z,\overline{z}) + \varepsilon v_2(t,z,\overline{z}) + \varepsilon^{3/2} v_3(t,z,\overline{z}) + O(\varepsilon^2). \tag{6}$$

Здесь $v_1(t,z,\overline{z}) = z\exp(i\omega t) + \overline{z}\exp(-i\omega t)$, где $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время.

Будем предполагать, что $v_2, v_3 \in \Psi$, где через Ψ обозначен класс функций со следующими свойствами:

1) эти функции гладко зависят от аргументов;
2) по переменной t имеют период $2\pi/\omega$;
3) обращаются в нуль при $z = 0$;
4) для них справедливы тождества

$$M_{\pm}(v_j) = \frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} v_j(t,z,\overline{z}) \exp(\pm i\omega t) dt = 0, \ j = 2, 3.$$

В результате подстановки суммы (6) в дифференциальное уравнение (1) ($a\alpha^2 = 2\varepsilon$) получим линейные дифференциальные уравнения для определения v_2, v_3

$$\ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = 0$$

(данное уравнение имеет решение $v_2 = 0$ из класса функций Ψ),

$$\begin{gathered} \ddot{v}_3 + \omega^2 v_3 = -2i\omega[z' \exp(i\omega t) - \overline{z}' \exp(-i\omega t)] + \\ +2i\omega[z\exp(i\omega t) - \overline{z}\exp(-i\omega t)] - a v_1^2 v_1' - v_1^3. \end{gathered} \tag{7}$$

При составлении неоднородного дифференциального уравнения (7) было учтено, что $\frac{dz(s)}{dt} = z'(s)\varepsilon$. Оно имеет решения с необходимыми свойствами, если выполнены условия разрешимости

$$\frac{\omega}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/\omega} F(t,z,\overline{z},z',\overline{z}') \exp(\pm i\omega t) dt = 0,$$

где через $F(t,z,\overline{z},z',\overline{z}')$ обозначена правая часть неоднородного дифференциального уравнения (7). Условия разрешимости приводят к дифференциальному уравнению для комплекснозначной функции $z(s)$.

После его преобразований получаем дифференциальное уравнение

$$z' = z - \frac{1}{2}\Big(a - \frac{3i}{\omega}\Big) z|z|^2, \tag{8}$$

которое принято называть укороченной НФ.

Лемма 1. *Дифференциальное уравнение* (8) *имеет устойчивое (орбитально асимптотически устойчивое) периодическое решение*

$$z(s) = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\Big(i\frac{3}{a\omega}s + i\psi\Big), \ \psi \in \mathbb{R}.$$

Существование такого решения проверяется подстановкой в дифференциальное уравнение (8), а проверка его устойчивости базируется на использовании теоремы Андронова — Витта (см., например, § 20 из [12]) об устойчивости периодических решений. Подчеркнём, что в силу произвольности выбора ψ равенство (8) задаёт семейство таких решений, которое порождает цикл.

Из этих построений вытекает утверждение.

Теорема 1. *При любом положительном a существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a) > 0$, такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $a\alpha^2 = 2\varepsilon$ дифференциальное уравнение* (1) *имеет семейство устойчивых периодических решений*

$$x(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi) + o(\varepsilon),$$

где φ — произвольная действительная постоянная, $\omega(\varepsilon) = \omega + \dfrac{3\varepsilon}{a\omega}$.

Отметим, что при выводе последней асимптотической формулы было учтено, что справедливо равенство $\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t) = 2\cos\omega t$, а также, что $v_2 = 0$.

Перейдём теперь к анализу дифференциального уравнения (2). Это уравнение имеет нулевое состояние равновесия, которое является седлом. Вместе с тем у него есть ещё два ненулевых состояния равновесия $x = \pm\sqrt{b}$. Далее достаточно ограничиться анализом только одного из них $x = \sqrt{b}$, так как уравнение (2) инвариантно относительно замены $x \to -x$.

Положим $x(t) = \sqrt{b} + u(t)$. В результате получим следующее уравнение:

$$\ddot{u} + a\frac{(u+\sqrt{b})^2 - 1}{(u+\sqrt{b})^2 + 1}\dot{u} - b(u+\sqrt{b}) + (u+\sqrt{b})^3 = 0,$$

которое имеет нулевое состояние равновесия, соответствующее состоянию равновесия $x = \sqrt{b}$. После применения формулы Тейлора последнее дифференциальное уравнение можно переписать в иной форме, более удобной для бифуркационного анализа.

Итак, получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + a\Big(\frac{b-1}{b+1}\Big)\dot{u} + 2bu = F_2(u, \dot{u}) + F_3(u, \dot{u}) + F_0(u, \dot{u}), \tag{9}$$

где

$$F_2(u, \dot{u}) = -3\sqrt{b}u^2 - 4a\frac{\sqrt{b}}{(b+1)^2}u\dot{u},\ \ F_3(u, \dot{u}) = -u^3 - 2a\frac{1-3b}{(b+1)^3}u^2\dot{u},$$

а через $F_0(u, \dot{u})$ обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде. Для $F_0(u, \dot{u})$ справедлива оценка

$$|F_0(u, \dot{u})| \le M_0(u^4 + \dot{u}^4),\ \ M_0 > 0.$$

Явный вид $F_0(u, \dot{u})$ при анализе окрестности нулевого решения дифференциального уравнения (9) не будет использоваться.

Изучим сначала вопрос об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения (9). Это приводит к необходимости анализа линеаризованного уравнения (9), т. е. дифференциального уравнения

$$\ddot{u} + a\Big(\frac{b-1}{b+1}\Big)\dot{u} + 2bu = 0. \tag{10}$$

В свою очередь, анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений (10), как хорошо известно, может быть сведён к анализу расположения корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\Big(\frac{b-1}{b+1}\Big)\lambda + 2b = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет корни в левой полуплоскости комплексной плоскости, если $b > 1$ ($a, b > 0$ по условию).

Из теоремы об устойчивости по первому приближению вытекает, что при $b > 1$ нулевое решение дифференциального уравнения (9) асимптотически устойчиво и неустойчиво при $b \in (0, 1)$. Наконец, при $b = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения (9), когда спектру устойчивости принадлежит пара чисто мнимых собственных значений ($\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$).

Пусть $|b - 1| = \varepsilon$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 << 1$, т. е. ε далее интерпретируем как малый положительный параметр. Следовательно, далее можно считать, что $b = 1 + \gamma\varepsilon$, где $\gamma = \mathrm{sign}(b - 1)$ ($\gamma = \pm 1$). Выбор знака γ будет осуществлён позднее.

В таком случае характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon),$$

где $\tau(\varepsilon) = -\dfrac{a\gamma\varepsilon}{2(2 + \gamma\varepsilon)}$, ($\tau(0) = 0$, $\tau_0' = \dfrac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \neq 0$, $\sigma_0 = \sigma(0) = \sqrt{2} > 0$).

В этой ситуации (см. первую часть этого раздела) решения дифференциального уравнения (9) будем искать в виде

$$u(t, x) = \varepsilon^{1/2} w_1(t, z, \overline{z}) + \varepsilon w_2(t, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2} w_3(t, z, \overline{z}) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $w_1(t, z, \overline{z}) = z(s)\exp(i\sqrt{2}t) + \overline{z}(s)\exp(-i\sqrt{2}t)$, а свойства функций w_2, w_3 аналогичны свойствам функций v_1, v_2 из предыдущего раздела, но теперь $\omega = \sqrt{2}$. Повторяя построения НФ из предыдущего раздела, получаем, что в данном случае

$$w_2(t, z, \overline{z}) = \eta_2 z^2 \exp(2\sqrt{2}it) + \eta_0|z|^2 + \overline{\eta}_2\overline{z}^2 \exp(-2\sqrt{2}it),$$

где $\eta_0 = -3$, $\eta_2 = \frac{3 + a\sqrt{2}i}{6}$. Из условий разрешимости неоднородного уравнения для $w_3(t, z, \overline{z})$ в классе $2\pi/\sqrt{2}$ периодических по t функций находим, что

$$z' = (\delta + i\beta)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \tag{11}$$

где $\delta = -a\gamma/4$, $\beta = \gamma\sqrt{2}/2$, $l_1 = a > 0$, $l_2 = -\sqrt{2}\frac{a^2+36}{12}$, т. е. уравнение (11) внешне похоже на дифференциальное уравнение (8), но вместе с тем имеет существенное отличие от него. Подчеркнём, что в дифференциальном уравнении (11) $l_1 = a > 0$. Следовательно, НФ (11) имеет периодическое решение

$$z(s) = \sqrt{\frac{\gamma}{4}}\exp(i\Theta s),\ \Theta = \beta + l_2\frac{\gamma}{4} + \varphi,\ \ \varphi \in \mathbb{R},$$

если $\gamma > 0$. При этом это решение неустойчиво.

Анализ НФ (11), а также результаты, изложенные в [10] (см. §§ 3.2, 3.3, где в удобной для такого случая форме изложена теорема Андронова — Хопфа), позволяют сформулировать соответствующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $b = 1 + \gamma\varepsilon$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(a)$), такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\gamma = 1$ дифференциальное уравнение (2) имеет неустойчивый предельный цикл в окрестности состояния равновесия $x = \sqrt{1 + \varepsilon}$. Для этого цикла справедлива асимптотическая формула*

$$x(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi) +$$
$$+ \varepsilon\frac{1}{4}\Big[-1 + \cos(2\omega(\varepsilon)t + 2\varphi) - \frac{a\sqrt{2}}{3}\sin(2\omega(\varepsilon)t + 2\varphi)\Big] + o(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon) = \sqrt{2} + \varepsilon(\beta - \sqrt{2}(a^2+36)/48) + o(\varepsilon)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. *При* $\gamma = -1$ *предельные циклы отсутствуют.*

Отметим, что в формуле для $x(t,\varepsilon)$ учтено, что $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \dfrac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$.

Аналогичный результат может быть получен при анализе окрестности состояния равновесия $x = -\sqrt{1+\gamma\varepsilon}$, т. е. в окрестности этого состояния равновесия существует неустойчивый предельный цикл. Подчеркнём, что состояние равновесия $x = 0$ уравнения (2) будет седлом и, конечно, исследуемое уравнение не имеет циклов в окрестности этого состояния равновесия.

В заключение этого раздела отметим, что дифференциальное уравнение (3) также не имеет устойчивых предельных циклов. Анализ бифуркаций для этого уравнения в достаточной степени аналогичен исследованию подобных вопросов для дифференциального уравнения (2). Поэтому для уравнения (3) ограничимся формулировкой соответствующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $\varepsilon = \dfrac{a\sqrt{b}}{2}(1-d) \in (0,\varepsilon_0)$, $d = \dfrac{\beta^2}{b}$. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *где* ε_0 *зависит от* a, *что при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *в окрестности каждого из двух состояний равновесия* $x = \sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$ *существует неустойчивый цикл. Каждый из них формируется соответствующим семейством периодических решений*

$$E_1(\varepsilon):\ x_1(t,\varepsilon) = \sqrt{b}\Biggl[1 + \varepsilon^{1/2}\frac{2}{\sqrt{a}\sqrt[4]{b}}\cos(\varphi(t)+h) +$$
$$+\varepsilon\frac{2}{a\sqrt{b}}\left(\frac{1}{2}\cos(2\varphi(t)+2h) - \frac{a\sqrt{b}}{3}\sqrt{2}\sin(2\varphi(t)+2h)\right)\Biggr] + O(\varepsilon^{3/2}),\ h \in \mathbb{R},$$

где $\varphi(t) = (\sqrt{2b}+\varepsilon\omega+o(\varepsilon))t$, $\omega = -\dfrac{(9+a^2b)\sqrt{2}}{3a\sqrt{b}}$. *Наконец,* $E_2(\varepsilon) : x_2(t,\varepsilon) = -x_1(t,\varepsilon)$. *При этом решение* $E_1(\varepsilon)$ *— это периодическое решение в окрестности состояния равновесия* $x = \sqrt{b}$, *а* $E_2(\varepsilon)$ *— периодическое решение в окрестности состояния равновесия* $x = -\sqrt{b}$.

Отметим, что, как и при анализе уравнения (2), в данном случае реализуется жёсткий режим возбуждения колебаний. Периодические решения существуют при докритических значениях бифуркационного параметра, т. е. когда состояния равновесия $x = \pm\sqrt{b}$ ещё устойчивы (см. § 33 из [10]).

В следующем разделе будет использован первый вариант модели Гудвина, т. е. дифференциальное уравнение (1). В нём будет дан анализ задачи о взаимодействии двух экономик, динамику каждой из которых описывает модель Гудвина.

2. О взаимодействии двух экономик. Задача о синхронизации

Очевидно, что любая экономика — национальная, региональная, экономика крупной компании — не существует в изоляции. В экономическом пространстве существуют и иные. Все эти экономики, безусловно, взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие приобретает вид торговли, инвестиций, конкуренции. В данном разделе рассмотрим этот вопрос в случае, когда таких экономик две и они идентичны, и, естественно, будем считать, что в качестве модели экономической динамики выбрана первая версия модели Гудвина.

Итак, рассмотрены два варианта задачи, соответствующей «базовой» модели в виде дифференциального уравнения (1), в котором $a\alpha^2 = 2\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -ax_1^2\dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -ax_2^2\dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned} \tag{12}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -ax_1^2\dot{x}_1 - x_1^3 + 2d\varepsilon(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -ax_2^2\dot{x}_2 - x_2^3 + 2d\varepsilon(x_1 - x_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $d \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $x_1 = x_1(t)$ — отклонение от равновесного состояния дохода (национального дохода) в первой из взаимодействующих экономик, а $x_2 = x_2(t)$ — во второй. В первом варианте постановки задачи «интенсивность» взаимодействия пропорциональна скорости изменения дохода в каждой из двух экономик. Во втором случае, когда рассматривается система (13), возникает, быть может, более понятный вариант, когда взаимодействие пропорционально величине разности доходов.

В данном разделе изучим сначала динамику решений системы дифференциальных уравнений (12). Как в первом разделе, для этого можно и целесообразно использовать метод НФ в сочетании с модифицированным алгоритмом Крылова — Боголюбова. Решения системы (12) будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon^{1/2} v_{11} + \varepsilon v_{12} + \varepsilon^{3/2} v_{13} + O(\varepsilon^2), \\ x_2 &= \varepsilon^{1/2} v_{21} + \varepsilon v_{22} + \varepsilon^{3/2} v_{23} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{11}(t, z_1, \overline{z}_1) = z_1(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_1(s)\exp(-i\omega t), \\ v_{21} &= v_{21}(t, z_2, \overline{z}_2) = z_2(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_2(s)\exp(-i\omega t), \end{aligned}$$

а $z_j = z_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 1, 2$. Наконец, при $k = 1, 2$ функции $v_{kj}(t, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) \in \Psi$, где Ψ — класс функций, определённый в п. 1. В результате алгоритм построения НФ достаточно близок к алгоритму, использованному в первом разделе работы. Он позволяет получить систему дифференциальных уравнений первого порядка для комплекснозначных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$. В данном случае приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 + d(z_2 - z_1), \\ z_2' &= z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 + d(z_1 - z_2), \end{aligned} \tag{14}$$

где $l_1 = -a/2$, $l_2 = 3/2\omega$. Для анализа системы (14) её целесообразно переписать в тригонометрической форме. Положим

$$z_j = \rho_j \exp(i\varphi_j),\ \ \rho_j = \rho_j(s),\ \ \varphi_j = \varphi_j(s),\ \ j = 1, 2.$$

В результате получим сначала систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 + l_1\rho_1^3 + d(\rho_2\cos\psi - \rho_1), \\ \rho_2' &= \rho_2 + l_1\rho_2^3 + d(\rho_1\cos\psi - \rho_2), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= l_2\rho_1^2 + d\frac{\rho_2}{\rho_1}\sin\psi, \\ \varphi_2' &= l_2\rho_2^2 - d\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin\psi, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\psi(s) = \varphi_2(s) - \varphi_1(s)$. Вычитая первое уравнение системы (16) из второго, получаем уравнение для $\psi = \psi(s)$:

$$\psi' = l_2(\rho_2^2 - \rho_1^2) - d\sin\psi\Big(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big). \tag{17}$$

Следовательно, система (15) и уравнение (17) формируют замкнутую подсистему для функций $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, $\psi(s)$. У системы дифференциальных уравнений (15), (17) могут существовать состояния равновесия, координаты которых следует находить как решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1 + l_1\rho_1^3 + d(\rho_2\cos\psi - \rho_1) = 0,\\ \rho_2 + l_1\rho_2^3 + d(\rho_1\cos\psi - \rho_2) = 0,\\ l_2(\rho_2^2 - \rho_1^2) - d\sin\psi(\tfrac{\rho_1}{\rho_2} + \tfrac{\rho_2}{\rho_1}) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Эти состояния равновесия могут быть двух типов. К первому типу отнесём те из них, для которых выполнено условие $\rho_1 = \rho_2 = \rho > 0$. Ко второму отнесём те, для которых выполнено условие $\rho_1 \neq \rho_2$.

Найдём координаты состояний равновесия первого типа, т. е. такие решения системы дифференциальных уравнений (18), для которых $\rho_1 = \rho_2 = \rho\,(\rho_2^2 - \rho_1^2 = 0)$. Следовательно, с необходимостью $\sin\psi = 0$ и, следовательно, $\psi = 0$ или $\psi = \pi$.

Последнее замечание позволяет найти два состояния равновесия первого типа:

$$\begin{aligned} S_1:\ \rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{-\tfrac{1}{l_1}} = \sqrt{\tfrac{2}{a}},\ \psi = 0,\\ S_2:\ \rho_1 = \rho_2 = \rho = \sqrt{\tfrac{2(1-2d)}{a}},\ \psi = \pi. \end{aligned}$$

Состояние равновесия S_2 существует, если $1 - 2d > 0$, $(d < 1/2)$.

Лемма 2. *Состояние равновесия S_1 существует при всех значениях параметров (коэффициентов). Оно асимптотически устойчиво, если $d > 0$, и неустойчиво, если $d < 0$. Состояние равновесия S_2 существует, если $d < 1/2$, и оно асимптотически устойчиво при $d < 0$ и, соответственно, неустойчиво при $d > 0$.*

Условия существования состояния равновесия S_2 вытекают из явных формул для его координат. Условия устойчивости обоих состояний равновесия можно вывести стандартным образом, используя теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению. Напомним, что для анализа устойчивости следует найти собственные значения матрицы Якоби исследуемой системы, в которой координаты равны координатам соответствующего состояния равновесия.

Так, если выбрать состояние равновесия S_1, то стандартные вычисления показали, что соответствующая матрица Якоби имеет следующие собственные числа:

$$\lambda_1 = -2d,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -2 - 2d,$$

т. е. $\lambda_j < 0$, $j = 1, 2, 3$, если $d > 0$.

В случае S_2 получаем собственные значения

$$\lambda_1 = 2d,\ \lambda_2 = 6d - 2,\ \lambda_3 = 4d - 2.$$

При $d < 0$ они лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Итак, справедливо утверждение. Его доказательство вытекает из анализа НФ, теоремы 3 из работы [13].

Теорема 4. *Существует зависящая от a и d такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_1 системы дифференциальных уравнений* (15), (17) *соответствует синхронный цикл системы дифференциальных уравнений* (12)

$$C_s : x_2(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon),\ x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi_0) + o(\varepsilon),$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $\omega(\varepsilon) = \omega + \dfrac{3}{a\omega}\varepsilon + o(\varepsilon)$. Он устойчив, если $d > 0$.

Состоянию равновесия S_2 соответствует противофазный цикл системы (12)

$$C_p : x_2(t, \varepsilon) = -x_1(t, \varepsilon),\ x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{2(1-2d)}{a}}\cos(\omega(\varepsilon)t + \varphi_0) + o(\varepsilon).$$

Он существует, если $d < 1/2$ и устойчив при $d < 0$. В данном случае

$$\omega(\varepsilon) = \omega + \frac{3(1-2d)\varepsilon}{a\omega} + o(\varepsilon).$$

Поправку к основной частоте ω для каждого из найденных периодических решений получаем после интегрирования дифференциального уравнения (16).

Отметим, что система дифференциальных уравнений (18) может иметь решения, отличные от уже найденных. Таким решениям системы (18) соответствуют состояния равновесия второго типа. В свою очередь, им уже соответствуют (если такие состояния равновесия существуют) периодические решения системы дифференциальных уравнений (12) с разными амплитудами: «асимметричные циклы». Их наличие описывает такое явление, как «обобщённая» синхронизация. В данной работе ограничимся изучением вопроса о синхронизации в традиционном её понимании, которая может быть охарактеризована наличием циклов из теоремы 3 (синхронного и противофазного).

Вопрос об обобщённой синхронизации заслуживает отдельного изучения. В работах [14; 15] рассмотрены аналогичные вопросы, но в несколько иной ситуации (для другой системы дифференциальных уравнений).

Замечание 1. Случай $d = 0$ здесь не рассматривается в силу его несодержательности, так как в этом случае получаются две независимые автоколебательные системы, у каждой из которых есть цикл.

Перейдём теперь к анализу системы (13). Практически дословно повторяя построения при анализе системы (12), получим сначала вспомогательную систему

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - ig(z_2 - z_1), \\ z_2' &= z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - ig(z_1 - z_2), \end{aligned}$$

где $g = d/\omega$, $s = \varepsilon t$. После замены $z_j(s) = \rho_j \exp(i\varphi_j(s))$, $j = 1, 2$, и выделения подсистемы для «медленных» переменных $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$, $\psi(s) = \varphi_2(s) - \varphi_1(s)$ получим в данном случае систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 + l_1\rho_1^3 + g\rho_2 \sin\psi, \\ \rho_2' &= \rho_2 + l_1\rho_2^3 - g\rho_1 \sin\psi, \\ \psi' &= (\rho_2^2 - \rho_1^2)\Big(l_2 + \frac{g\cos\psi}{\rho_1\rho_2}\Big). \end{aligned} \tag{19}$$

Система дифференциальных уравнений (19) имеет следующие состояния равновесия первого типа:

$$S_3: \ \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}, \ \psi = 0, \ S_4: \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}, \ \psi = \pi.$$

При этом состояния равновесия S_3 и S_4 существуют при всех значениях параметров задачи, так как $a > 0$ по условию задачи.

Аналогичные вычисления, как при анализе системы (15), (17), показывают, что состояние равновесия S_3 асимптотически устойчиво, если

$$g \in (-\infty, -3/a\omega) \cup (0, \infty).$$

Условие асимптотической устойчивости S_4 имеет следующий вид:

$$g \in (-\infty, 0) \cup (3/a\omega, \infty).$$

Сформулируем утверждение, аналогичное теореме 4.

Теорема 5. *Существует зависящая от a и g такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_3 системы дифференциальных уравнений* (19) *соответствует синхронный цикл системы дифференциальных уравнений* (13)

$$C_s: x_2(t, \varepsilon) = x_1(t, \varepsilon), \ x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\omega_s(\varepsilon)t + \varphi_1) + o(\varepsilon),$$

где $\varphi_1 \in \mathbb{R}, \omega_s(\varepsilon) = \omega + \frac{3}{a\omega}\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Состоянию равновесия S_4 соответствует противофазный цикл системы (12)

$$C_p: x_2(t, \varepsilon) = -x_1(t, \varepsilon), \ x_2(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\omega_p(\varepsilon)t + \varphi_2) + o(\varepsilon),$$

где $\varphi_2 \in \mathbb{R}$, а $\omega_p(\varepsilon) = \omega + (\frac{3}{a\omega} + 2g)\varepsilon + o(\varepsilon)$.

Цикл C_s устойчив, если $g \in (-\infty, -3/a\omega) \cup (0, \infty)$, а, в свою очередь, C_p устойчив, если $g \in (-\infty, 0) \cup (3/a\omega, \infty)$.

Заключение

В работе были рассмотрены три варианта «детерминистских» моделей Гудвина, и только в одной из них были выявлены устойчивые циклы, объект крайне желательный при описании макроэкономической динамики. В нашем случае рассматривались некоторые модификации модели Гудвина, которые в определённой степени получены на «феноменологическом» уровне. Использование методов теории динамических систем, бифуркационный анализ показывают, что не все «детерминистские» варианты позволяют описать цикличность экономики, что является лейтмотивом идей, предложенных в работах Р. Гудвина [3]. Быть может, поэтому авторы работ [4–7] пошли на определённое усложнение некоторых вариантов, включая в уравнение модели члены, которые являются случайной функцией. Вместе с тем в данной работе рассмотрен вариант модели, где цикличность имеет место и который удовлетворяет всем требованиям из статей [3; 4].

Изучен вопрос о взаимодействии двух экономик, описанных подходящим вариантом модели Гудвина. При этом в соответствующей модели (см. второй раздел) наблюдается достаточно сложная динамика. Например, мультистабильность, когда есть два устойчивых цикла: синхронный и противофазный. Действительно, во второй задаче о синхронизации циклы C_s и C_p могут быть устойчивы при одном диапазоне параметров. При синхронном режиме колебания в двух взаимодействующих экономиках происходят с одной фазой. Противофазный цикл показывает, что возможен вариант, когда колебания отличаются на фазу π. Напомним, что противофазные циклы (колебания) были открыты ещё Гюйгенсом [16], когда он изучал колебания двух связанных маятников. В этих экспериментах было показано, а потом и теоретически объяснено, что противофазные колебания естественны во многих вариантах анализа связанных автоколебательных систем. Такой феномен проявил себя и в задачах макроэкономики.

Список литературы

1. **Zhang W. B.** Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Berlin : Springer-Verlag, 1991.
2. **Keynes J. M.** General Theory of Employment, Interest, and Money. New York : Harcourt Brace, 1936.
3. **Gudwin R. M.** The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles // Econometrica. 1951. Vol. 19, no. 1. P. 1–17.
4. **Lorenz H. W.** Goodwin's nonlinear acceselerator and chaotic motion // Journal of Economics. 1987. Vol. 47, no. 4. P. 413–418.
5. **Lorenz H. W., Nusse H. E.** Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered // Chaos, Solitons & Fractals. 2002. Vol. 13. P. 957–965.
6. **Bashkirtseva I., Ryazanova T., Ryashko L.** Confidence domains in the analysis of noise-unduced transition to chaos for Goodwin model of business cycles // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 8. P. 1–10.
7. **Ryazanova T., Jungeilges J.** Noise-induced transitions in a stochastic Goodwin-type business cycle model // Structural Change and Economic Dynamics. 2017. Vol. 40. P. 103–115.
8. **Puu T.** Nonlinear Economic Dynamics. New York : Springer-Verlag, 1993.
9. **Marsden J.E., McCracken M.** The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York : Springer-Verlag, 1976.
10. **Арнольд В. И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.
11. **Guckenheimer J., Holmes P. J.** Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Berlin : Springer-Verlag, 1983.
12. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967.
13. **Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.** Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 775–790.
14. **Куликов Д. А.** Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Изв. вузов. Приклад. нелин. динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 120–132.
15. **Kulikov D. A.** Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. Vol. 74, no. 4. P. 389–400.
16. **Huygens C.** The Pendulum Clock (English translation, orig. publ. in 1673). Iowa : Iowa State University Press, 1986.

Поступила в редакцию 13.10.2020.
После переработки 22.03.2021.

Сведения об авторах

Баева Ольга Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информационных технологий управления, Академия ФСИН России, Рязань, Россия; e-mail: Olga8682@mail.ru.

Куликов Дмитрий Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия; e-mail: kulikov_d_a@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 2. P. 137–151.

DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16201

GOODWIN'S BUSINESS CYCLE MODEL AND SYNCHRONIZATION OF OSCILLATIONS OF TWO INTERACTING ECONOMIES

O.V. Baeva[1,a], **D.A. Kulikov**[2,b]

[1] *FSIN Academy of Russia, Ryazan, Russia*

[2] *Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

[a] *Olga8682@mail.ru*, [b] *kulikov_ d_ a@mail.ru*

Three well-known versions of the mathematical model of the business cycle proposed by R. Goodwin are considered. To analyze them, such methods of the theory of dynamical systems as the method of integral manifolds and normal forms of A. Poincare were used. It is shown that only one of the versions of this model can have a stable cycle in the neighborhood of the state of economic equilibrium. In the other two models, cycles exist, but they are unstable. For all three considered variants of R. Goodwin's model, asymptotic formulas are obtained.

The question of the competitive interaction of the two economies is also considered. It is shown that the problem can be interpreted as the problem of synchronization of oscillations for two self-oscillating systems in the presence of weak coupling. Two types of such a coupling are considered. The analysis of such a problem was reduced to the analysis of the Poincare normal form. As a result, for one of the studied problems, oscillations of two types were identified: synchronous and antiphase oscillations. The issue of their stability has been investigated. For such periodic solutions, asymptotic formulas are obtained.

When constructing normal forms, the correspondingly modified Krylov — Bogolyubov algorithm was used in all cases.

Keywords: *Goodwin's model, synchronous and antiphase regimes, stability, bifurcation, normal form, asymptotic formula.*

References

1. **Zhang W.B.** *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*. Berlin, Springer-Verlag, 1991.
2. **Keynes J.M.** *General Theory of Employment, Interest, and Money.* New-York, Harcourt Brace, 1936.
3. **Gudwin R.M.** The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica*, 1951, vol. 19, no. 1, pp. 1–17.
4. **Lorenz H.W.** Goodwin's nonlinear accelerator and chaotic motion. *Journal of Economics*, 1987, vol. 47, no. 4, pp. 413–418.
5. **Lorenz H.W., Nusse H.E.** Chaotic attractors, chaotic saddles, and fractal basin boundaries: Goodwin's nonlinear accelerator model reconsidered. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, vol. 13, pp. 957–965.
6. **Bashkirtseva I., Ryazanova T., Ryashko L.** Confidence domains in the analysis of noise-unduced transition to chaos for Goodwin model of business cycles. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 8, pp. 1–10.
7. **Ryazanova T., Jungeilges J.** Noise-induced transitions in a stochastic Goodwin-type business cycle model. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2017, vol. 40, pp. 103–115.
8. **Puu T.** *Nonlinear Economic Dynamics.* New York, Springer-Verlag, 1993.
9. **Marsden J.E., McCracken M.** *The Hopf Bifurcation and Its Applications.* New York, Springer-Verlag, 1976.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant no. 18-01-00672.

10. **Arnold V.I.** *Dopolnitel'nye glavy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. (In Russ.).
11. **Guckenheimer J., Holmes P.J.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Berlin, Springer-Verlag, 1983.
12. **Demidovich B.P.** *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967. (In Russ.).
13. **Kolesov A.Yu., Kulikov A.N., Rozov N.Kh.** Invariant tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations. *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no 6, pp. 775–790.
14. **Kulikov D.A.** Avtomodel'nye periodicheskiye resheniya i bifurkatsii ot nikh v zadache o vzaimodeystvii dvukh slabosvyazannykh ostsillyatorov [Self-similar periodic solutions and bifurcations from them in the problem of interaction of two weakly coupled oscillators]. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [News of universities. Applied nonlinear dynamics], 2006, vol. 14, no. 5, pp. 120–132. (In Russ.).
15. **Kulikov D.A.** Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 389–400.
16. **Huygens C.** *The Pendulum Clock* (English translation, orig. publ. in 1673). Iowa, Iowa State University Press, 1986.

Accepted article received 13.10.2020.
Corrections received 22.03.2021.