Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 3. С. 37–62.

УДК 517.95

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ МОДЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

И. В. Тихонов[1,a], **Ю. В. Гаврись**[2,b], **Т. З. Аджиева**[1,c]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия*
[a] *ivtikh@mail.ru;* [b] *yvgavris@mail.ru;* [c] *adzhievatz@gmail.com*

Рассматривается модельная обратная задача об определении правой части в одномерном уравнении теплопроводности. Исследование проводится в классах функций экспоненциального роста. Для однородной обратной задачи установлено точное условие единственности решения и показано, что при его нарушении всякое нетривиальное решение экспоненциального роста представимо в виде линейной комбинации элементарных решений. Приведены примеры особых решений, имеющих сверхэкспоненциальный рост.

Ключевые слова: *обратная задача, уравнение теплопроводности, функции экспоненциального роста.*

Введение

Проблема описания неограниченных решений для уравнения теплопроводности в неограниченной области была вполне осознана после основополагающих результатов А. Н. Тихонова [1] (см. также [2]). В настоящей работе эта тематика развивается применительно к модельной обратной задаче с финальным переопределением. Говоря про «модельную задачу», мы имеем в виду, что неоднородное уравнение теплопроводности взято в самом простом «модельном» виде, когда коэффициенты перед неизвестными функциями заменены единицами. Подобный подход полностью соответствует классическому подходу [1], не затеняя изложение техническими деталями и позволяя лучше видеть суть происходящего.

Краткая предыстория нашего исследования такова. Некоторое время назад в работе [3] был установлен общий критерий единственности решения в модельной обратной задаче с финальным переопределением для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Там же, в [3], бегло отмечено, что полученный результат допускает интересную интерпретацию, связанную с уравнением теплопроводности. Затем удалось развить «параллельную» теорию для близкой по духу нелокальной задачи, относимой как к абстрактным дифференциальным уравнениям [4], так и к многомерному уравнению теплопроводности [5–8]. Первоначальная обратная задача (для уравнения теплопроводности) вновь коротко упоминалась в [5], но развёрнутого изложения до сих пор не было.

В настоящей работе мы устраним этот пробел и приведём результаты со всеми подробностями, сделав ещё важные добавления. Для простоты ограничимся одномерным уравнением теплопроводности, заданным в полосе

$$x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t \leqslant T.$$

Указанный случай позволяет выписать ключевые формулы в замкнутом виде.

В итоге будет строго обосновано точное условие единственности решения обратной задачи, восходящее к [3; 5], и дополнительно дано полное описание нетривиальных решений однородной обратной задачи в классах функций экспоненциального роста. В конце работы подробно обсуждаются примеры особых решений, имеющих сверхэкспоненциальный рост.

Все результаты получены без использования интегралов Пуассона. Вопрос о разрешимости неоднородной обратной задачи сейчас не рассматривается. Это планируется сделать в последующих публикациях.

Авторы отмечают вклад Ю. С. Эйдельмана и А. Ю. Попова, существенно повлиявших на развитие тематики. Мы также признательны В. Б. Шерстюкову за обсуждение вопроса об оценках особых решений сверхэкспоненциального роста. Отдельная благодарность В. Е. Фёдорову за предложение опубликовать наше исследование в «Челябинском физико-математическом журнале».

1. Постановка задачи

Для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

поставим задачу о нахождении пары функций $\big(u(x,t), f(x)\big)$ из соотношений

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,T) = u_1(x). \tag{2}$$

Число $T > 0$ и функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ считаем заданными. С физической точки зрения требуется восстановить температуру $u = u(x,t)$ и плотность стационарных источников тепла $f = f(x)$, зная значения функции $u(x,t)$ в начальный и финальный моменты времени. Среда предполагается одномерной и бесконечной, уравнение — модельным, приведённым к безразмерному виду. Поскольку неоднородное слагаемое в (1) нам неизвестно, задача (1), (2) относится к классу *обратных задач*. Общую информацию по теории обратных задач можно найти в [9; 10].

Решением обратной задачи (1), (2) назовём пару функций

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T]), \qquad f \in C(\mathbb{R}), \tag{3}$$

для которых все соотношения (1), (2) выполнены. Гладкость (3) является классической. Никаких ограничений, связанных с поведением функций на бесконечности, пока не налагается. Ясно, что для разрешимости задачи (1), (2) необходимо требовать, чтобы $u_0 \in C(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$.

Предположим, что задача (1), (2) с некоторыми такими $u_0(x), u_1(x)$ разрешима. Поставим вопрос о единственности решения. Допустим, что две пары функций

$$\big(u^{(1)}(x,t),\, f^{(1)}(x)\big), \qquad \big(u^{(2)}(x,t),\, f^{(2)}(x)\big)$$

являются решениями задачи (1), (2). Тогда пара $\big(u(x,t), f(x)\big)$, где

$$u(x,t) \equiv u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t), \qquad f(x) \equiv f^{(1)}(x) - f^{(2)}(x),$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности (1) и однородным условиям

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,T) = 0. \tag{4}$$

Соотношения (4) действуют при всех $x \in \mathbb{R}$.

Тем самым вопрос о возможной неединственности решения в исходной обратной задаче (1), (2) сводится к вопросу о наличии нетривиальных решений у однородной задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = 0, \qquad u(x,T) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Как обычно, *тривиальным решением* задачи (5) называем пару

$$u(x,t) \equiv 0, \qquad f(x) \equiv 0. \tag{6}$$

Выясним, бывают ли в (5) другие, нетривиальные решения.

Сразу отметим одно обстоятельство. В предложенной общности, взяв произвольное решение однородной обратной задачи (5), нельзя *a priori* исключать того, что $f(x) \equiv 0$, в то время как $u(x,t) \not\equiv 0$. Другими словами, соотношение $f(x) \equiv 0$ ещё не гарантирует для (5) тривиальность всего решения $\big(u(x,t), f(x)\big)$. Эта ситуация не только логически допустима, но и реализуема в виде явной «неэлементарной» конструкции, которую мы приведём в заключительном разделе 9 настоящей работы.

Если, однако, для некоторого решения задачи (5) установлено, что $u(x,t) \equiv 0$, то $f(x) \equiv 0$ автоматически, и решение неизбежно является тривиальным. Попросту говоря, при сделанных предположениях, исследуя вопрос о единственности решения задачи (5), нужно особо следить за первым компонентом $u(x,t)$. Впрочем, на наиболее доступных «элементарных» решениях этот нюанс почти не проявляется. С рассмотрения таких решений мы и начнём.

Покажем, что если не вводить ограничений, то задача (5) обладает множеством нетривиальных решений, находимых вполне элементарным методом.

2. Элементарные решения

Рассмотрим однородную обратную задачу (5). Дадим полное описание всех её комплексных решений, получаемых методом разделения переменных, применённым к функции $u = u(x,t)$. Точнее, будем искать нетривиальные *элементарные решения* задачи (5) в виде

$$u = y(t)w(x), \qquad f = f(x), \tag{7}$$

где $y(t) \not\equiv 0$, $w(x) \not\equiv 0$. Функции $y(t)$, $w(x)$ предполагаем достаточно гладкими, такими, что $y \in C^1[0,T]$, $w \in C^2(\mathbb{R})$. Всюду далее через i обозначаем мнимую единицу.

При подстановке пары (7) в систему (5) возникают соотношения

$$\begin{cases} y'(t)w(x) = y(t)w''(x) + f(x), \\ y(0) = 0, \qquad y(T) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

При $t = 0$ из (8) следует, что

$$y'(0)w(x) = f(x).$$

Поэтому

$$f(x) = C\,w(x), \qquad C = y'(0), \tag{9}$$

где C — некоторое число, значение которого пока не определено.

Подставляя выражение (9) для $f(x)$ в первое уравнение системы (8), получим

$$y'(t)w(x) = y(t)w''(x) + C\,w(x).$$

Разделяя переменные, приходим к пропорции

$$\frac{y'(t) - C}{y(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = \lambda \tag{10}$$

с некоторой константой $\lambda \in \mathbb{C}$. Для функции $y(t)$ пропорция (10) даёт уравнение

$$y'(t) = \lambda y(t) + C.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, имеет вид

$$y(t) = \frac{C}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) \qquad \Big[\; y(t) = Ct \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \;\Big].$$

Ясно, что $C \neq 0$ (иначе $y(t) \equiv 0$). Но поскольку $y(T) = 0$, то

$$\frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda} = 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) для неизвестного значения $\lambda \in \mathbb{C}$ из пропорции (10) назовём *характеристическим уравнением* обратной задачи (5). Его корни

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{T}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{12}$$

естественно считать *характеристическими числами*. Каждому такому λ_k отвечает функция

$$y_k(t) = C\,\frac{T}{2k\pi i}\left(\exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\,t\right) - 1\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{13}$$

Затем, подставляя найденные λ_k в пропорцию (10), приходим к уравнениям для соответствующих функций $w_k(x)$, а именно

$$w_k''(x) = \frac{2k\pi i}{T}\,w_k(x), \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

При $k = 1,\, 2,\, \ldots$ получаем частные решения

$$w_k^{(1)}(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right), \quad w_k^{(2)}(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right). \tag{14}$$

При $k = -1,\, -2,\, \ldots$ частные решения принимают вид

$$w_k^{(1)}(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{|k|\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right), \quad w_k^{(2)}(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{|k|\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right). \tag{15}$$

С помощью (9) восстанавливаем $f(x)$ по одной из выбранных функций $w_k^{(j)}(x)$.

В результате имеем множество элементарных решений

$$u(x,t) = C\,\frac{T}{2k\pi i}\left(\exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\,t\right) - 1\right) w_k^{(j)}(x), \qquad f(x) = C\,w_k^{(j)}(x),$$

с функциями

$$w_k^{(j)}(x), \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad j = 1,\, 2,$$

из формул (14), (15).

Поскольку коэффициент $C \neq 0$ есть просто числовой множитель, то его без ограничения общности можно положить равным единице. От отрицательных значений $k \in \mathbb{Z}$ удобно перейти к положительным, заменив в соответствующих формулах k на $-k$ и всегда считая, что $k \in \mathbb{N}$.

Подведём итог. С точностью до очевидных линейных комбинаций комплексные элементарные решения однородной задачи (5) имеют вид

$$\begin{cases} u_k^{(1+i)}(x,t) = \dfrac{T}{2k\pi i}\left(\exp\left(\dfrac{2k\pi i}{T}\,t\right) - 1\right)\exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right), \\ f_k^{(1+i)}(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right); \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} u_k^{(-1-i)}(x,t) = \dfrac{T}{2k\pi i}\left(\exp\left(\dfrac{2k\pi i}{T}\,t\right) - 1\right)\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right), \\ f_k^{(-1-i)}(x) = \exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right); \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} u_k^{(1-i)}(x,t) = \dfrac{T}{2k\pi i}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{2k\pi i}{T}\,t\right)\right)\exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right), \\ f_k^{(1-i)}(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right); \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} u_k^{(-1+i)}(x,t) = \dfrac{T}{2k\pi i}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{2k\pi i}{T}\,t\right)\right)\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right), \\ f_k^{(-1+i)}(x) = \exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$. Верхний индекс указывает на число в комплексной плоскости, с которым связаны показатели соответствующей серии решений.

Нетрудно убедиться, что решения из серии (18) комплексно сопряжены к решениям из серии (16), а решения из серии (19) комплексно сопряжены к решениям из серии (17) в том смысле, что

$$\overline{u_k^{(1+i)}(x,t)} = u_k^{(1-i)}(x,t), \qquad \overline{f_k^{(1+i)}(x)} = f_k^{(1-i)}(x)$$

и

$$\overline{u_k^{(-1-i)}(x,t)} = u_k^{(-1+i)}(x,t), \qquad \overline{f_k^{(-1-i)}(x)} = f_k^{(-1+i)}(x)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку исходная однородная задача (5) не содержит комплексных коэффициентов, то, взяв вещественную и мнимую части от решений (16), (17), получим наборы вещественных элементарных решений. Для быстрого разделения вещественных и мнимых частей удобно вывести типовые формулы для выражения

$$\mu(\alpha,\beta) \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{2\alpha i} - 1\right)\, e^{(1+i)\beta}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что

$$e^{2\alpha i} - 1 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = 2i\, e^{\alpha i}\,\sin\alpha.$$

Поэтому

$$\mu(\alpha,\beta) \equiv \frac{1}{2i}\left(e^{2\alpha i}-1\right)\,e^{(1+i)\beta} = e^{\alpha i}\,\sin\alpha\;e^{(1+i)\beta} = e^{\beta+(\alpha+\beta)i}\,\sin\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re}\,\mu(\alpha,\beta) = e^{\beta}\,\sin\alpha\;\cos\left(\alpha+\beta\right);$$

$$\operatorname{Im}\,\mu(\alpha,\beta) = e^{\beta}\,\sin\alpha\;\sin\left(\alpha+\beta\right).$$

Отнеся подобные формулы к комплексным решениям (16), (17) со значениями

$$\alpha = \frac{k\pi}{T}\,t, \qquad \beta = \sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,x \qquad (\text{для } (16)),$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{T}\,t, \qquad \beta = -\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,x \qquad (\text{для } (17)),$$

находим четыре серии вещественных элементарных решений:

$$\begin{cases} u_k^{(1)}(x,t) = \dfrac{T}{k\pi}\,\exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t\right)\cos\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t+\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right), \\ f_k^{(1)}(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right); \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} u_k^{(2)}(x,t) = \dfrac{T}{k\pi}\,\exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t+\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right), \\ f_k^{(2)}(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right); \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} u_k^{(3)}(x,t) = \dfrac{T}{k\pi}\,\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t\right)\cos\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right), \\ f_k^{(3)}(x) = \exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right); \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} u_k^{(4)}(x,t) = \dfrac{T}{k\pi}\,\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{T}\,t-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right), \\ f_k^{(4)}(x) = -\exp\left(-\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right)\sin\left(\sqrt{\dfrac{k\pi}{T}}\,x\right). \end{cases} \tag{23}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$. Те же пары (лишь с другими знаками в (21), (23)) возникают из комплексно сопряжённых решений (18), (19). Непосредственная проверка подтверждает, что элементарные решения (20)–(23) действительно удовлетворяют однородной обратной задаче (5).

Комплексные решения (16)–(19), а затем и вещественные (20)–(23) получены из самых простых соображений. Тем удивительнее, что такие пары в определённом смысле исчерпывают возможности для построения нетривиальных решений однородной обратной задачи (5) при условии, что рост её решений по x не может быть выше экспоненциального.

Для того чтобы оформить эту идею, обратим внимание на одно обстоятельство. Все найденные элементарные решения (20)–(23) являются неограниченными по переменной $x \in \mathbb{R}$. Точнее, они осциллируют, и их амплитуда экспоненциально растёт при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$. Минимальный рост амплитуды наблюдается у решений с номером $k = 1$. Показатель минимального роста равен значению

$$\sigma_0 = \sigma_0(T) = \sqrt{\pi/T}. \tag{24}$$

Установим, во-первых, что если ограничиться классом функций $u(x,t)$ с показателем роста, меньшим значения (24), то однородная обратная задача (5) будет иметь только тривиальное решение (6). Кроме того, установим, что вообще всякое решение однородной задачи (5) с функцией $u(x,t)$, имеющей не более чем экспоненциальный рост по переменной x, является конечной линейной комбинацией элементарных решений (16)–(19). Другими словами, покажем, что найденные элементарные решения образуют базис пространства решений однородной обратной задачи (5) в классах функций экспоненциального роста.

3. Формулировка основных результатов

Первое утверждение даёт точное условие единственности решения для изучаемой обратной задачи.

Теорема 1. *Пусть пара функций* $u = u(x,t)$, $f = f(x)$, *удовлетворяющих требованиям* (3), *является решением линейной однородной задачи* (5). *Предположим, что для функции* $u(x,t)$ *выполнена оценка*

$$|u(x,t)| \leqslant M e^{\sigma|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{25}$$

с константами $M > 0$ *и* $\sigma \in \mathbb{R}$, *причём*

$$\sigma < \sqrt{\pi/T}. \tag{26}$$

Тогда $u(x,t) \equiv 0$ *в полосе* $\mathbb{R} \times [0,T]$ *и* $f(x) \equiv 0$ *всюду на* $\mathbb{R}$.

Откажемся теперь от условия (26) и допустим, что $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$. Тогда в линейной однородной задаче (5) появится бесконечно много нетривиальных решений с соответствующей оценкой (25), но структуру таких решений удаётся полностью описать.

Теорема 2. *Пусть пара функций* $u = u(x,t)$, $f = f(x)$, *удовлетворяющих требованиям* (3), *является решением линейной однородной задачи* (5). *Предположим, что для функции* $u(x,t)$ *выполнена оценка* (25) *со значением* $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$. *Тогда решение* $\big(u(x,t), f(x)\big)$ *представимо в виде*

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} \frac{T}{2k\pi i} \left(\exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) - 1\right) \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} \frac{T}{2k\pi i} \left(\exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) - 1\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} \frac{T}{2k\pi i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\, t\right)\right) \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} \frac{T}{2k\pi i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\, t\right)\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right), \end{aligned} \tag{27}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) + \\ + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right). \tag{28}$$

Здесь $N = [T\sigma^2/\pi]$ *(целая часть), а* $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$ *при* $k = 1, \ldots, N$ *суть комплексные константы, однозначно определённые выбранным решением.*

Иначе говоря, всякое решение однородной обратной задачи (5), удовлетворяющее экспоненциальной оценке (25) с некоторым значением $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$, непременно представимо в виде линейной комбинации комплексных элементарных решений, взятых из серий (16)–(19). Если решение $\big(u(x,t), f(x)\big)$ состоит из вещественнозначных функций, то формулы (27), (28) можно «овеществить», перейдя к линейным комбинациям вещественных элементарных решений (20)–(23).

Для доказательства сформулированных теорем нужна информация о некоторых технических свойствах оператора второй производной, входящего в уравнение теплопроводности. Эти свойства элементарны и в общих чертах известны, но из-за отсутствия подходящих ссылок дадим полное изложение в отдельном параграфе.

4. Оператор второй производной

Прежде всего отметим, что оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \tag{29}$$

на области определения $C^2(\mathbb{R})$ обладает следующим свойством замкнутости в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Допустим, что задано семейство функций* $\{\varphi_\varepsilon(x)\} \subset C^2(\mathbb{R})$ *с параметром* $\varepsilon > 0$, *причём* $\varphi_\varepsilon(x) \to \varphi_0(x)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *равномерно на компактах в* $\mathbb{R}$. *Пусть также* $\varphi''_\varepsilon(x) \to \psi(x)$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *равномерно на компактах в* $\mathbb{R}$. *Тогда* $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R})$ *и* $\varphi''_0(x) = \psi(x)$ *всюду на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Понятно, что функции $\varphi_0(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны всюду на $\mathbb{R}$, как равномерные пределы на компактах соответствующих непрерывных функций. Повторным интегрированием второй производной получим формулу

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(0) + \varphi'_\varepsilon(0)x + \int_0^x (x-s)\varphi''_\varepsilon(s)\,ds, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{30}$$

В частности, при $x = 1$ имеем

$$\varphi_\varepsilon(1) = \varphi_\varepsilon(0) + \varphi'_\varepsilon(0) + \int_0^1 (1-s)\varphi''_\varepsilon(s)\,ds, \qquad \varepsilon > 0.$$

По условиям леммы если $\varepsilon \to 0+$, то

$$\varphi_\varepsilon(1) \to \varphi_0(1), \qquad \varphi_\varepsilon(0) \to \varphi_0(0), \qquad \int_0^1 (1-s)\varphi''_\varepsilon(s)\,ds \to \int_0^1 (1-s)\psi(s)\,ds.$$

Но тогда $\varphi_\varepsilon'(0) \to a$ при $\varepsilon \to 0+$ с соответствующим конечным значением a. Вновь обратившись к формуле (30) и полагая там $\varepsilon \to 0+$, получим соотношение

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(0) + ax + \int_0^x (x-s)\psi(s)\,ds = \varphi_0(0) + ax + \int_0^x dy \int_0^y \psi(s)\,ds, \tag{31}$$

верное при любом $x \in \mathbb{R}$. Представление (31) гарантирует, что функция φ_0 принадлежит классу $C^2(\mathbb{R})$, причём $\varphi_0''(x) = \psi(x)$ всюду на $\mathbb{R}$. Лемма доказана. □

Отметим попутно, что вопрос о замкнутости дифференциальных операторов в стандартных пространствах непрерывных функций не следует считать слишком банальным. Например, простое обобщение оператора (29) — лапласиан Δ на области определения $C^2(\mathbb{R}^n)$ — при $n \geqslant 2$ уже не будет замкнутым в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$, оставаясь только замыкаемым. Это приводит к определённым техническим сложностям в исследовании обратных и нелокальных задач, подобных (1), (2), в многомерном (не одномерном) случае. Приходится использовать специальное замкнутое расширение лапласиана — оператор Лапласа — Привалова. Некоторые относящиеся сюда подробности можно найти в [6; 8]. В одномерном случае таких проблем не возникает, и в силу леммы 1 ситуация оказывается принципиально проще.

Нам также потребуются специальные условия, устраняющие «лишние» комплексные собственные функции оператора (29). Две следующие леммы представляют собой «одномерную» версию общих «многомерных» результатов из [6].

Лемма 2. *Пусть функция* $w \in C^2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет уравнению*

$$w''(x) = \lambda w(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

со значением $\lambda \in \mathbb{C}$, *где* $\lambda = (\eta + i\xi)^2$ *и* $\eta = |\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\,| > 0$. *Предположим также, что*

$$|w(x)| \leqslant M e^{\sigma|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

с константами $M > 0$ *и* $\sigma \in \mathbb{R}$, *причём* $\sigma < \eta$. *Тогда* $w(x) \equiv 0$ *на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. ФСР для уравнения (32) имеет вид $e^{(\eta+i\xi)x}$, $e^{-(\eta+i\xi)x}$. Поэтому

$$w(x) = c_1\, e^{(\eta+i\xi)x} + c_2\, e^{-(\eta+i\xi)x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

с некоторыми коэффициентами $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Допустим, что $c_1 \neq 0$. Тогда

$$|w(x)| \sim |c_1|\, e^{\eta x}, \qquad x \to +\infty,$$

что противоречит (33), где $\sigma < \eta$. Аналогично если $c_2 \neq 0$, то

$$|w(x)| \sim |c_2|\, e^{-\eta x} = |c_2|\, e^{\eta|x|}, \qquad x \to -\infty,$$

что снова противоречит (33), где $\sigma < \eta$. Следовательно, $c_1 = c_2 = 0$ и $w(x) \equiv 0$. Лемма доказана. □

Утверждение леммы очевидно сохранит свою силу и при допущении, что $\eta = 0$, т. е. когда $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \leqslant 0$. Но доказательство здесь придётся чуть изменить, и такой случай нам не понадобится.

Точнее, для наших целей нужно лишь одно следствие леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $w \in C^2(\mathbb{R})$, *и*

$$w''(x) = \frac{2k\pi i}{T}\, w(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

с некоторым фиксированным значением $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Если для функции* $w(x)$ *выполнена оценка* (33) *с показателем* $\sigma \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющим условию*

$$\sigma < \sqrt{|k|\pi/T}, \tag{35}$$

то $w(x) \equiv 0$ *на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 2 для $\lambda = \lambda_k \equiv 2k\pi i/T$. Если $k > 0$, то

$$\sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\frac{2k\pi i}{T}} = \pm \sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i).$$

Если $k < 0$, то

$$\sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\frac{2k\pi i}{T}} = \pm \sqrt{\frac{|k|\pi}{T}}\,(1-i).$$

В любом случае $\eta \equiv |\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_k}\,| = \sqrt{|k|\pi/T} > 0$, и условие (35) означает попросту, что $\sigma < \eta$. Применяя к ситуации лемму 2, заключаем, что $w(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$. $\square$

Особая роль уравнений вида (34) объясняется тем, что именно такие уравнения со значениями $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ возникают для функциональных коэффициентов Фурье, вычисленных по переменной t от функции $u(x,t)$ при любом возможном выборе решения $\big(u(x,t), f(x)\big)$ однородной обратной задачи (5). Множители $\lambda_k \equiv 2k\pi i/T$, фигурирующие в (34), совпадают с характеристическими числами (12), найденными для задачи (5) из характеристического уравнения (11).

5. Соотношения для коэффициентов Фурье

Пусть пара функций $\big(u(x,t), f(x)\big)$ является решением однородной обратной задачи (5). Для функции $u(x,t)$ определим комплексные коэффициенты Фурье по переменной $t \in [0,T]$ стандартным образом:

$$w_k(x) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(x,t)\, \exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{36}$$

Используя соотношения из задачи (5), установим следующий результат.

Лемма 4. *Предположим, что пара функций* $\big(u(x,t), f(x)\big)$, *удовлетворяющих требованиям* (3), *является решением однородной обратной задачи* (5), *и пусть для функции* $u(x,t)$ *при* $k \in \mathbb{Z}$ *определены коэффициенты Фурье* $w_k(x)$ *по формуле* (36). *Тогда* $w_k \in C^2(\mathbb{R})$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$, *причём*

$$w_k''(x) = \frac{2k\pi i}{T}\, w_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{37}$$

$$w_0''(x) = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Если дополнительно функция $u(x,t)$ *удовлетворяет оценке* (25) *с некоторыми константами* $M > 0$ *и* $\sigma \in \mathbb{R}$, *то*

$$|w_k(x)| \leqslant M e^{\sigma|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{39}$$

с теми же значениями $M > 0$ *и* $\sigma \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Стандартные требования (3) не гарантируют достаточно хороших свойств функции $u(x,t)$ при $t \to 0+$. Поэтому зафиксируем малое $\varepsilon \in (0,T)$ и введём вспомогательную функцию

$$v^{(\varepsilon)}(x,\lambda) = \int\limits_{\varepsilon}^{T} u(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{40}$$

с дополнительным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [\varepsilon, T])$, то

$$v^{(\varepsilon)}(\,\cdot\,,\lambda) \in C^2(\mathbb{R})$$

при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$. Вычислим производную $v^{(\varepsilon)}_{xx}$ по переменной x. Принимая во внимание уравнение (1) и соотношение $u(x,T) \equiv 0$, запишем

$$v^{(\varepsilon)}_{xx}(x,\lambda) = \int\limits_{\varepsilon}^{T} u_{xx}(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt = \int\limits_{\varepsilon}^{T} (u_t(x,t) - f(x))\, e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= u(x,t)\, e^{-\lambda t}\Big|_{\varepsilon}^{T} + \lambda \int\limits_{\varepsilon}^{T} u(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt - f(x) \int\limits_{\varepsilon}^{T} e^{-\lambda t}\, dt =$$

$$= -u(x,\varepsilon)\, e^{-\lambda\varepsilon} + \lambda\, v^{(\varepsilon)}(x,\lambda) - f(x) \int\limits_{\varepsilon}^{T} e^{-\lambda t}\, dt.$$

Зафиксируем значение $\lambda \in \mathbb{C}$ и устремим $\varepsilon \to 0+$. Так как $u \in C\,(\mathbb{R} \times [0,T])$, то

$$v^{(\varepsilon)}(x,\lambda) = \int\limits_{\varepsilon}^{T} u(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt \;\longrightarrow\; v^{(0)}(x,\lambda) \equiv \int\limits_{0}^{T} u(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt$$

равномерно на компактах в $\mathbb{R}$. Вспомним ещё, что $u(x,0) \equiv 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0+$ имеем

$$v^{(\varepsilon)}_{xx}(x,\lambda) = -u(x,\varepsilon)\, e^{-\lambda\varepsilon} + \lambda\, v^{(\varepsilon)}(x,\lambda) - f(x) \int\limits_{\varepsilon}^{T} e^{-\lambda t}\, dt \;\longrightarrow\; \lambda\, v^{(0)}(x,\lambda) - L(\lambda) f(x)$$

также равномерно на компактах в $\mathbb{R}$. Здесь

$$L(\lambda) \equiv \int\limits_{0}^{T} e^{-\lambda t}\, dt \;=\; \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ T, & \lambda = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Таким образом, оба семейства функций $v^{(\varepsilon)}(x,\lambda)$ и $v^{(\varepsilon)}_{xx}(x,\lambda)$ имеют соответствующие пределы при $\varepsilon \to 0+$. Используя свойство замкнутости оператора второй производной (см. лемму 1), получаем, что при любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция

$$v^{(0)}(x,\lambda) = \int\limits_{0}^{T} u(x,t)\, e^{-\lambda t}\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{42}$$

принадлежит $C^2(\mathbb{R})$, и

$$v^{(0)}_{xx}(x,\lambda) = \lambda\, v^{(0)}(x,\lambda) - L(\lambda) f(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

Вернёмся теперь к коэффициентам Фурье (36).

Сравнивая формулы (36) и (42), замечаем, что

$$v^{(0)}(x,\lambda)\Big|_{\lambda=2k\pi i/T} = T\,w_k(x), \qquad k\in\mathbb{Z},$$

и потому $w_k\in C^2(\mathbb{R})$ при любом $k\in\mathbb{Z}$. Кроме того, подстановка в (43) тех же значений $\lambda=\lambda_k\equiv 2k\pi i/T$ даёт соотношения

$$T\,w_k''(x) = \lambda_k\,T\,w_k(x) - L(\lambda_k)f(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{44}$$

Поскольку

$$L(\lambda_k) = \begin{cases} 0, & k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ T, & k=0 \end{cases} \qquad \text{(см. (41))},$$

то из (44) следует, что

$$w_k''(x) = \lambda_k\,w_k(x), \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}; \qquad w_0''(x) = -f(x).$$

Но это и есть соотношения (37) и (38) соответственно.

Отметим, наконец, тот очевидный факт, что коэффициенты Фурье (36), взятые от функции $u(x,t)$, обладают естественной устойчивостью по отношению к экспоненциальной оценке (25). Действительно, если $|u(x,t)|\leqslant Me^{\sigma|x|}$ в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$ с константами $M>0$ и $\sigma\in\mathbb{R}$, то

$$|w_k(x)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |u(x,t)|\,dt \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T Me^{\sigma|x|}\,dt = M\,e^{\sigma|x|}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

т. е. верна оценка (39). Лемма доказана. □

Между прочим, вывод нужных соотношений (37) и (38) сильно упростится, если действовать напрямую с функцией (42), а не обращаться к вспомогательным функциям (40). Однако для этого необходимо предварительно установить следующий специальный факт: всякое решение однородной обратной задачи (5), удовлетворяющее стандартным требованиям (3), автоматически обладает повышенной гладкостью, такой, что $u\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T])$, и уравнение (1) выполнено всюду в замкнутой полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$. Данный принцип, скорее всего, верен, но его строгое обоснование требует некоторых вспомогательных рассуждений. Их лучше вынести в отдельное исследование.

Мы же приступим к доказательству основных результатов статьи.

6. Доказательство теоремы единственности

Докажем теорему 1 из пункта 3. Пусть пара функций $\big(u(x,t), f(x)\big)$ удовлетворяет требованиям (3) и является решением однородной обратной задачи (5). Предположим, что функция $u(x,t)$ подчинена экспоненциальной оценке (25) с ограничением (26), т. е. считаем, что в показателе экспоненты стоит значение $\sigma<\sqrt{\pi/T}$.

Для функции $u(x,t)$ определим коэффициенты Фурье $w_k(x)$ по формуле (36). Согласно лемме 4 для каждой функции $w_k(x)$ при $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ имеет место своё соотношение (37) и выполнена оценка (39) с общим значением σ, где

$$\sigma<\sqrt{\pi/T}\leqslant\sqrt{|k|\pi/T}, \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Отсюда по лемме 3 заключаем, что

$$w_k(x)\equiv 0, \qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{45}$$

Возможно, ненулевым остался один коэффициент $w_0(x)$.

Рассмотрим разность $\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - w_0(x)$. Её коэффициенты Фурье допускают запись

$$\widetilde{w}_k(x) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T \widetilde{u}(x,t)\,\exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\,t\right)dt = w_k(x) - \delta_{k,0}\,w_0(x), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где $\delta_{k,0}$ — символ Кронекера. С учётом (45) получаем, что $\widetilde{w}_k(x) \equiv 0$ уже при всех значениях $k \in \mathbb{Z}$. Из равенства нулю всех коэффициентов Фурье следует, что сама непрерывная функция есть тождественный нуль. Поэтому $\widetilde{u}(x,t) \equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$. Но тогда

$$u(x,t) \equiv w_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

С учётом однородных условий (4) заключаем, что $w_0(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$. Это автоматически означает, что $f(x) \equiv 0$ всюду на $\mathbb{R}$. Таким образом, решение однородной обратной задачи (5) при наличии экспоненциальной оценки (25), взятой с ограничением (26), непременно оказывается тривиальным. Теорема 1 полностью доказана.

7. Доказательство теоремы о структуре общего решения

Доказательство теоремы 2 развивает идею доказательства теоремы 1.

Пусть снова пара функций $\big(u(x,t), f(x)\big)$ удовлетворяет требованиям (3) и является решением однородной обратной задачи (5). Считаем, что для $u(x,t)$ выполнена экспоненциальная оценка (25) с константами $M > 0$ и $\sigma \in \mathbb{R}$. Но теперь

$$\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}, \tag{46}$$

т. е. ограничение (26) заведомо нарушается.

Для функции $u(x,t)$ введём коэффициенты Фурье $w_k(x)$ по правилу (36). Учитывая (46), определим натуральное число

$$N \equiv [T\sigma^2/\pi] \geqslant 1.$$

По лемме 4 при каждом $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ для функции $w_k(x)$ выполнено соответствующее соотношение (37) и действует оценка (39) со значением $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$. При этом если

$$|k| \geqslant N + 1 = [T\sigma^2/\pi] + 1 > T\sigma^2/\pi,$$

то $\sigma < \sqrt{|k|\pi/T}$. Отсюда на основании леммы 3 заключаем, что

$$w_k(x) \equiv 0, \qquad |k| \geqslant N + 1. \tag{47}$$

Для разности

$$\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - \sum_{k=-N}^{N} \exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\,t\right) w_k(x)$$

уже все коэффициенты Фурье

$$\widetilde{w}_k(x) \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T \widetilde{u}(x,t)\,\exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\,t\right)dt, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

будут равны нулю.

Действительно, при $|k| \leqslant N$ получаем, что

$$\widetilde{w}_k(x) = w_k(x) - w_k(x) \equiv 0,$$

а при $|k| \geqslant N+1$ имеем соответственно

$$\widetilde{w}_k(x) = w_k(x) - 0 = w_k(x) \equiv 0$$

в согласии с (47). Но тогда $\widetilde{u}(x,t) \equiv 0$, и

$$u(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} \exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) w_k(x) =$$

$$= w_0(x) + \sum_{k=1}^{N} \exp\left(\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) w_k(x) + \sum_{k=1}^{N} \exp\left(-\frac{2k\pi i}{T}\, t\right) w_{-k}(x) \tag{48}$$

всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$.

В силу соответствующих уравнений (37) верны представления

$$w_k(x) = C_k^{(1)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) + C_k^{(2)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right),$$

$$w_{-k}(x) = -C_k^{(3)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right) - C_k^{(4)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right)$$

при $k = 1, \ldots, N$. Все комплексные константы $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$ определены однозначно. Дополнительные множители $\pm T/(2k\pi i)$ в функциях ФСР взяты для удобства при последующей записи функции $f(x)$.

Начальное условие $u(x,0) = 0$ при его учёте в (48) даёт соотношение

$$w_0(x) = -\sum_{k=1}^{N} (w_k(x) + w_{-k}(x)) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} C_k^{(1)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) - \sum_{k=1}^{N} C_k^{(2)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\,x\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} C_k^{(3)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right) + \sum_{k=1}^{N} C_k^{(4)} \frac{T}{2k\pi i} \exp\left(-\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\,x\right).$$

Подставим теперь в формулу (48) найденные выражения для

$$w_{-N}(x),\ \ldots,\ w_{-1}(x),\ w_0(x),\ w_1(x),\ \ldots,\ w_N(x).$$

После соответствующей группировки слагаемых получим представление (27), указанное в теореме 2 для функции $u(x,t)$. Затем, чтобы вывести нужную формулу для $f(x)$, воспользуемся соотношением (38) в сочетании с найденным выражением для $w_0(x)$. Вычисляя $f(x) = -w_0''(x)$ и замечая, что

$$\left(\pm\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1+i)\right)^2 = \frac{2k\pi i}{T}, \qquad \left(\pm\sqrt{\frac{k\pi}{T}}\,(1-i)\right)^2 = -\frac{2k\pi i}{T},$$

придём в точности к представлению (28). Однозначность числовых коэффициентов в формулах (27), (28) следует из очевидной линейной независимости элементарных решений (16)–(19). Теорема 2 полностью доказана.

8. Экспоненциальные классы функций

Полезно дать отдельную интерпретацию полученных результатов на языке функциональных пространств. Для этого введём особые экспоненциальные классы функций, характеризуемые показателем роста мажорирующей экспоненты (в духе работ [7; 8]).

Пусть σ — фиксированное действительное число, $-\infty < \sigma < \infty$. Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T])$ класс функций $u(x,t)$, заданных на $\mathbb{R}\times[0,T]$, для которых справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant Me^{\sigma|x|}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

с некоторой константой $M>0$, зависящей от функции u.

Аналогично через $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$ будем обозначать класс функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$, для которых справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant Me^{\sigma|x|}, \qquad x\in\mathbb{R},$$

с константой $M>0$, зависящей от функции f.

В частности, при $\sigma=0$ получаем обычные ограниченные функции. При $\sigma<0$ функции экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности, а при $\sigma>0$ допускаются функции соответствующего экспоненциального роста. При $\sigma_1<\sigma_2$ имеем очевидные вложения

$$\mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}\times[0,T]) \subset \mathcal{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}\times[0,T]), \qquad \mathcal{E}_{\sigma_1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_{\sigma_2}(\mathbb{R}).$$

Ясно, что конечная линейная комбинация функций из класса $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T])$ (или из класса $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$) снова попадает в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T])$ (или в $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$ соответственно).

Сохраняя стандартные требования (3), вновь рассмотрим всевозможные решения однородной обратной задачи (5). Как выяснилось в процессе проведённых исследований, существенную роль играет ограничение только на первый компонент из пары $\big(u(x,t),f(x)\big)$. Зададим условие

$$u\in\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T]) \tag{49}$$

с некоторым значением $\sigma\in\mathbb{R}$. Доказанные выше результаты фактически означают, что в экспоненциальных классах $\mathcal{E}_\sigma$ при $\sigma<\sqrt{\pi/T}$ обратная задача (5) имеет только тривиальное решение (6), а в классах $\mathcal{E}_\sigma$ при $\sigma\geqslant\sqrt{\pi/T}$ появляется уже бесконечно много разных решений, представимых в виде (27), (28) с соответствующими константами $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$.

Точнее, справедливо такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\big(u(x,t),f(x)\big)$ — решение однородной обратной задачи* (5). *Предположим, что для функции $u(x,t)$ выполнено условие* (49) *с некоторым фиксированным значением $\sigma\in\mathbb{R}$. Тогда если $\sigma<\sqrt{\pi/T}$, то $u(x,t)\equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$ и $f(x)\equiv 0$ всюду на прямой $\mathbb{R}$. Если же $\sigma\geqslant\sqrt{\pi/T}$ и $u(x,t)\not\equiv 0$ в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$, то решение $\big(u(x,t),f(x)\big)$ представимо в виде* (27), (28) *со значением $N\equiv[T\sigma^2/\pi]$. При этом $f(x)\not\equiv 0$ на прямой $\mathbb{R}$ и (автоматически) $f\in\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$ с тем же самым значением $\sigma\geqslant\sqrt{\pi/T}$.*

Теорема 3 непосредственно следует из теорем 1 и 2, являясь, по сути, их комбинированной переформулировкой.

Рассмотрим теперь решения исходной неоднородной обратной задачи (1), (2). Предположим, что для некоторых выбранных функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ эта задача допускает решение $\big(u(x,t), f(x)\big)$ с условием (49) при фиксированном значении $\sigma \in \mathbb{R}$. Установленные результаты означают, что $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T])$ есть *класс единственности* для задачи (1), (2) при $\sigma < \sqrt{\pi/T}$ и *класс неединственности* при $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$.

Перейдём к точным формулировкам. Начнём с теоремы единственности.

Теорема 4. *Пусть* $\big(u^{(1)}(x,t), f^{(1)}(x)\big)$ *и* $\big(u^{(2)}(x,t), f^{(2)}(x)\big)$ *— два решения обратной задачи* (1), (2) *с выбранными функциями* $u_0 \in C(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$. *Предположим, что обе функции* $u = u^{(1)}(x,t)$ *и* $u = u^{(2)}(x,t)$ *удовлетворяют условию* (49) *с общим фиксированным значением* $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. *Тогда* $u^{(1)}(x,t) \equiv u^{(2)}(x,t)$ *всюду в полосе* $\mathbb{R}\times[0,T]$ *и* $f^{(1)}(x) \equiv f^{(2)}(x)$ *всюду на прямой* $\mathbb{R}$, *т.е. указанные решения тождественно совпадают.*

Теорема 4 следует из теоремы 1 с учётом линейности обратной задачи (1), (2). Понятно, что в условиях теоремы 4 неявно предполагается, что $u_0, u_1 \in \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$ с тем же оговорённым значением $\sigma < \sqrt{\pi/T}$. Это условие, разумеется, необходимо для разрешимости задачи (1), (2) в соответствующем классе (49). Впрочем, вопрос о разрешимости сейчас не обсуждается, и эффективным достаточным условиям разрешимости задачи (1), (2) планируется посвятить отдельное исследование.

Приведём теперь утверждение про «неединственность» решения.

Теорема 5. *Предположим, что обратная задача* (1), (2) *с выбранными функциями* $u_0 \in C(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$ *имеет решение* $\big(u(x,t), f(x)\big)$, *подчинённое ограничению* (49) *с фиксированным значением* $\sigma \geqslant \sqrt{\pi/T}$. *Тогда обратная задача* (1), (2) *с теми же функциями* $u_0 \in C(\mathbb{R})$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R})$ *имеет бесконечно много других решений, подчинённых тому же ограничению* (49), *но все они отличаются от выделенного решения* $\big(u(x,t), f(x)\big)$ *прибавлением различных линейных комбинаций элементарных решений* (16)–(19) *с номерами* $k = 1, \ldots, N$, *где* $N \equiv [T\sigma^2/\pi] \geqslant 1$.

Для доказательства теоремы 5 следует заметить, что прибавление к выделенному решению $\big(u(x,t), f(x)\big)$ любой линейной комбинации пар (16)–(19) с номерами, указанными в теореме 5, не выводит вновь полученное решение за рамки ограничения (49). Используя затем теорему 2, заключаем, что этим исчерпываются все возможности для построения решений обратной задачи с общим ограничением (49) на рост первого компонента.

Заметим, что в условиях «неоднородных» теорем 4 и 5 требование (49) с тем или иным значением $\sigma \in \mathbb{R}$ ещё не гарантирует того, что второй компонент решения — функция $f(x)$ — также попадает в соответствующий класс $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$. Например, непосредственно проверяется, что задача

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x), & x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = \cos e^{x^2}, & u(x,T) = \cos e^{x^2}, \end{cases}$$

имеет решение

$$u(x,t) = \cos e^{x^2}, \qquad f(x) = 2e^{x^2}\Big(\big(2x^2+1\big)\sin e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}\cos e^{x^2}\Big).$$

При этом $u \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}\times[0,T])$, но $f \notin \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R})$ ни при каком $\sigma > 0$. Другими словами, несмотря на то что функция $u(x,t)$ является ограниченной в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$, вторая функция $f(x)$ обладает сверхэкспоненциальным ростом. Как следует из теоремы 3, для однородной задачи (5) подобный эффект в принципе невозможен.

Гораздо более неожиданным является другое обстоятельство. Оказывается, однородная задача (5) обладает нетривиальными решениями со свойством

$$u(x,t) \not\equiv 0, \qquad f(x) \equiv 0. \tag{50}$$

Для таких решений функция $u(x,t)$ в полном согласии с теоремой 3 должна иметь сверхэкспоненциальный рост по переменной x, не попадая ни в один из введённых классов $\mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R}\times[0,T])$. Конструкция нужного примера в определённом смысле неэлементарна. Её рассмотрению посвятим следующий пункт.

9. Особые решения сверхэкспоненциального роста

Для построения решения однородной обратной задачи (5) со свойством (50) достаточно подобрать функцию

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,T]), \tag{51}$$

отличную от тождественного нуля в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$ и удовлетворяющую там соотношениям

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\ u(x,0)=0, \qquad u(x,T)=0. \end{cases} \tag{52}$$

Похожий пример, но лишь с одним начальным условием $u(x,0)=0$, был впервые построен в работе А. Н. Тихонова [1] (см. также [2]). Идея примера была основана на некоторых соображениях *неквазианалитичности* [11; 12]. Для того чтобы приспособить конструкцию А. Н. Тихонова к нашей задаче с добавочным финальным условием $u(x,T)=0$, используем следующий результат из теории квазианалитических функций, доказанный в книге Л. Хёрмандера [13] (см. там теорему 1.3.5 на с. 32).

Пусть $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел со свойством

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \equiv T < \infty. \tag{53}$$

Тогда существует неотрицательная функция $\gamma\in C^\infty[0,T]$, отличная от тождественного нуля на $[0,T]$ и удовлетворяющая условиям

$$\gamma^{(k)}(0)=0, \qquad \gamma^{(k)}(T)=0, \qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,, \tag{54}$$

$$\left|\gamma^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{2^k}{a_0\cdot\,\ldots\,\cdot a_k}, \qquad 0<t<T, \qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,. \tag{55}$$

Функция $\gamma(t)\not\equiv 0$ строится конструктивно, как предел последовательных свёрток, где в качестве сомножителей выступают нормированные характеристические функции для отрезков $[0,a_k]\subset\mathbb{R}$ с числами из исходной последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ (все подробности см. в [13, с. 32–35]).

Применим цитированный результат в нужной нам форме. Зафиксируем два числа $T>0$ и $p\in(1,2)$, отождествляя T с финальным моментом времени в системе (52) и полагая p параметром, влияющим на выбор будущего решения. Определим последовательность

$$a_0 = D; \qquad a_k = \frac{D}{k^p}, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{56}$$

Значение
$$D = D(T,p) = \frac{T}{1+\zeta(p)} > 0 \tag{57}$$
с ζ-функцией Римана выбрано так, чтобы выполнялось условие (53).

Для последовательности (56) по теореме 1.3.5 [13] построим неотрицательную функцию $\gamma \in C^\infty[0,T]$, отличную от тождественного нуля на $[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (54), (55). Точнее, условие (55) в нашем случае даёт соотношения
$$\left|\gamma^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{2^k}{D^{k+1}}\,(k!)^p, \qquad 0<t<T, \qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,, \tag{58}$$
со значением $D>0$ из формулы (57).

Определим функцию
$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\,\gamma^{(k)}(t)\,x^{2k}, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{59}$$
Формула (59) решает поставленную задачу. Указанная там функция $u(x,t)\not\equiv 0$, будучи бесконечно дифференцируемой по $x\in\mathbb{R}$ и по $t\in[0,T]$, заведомо попадает в класс (51) и удовлетворяет всем соотношениям в системе (52). С учётом структуры ряда (59) и выполненных условий (54) формальная проверка соотношений (52) не представляет труда. Обоснуем лишь должную сходимость ряда (59).

В полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$ выберем прямоугольник $[-R,R]\times[0,T]$ с фиксированным значением $R>0$. Согласно (54) и (58) в этом прямоугольнике для k-го слагаемого ряда (59) имеем оценку
$$\left|\frac{1}{(2k)!}\,\gamma^{(k)}(t)\,x^{2k}\right| \leqslant \frac{1}{D}\,\frac{(k!)^p}{(2k)!}\left(\frac{2R^2}{D}\right)^k = \frac{1}{D}\,q^k\,\frac{(k!)^p}{(2k)!}, \qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,,$$
со значением $q=2R^2/D>0$. Числовой ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\,\frac{(k!)^p}{(2k)!}$$
сходится при любых $q>0$ и $p\in(1,2)$, поскольку
$$\sqrt[k]{q^k\,\frac{(k!)^p}{(2k)!}} \sim q\left(\frac{k}{e}\right)^p\left(\frac{e}{2k}\right)^2 = \frac{q}{4}\left(\frac{e}{k}\right)^{2-p} \to 0$$
при $k\to\infty$. По признаку Вейерштрасса функциональный ряд из формулы (59) равномерно сходится в любом прямоугольнике $[-R,R]\times[0,T]$. Следовательно, функция $u(x,t)$ корректно определена и непрерывна всюду в полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$.

Аналогично показывается, что при формальном почленном дифференцировании ряда (59) (любое число раз по x и по t) возникающий функциональный ряд также равномерно сходится во всяком прямоугольнике $[-R,R]\times[0,T]$. Поэтому функция $u(x,t)$ заведомо попадает в класс (51), и все её частные производные можно находить почленным дифференцированием ряда (59). Тем самым проверка соотношений (52) формальной подстановкой ряда (59) является полностью законной. Как уже отмечалось, такая проверка не составляет труда.

Полученное решение $u(x,t)$ очевидно отлично от тождественного нуля в выбранной полосе $\mathbb{R}\times[0,T]$. Действительно, если допустить, что $u(x,t)\equiv 0$, то при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ степенной ряд по x в формуле (59) должен иметь лишь нулевые коэффициенты. Но это возможно, только когда $\gamma(t)\equiv 0$ на $[0,T]$. Последнее противоречит выбору неквазианалитической функции $\gamma\in C^\infty[0,T]$.

Итак, требуемое решение задачи (52) предъявлено. Точнее, указана целая серия решений, зависящих от выбора параметра $p \in (1, 2)$. Мы можем трактовать их как особые решения вида (50) для однородной обратной задачи (5).

Обсудим теперь вопрос о возможном поведении при $|x| \to \infty$ сконструированной функции $u(x, t) \not\equiv 0$ вида (59). Ответ также будет зависеть от параметра p. Значение $p \in (1, 2)$ по-прежнему считаем фиксированным.

На основании теоремы 3 можем утверждать, что $u \notin \mathcal{E}_\sigma(\mathbb{R} \times [0, T])$ ни при каком $\sigma \in \mathbb{R}$, т. е. простая экспоненциальная оценка для построенной функции (59) невозможна. Кроме того, невозможна и гораздо более сильная оценка

$$|u(x, t)| \leqslant M e^{\sigma |x|^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{60}$$

ни при каком выборе постоянных $M > 0$ и $\sigma > 0$. Действительно, согласно классической теореме А. Н. Тихонова [1] (см. также [2]), если какая-то функция $u = u(x, t)$ стандартной гладкости $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0, T])$ даёт решение задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{61}$$

и удовлетворяет оценке (60) с некоторыми числами $M > 0$ и $\sigma > 0$, то $u(x, t) \equiv 0$ всюду в полосе $\mathbb{R} \times [0, T]$. (Сравнительно простое доказательство теоремы Тихонова см. в книге В. П. Михайлова [14, с. 376–379].)

Оценим сверху функцию $u(x, t) \not\equiv 0$ из формулы (59). Учитывая выполненные условия (54), (58), имеем

$$|u(x, t))| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, |\gamma^{(k)}(t)|\, x^{2k} \leqslant \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^p}{(2k)!} \left(\frac{2x^2}{D} \right)^k \tag{62}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Удобно комплексифицировать ситуацию, введя вспомогательную целую функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^p}{(2k)!}\, z^k, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{63}$$

с тем же фиксированным значением $p \in (1, 2)$. Поскольку для коэффициентов

$$c_k = \frac{(k!)^p}{(2k)!}, \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{64}$$

верно, что

$$\sqrt[k]{c_k} = \sqrt[k]{\frac{(k!)^p}{(2k)!}} \sim \left(\frac{k}{e} \right)^p \left(\frac{e}{2k} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{e}{k} \right)^{2-p} \to 0, \qquad k \to \infty,$$

то определение (63) действительно корректно (и, кстати, не только при $p \in (1, 2)$, но и при любом $p \in (-\infty, 2)$). Сравнивая (62) и (63), замечаем, что

$$|u(x, t))| \leqslant \frac{1}{D}\, F\left(\frac{2x^2}{D} \right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{65}$$

Осталось оценить функцию $F(z)$. Установим, что

$$|F(z)| \leqslant C \exp \left| \frac{z}{4} \right|^{\frac{1}{2-p}}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{66}$$

с некоторой константой $C > 0$.

Воспользуемся стандартным аппаратом теории целых функций [15]. Как известно, если целая функция $F(z)$ имеет конечный тип $\sigma \geqslant 0$ при порядке $\rho \in (0, \infty)$, то для любого конечного значения $a > \sigma$ справедлива оценка

$$|F(z)| \leqslant C \exp\bigl(a|z|^\rho\bigr), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{67}$$

с некоторой константой $C > 0$, зависящей, вообще говоря, от выбора $a > \sigma$.

Порядок и тип в нашем случае вычисляются по формулам (см. [15, с. 12–15])

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln |1/c_k|}, \qquad (\sigma e \rho)^{1/\rho} = \lim_{k\to\infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{c_k}$$

через коэффициенты степенного разложения (63). Поскольку

$$\ln n! = n \ln n \,\bigl(1 + o(n \ln n)\bigr), \qquad n \to \infty,$$

то для коэффициентов (64) имеем асимптотику

$$\ln |1/c_k| \,=\, \ln (2k)! - p \ln k! \,\sim\, (2-p)\, k \ln k, \qquad k \to \infty.$$

Отсюда

$$\rho \,=\, \lim_{k\to\infty} \frac{k \ln k}{\ln |1/c_k|} \,=\, \frac{1}{2-p}. \tag{68}$$

Но тогда для типа σ возникает соотношение

$$\left(\frac{\sigma e}{2-p}\right)^{2-p} = \lim_{k\to\infty} k^{2-p} \sqrt[k]{\frac{(k!)^p}{(2k)!}} \,=\, \lim_{k\to\infty} k^{2-p} \left(\frac{k}{e}\right)^p \left(\frac{e}{2k}\right)^2 = \frac{e^{2-p}}{4}.$$

Соответственно,

$$\sigma = (2-p)\, 4^{-\frac{1}{2-p}}. \tag{69}$$

Следовательно, при любом $p \in (1, 2)$ можем взять значение

$$a \equiv 4^{-\frac{1}{2-p}} > (2-p)\, 4^{-\frac{1}{2-p}} = \sigma, \tag{70}$$

также зависящее от конкретного p.

Подставим в формулу (67) значение ρ, найденное в (68), и значение a, указанное в (70). Получим нужную оценку (66). Константа $C > 0$ в формуле (66) зависит, разумеется, от выбора $p \in (1, 2)$.

Теперь можем оценить интересующую нас функцию $u(x,t)$. Комбинируя соотношения (65) и (66), имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{C}{D} \exp\left(\frac{x^2}{2D}\right)^{\frac{1}{2-p}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{71}$$

Сформулируем окончательный результат в следующей форме.

Теорема 6. *При фиксированном значении* $p \in (1, 2)$ *выберем отличную от тождественного нуля функцию* $\gamma \in C^\infty[0, T]$, *удовлетворяющую условиям* (54), (58). *Тогда пара*

$$\begin{cases} u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, \gamma^{(k)}(t)\, x^{2k}, \\ f(x) \equiv 0 \end{cases} \tag{72}$$

даёт нетривиальное решение однородной обратной задачи (5).

При этом функция $u(x,t)$ *из формулы* (72) *удовлетворяет требованию* (51) *и всем соотношениям* (52). *Для неё не может быть верна никакая оценка* (60), *но выполнено соотношение*

$$|u(x,t)| \leqslant Me^{b|x|^q}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{73}$$

с некоторой константой $M > 0$, *зависящей от выбора* $p \in (1,2)$, *и величинами*

$$b = (2D)^{-\frac{1}{2-p}}, \qquad q = \frac{2}{2-p}, \tag{74}$$

где число $D > 0$ *определено формулой* (57).

Полное доказательство теоремы 6 дают предыдущие рассуждения настоящего пункта. Оценка (73) с величинами (74) есть просто другая запись для (71).

Между прочим, из формулы (74) для показателя q видно, что $2 < q < \infty$ при любом $p \in (1,2)$ и одновременно значение q можно сделать сколь угодно близким к 2, выбирая параметр p близким к 1. Это означает, что оценка (60), гарантирующая единственность решения задачи Коши (61), является предельной, точнее, при замене (60) на (73) с любым фиксированным значением $q > 2$ единственность решения в задаче (61) будет утрачена. Отмеченное соображение также восходит к работе [1], где оценки вида (73) извлекались из соответствующей формулы (59) прямым (довольно сложным) способом без апелляции к теории целых функций. На наш взгляд, использование упомянутой теории даёт определённые преимущества.

Отдельный интерес представляет попутно возникшая задача об оценках целой функции $F(z)$ из формулы (63). Базовое неравенство (66) несколько грубовато. Желательно установить истинное поведение $F(z)$ вдоль вещественной положительной полуоси — там, где эта функция имеет максимальный рост. Из обсуждений с А. Ю. Поповым и В. Б. Шерстюковым выяснилось, что получение точного результата требует определённых усилий и довольно серьёзной аналитической техники. Как указал нам В. Б. Шерстюков, поставленную задачу решает функция сравнения

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{(2\pi)^p}{2(2-p)}}\, \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{p}{2(2-p)}} \exp\left((2-p)\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2-p}}\right), \qquad x > 0, \tag{75}$$

с тем же значением p, что и функция $F(z)$ в формуле (63). Утверждается, что

$$F(x) \sim \Phi(x), \qquad x \to +\infty. \tag{76}$$

Точнее, для любого $p \in (1,2)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует значение $x_0 > 0$, зависящее от p и ε, такое, что

$$(1-\varepsilon)\,\Phi(x) < F(x) < (1+\varepsilon)\,\Phi(x), \qquad x \geqslant x_0 = x_0(p,\varepsilon). \tag{77}$$

Функция (75) согласована со значениями ρ и σ, найденными в формулах (68) и (69) соответственно. Асимптотику (76) можно, скорее всего, распространить на все значения $p \in (-\infty, 2)$ с дополнительной конкретизацией деталей в (77).

Указанные результаты представляют интерес «сами по себе» с точки зрения теории функций. Но ставить вопрос об уточнении оценок для функции $u(x,t)$ вряд ли целесообразно. Во-первых, соотношение (73) с величинами (74) в целом отражает принципиальную сторону дела. Во-вторых, при выводе (73) происходит несколько последовательных загрублений, часть из которых трудноустранима. И, наконец, в-третьих, для $|u(x,t)|$ всякую полученную оценку сверху будет довольно сложно подкрепить соответствующей оценкой снизу.

Дело в том, что, согласно классической теореме Уиддера [16] (см. теорему 2.2 на с. 134 в [17]), любое нетривиальное решение $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$ задачи Коши (61) не может сохранять знак в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$, т. е. фактически обязано осциллировать по x хотя бы при некоторых $t \in [0,T]$. Для такого решения оценить снизу величину $|u(x,t)|$ крайне проблематично. Не углубляясь в дальнейшие подробности, отметим, что моделирование решений, указанных в теореме 6, весьма непросто даже с привлечением современных компьютерных средств, а поведение функции $u(x,t)$ в полосе $\mathbb{R} \times [0,T]$ отличается удивительными особенностями.

Завершим данный раздел дополнительной исторической справкой. Общие разложения вида (59), а точнее, вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, \gamma_0^{(k)}(t)\, x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, \gamma_1^{(k)}(t)\, x^{2k+1}, \tag{78}$$

где

$$\gamma_0(t) = u(0,t), \qquad \gamma_1(t) = u_x(0,t), \tag{79}$$

рассматривались сначала для аналитических решений одномерного уравнения теплопроводности (см., например, книгу Гурса [18, § 471, 541] или ранние работы Хольмгрена [19; 20]). Затем тот же Хольмгрен связал в [21] вопрос единственности решения в задаче Коши с проблемой квазианалитичности. Логика событий вполне объяснима: именно тогда теория квазианалитических функций переживала своё бурное развитие [11]. Через некоторое время А. Н. Тихонов [1] привёл свой знаменитый пример неединственности вида (78) с неквазианалитическими функциями $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ в условиях (79). Этот цикл исследований в определённом смысле завершил Тэклинд [22], указавший точную «квазианалитическую» границу между единственностью и неединственностью решения в задаче Коши (61). Совсем другой подход к построению нетривиальных решений в той же задаче Коши предложили Розенблюм и Уиддер [23]. Их метод связан с интегральными преобразованиями.

Применительно к обратным задачам идея примера А. Н. Тихонова [1] была впервые использована в [24] для целей, отличных от целей настоящей работы. Затем стало ясно, что подобные конструкции обладают удобной универсальностью — к ним можно обращаться по разным поводам, когда изучение неклассических задач происходит при минимальных ограничениях, допускающих неожиданные «патологии» (см. [6; 25; 26]).

Список литературы

1. **Tychonoff, A.** Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur / A. Tychonoff // Мат. сб. — 1935. — Т. 42, № 2. — С. 199–216.
2. **Тихонов, А. Н.** Собрание научных трудов : в 10 т. Т. II. Математика. Ч. 2. Вычислительная математика, 1956–1979. Математическая физика, 1933–1948 / А. Н. Тихонов ; ред.-сост. Т. А. Сушкевич, А. В. Гулин. — М. : Наука, 2009. — 590 с.
3. **Тихонов, И. В.** Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 1132–1133.
4. **Тихонов, И. В.** Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 133–166.
5. **Попов, А. Ю.** Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Докл. Акад. наук. — 2003. — Т. 389, № 4. — С. 465–467.

6. **Попов, А. Ю.** Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 396–405.
7. **Попов, А. Ю.** Разрешимость задачи теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Докл. Акад. наук. — 2004. — Т. 398, № 6. — С. 738–742.
8. **Попов, А. Ю.** Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А. Ю. Попов, И. В. Тихонов // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 9. — С. 71–102.
9. **Денисов, А. М.** Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. — М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1994. — 208 с.
10. **Prilepko, A. I.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — N.Y., Basel : Marcel Dekker, 2000. — xiii+709 p.
11. **Carleman, T.** Les fonctions quasi analytiques. Leçons professées au Collége de France (Collection de monographies sur la théoriedes fonctions publiée sous la direction de m. Émile Borel) / T. Carleman. — Paris : Gauthier-Villars, 1926. — 116 p.
12. **Мандельбройт, С.** Квазианалитические классы функций / С. Мандельбройт. — Л.–М. : ОНТИ, 1937. — 108 с.
13. **Хёрмандер, Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Л. Хёрмандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.
14. **Михайлов, В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983. — 424 с.
15. **Леонтьев А. Ф.** Целые функции. Ряды экспонент / А. Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1983. — 176 с.
16. **Widder, D. V.** Positive temperatures on an infinite rod / D. V. Widder // Trans. Amer. Math. Soc. — 1944. — Vol. 55, no. 1. — P. 85–95.
17. **Widder, D. V.** The heat equation / D. V. Widder. — N.Y., San Francisco, London : Academic Press, 1975. — xvi+267 p.
18. **Гурса, Э.** Курс математического анализа. Том третий. Часть I. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными / Э. Гурса. — М.–Л. : ГТТИ, 1933. — 276 с.
19. **Holmgren, E.** Sur l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ / E. Holmgren // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. — 1907. — Vol. 145. — P. 1401–1403.
20. **Holmgren, E.** Sur l'équation de la propagation de la chaleur / E. Holmgren // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. — 1908. — Vol. 4, no. 14. — P. 1–11.
21. **Holmgren, E.** Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur / E. Holmgren // Arkiv för matematik, astronomi och fysik. — 1924. — Vol. 18, no. 9. — P. 1–9.
22. **Täcklind, S.** Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique / S. Täcklind // Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser. IV. — 1936. — Vol. 10, no. 3. — P. 1–57.
23. **Rosenbloom, P. C.** A temperature function which vanishes initially / P. C. Rosenbloom, D. V. Widder // The American Mathematical Monthly. — 1958. — Vol. 65, no. 8. — P. 607–609.
24. **Тихонов, И. В.** Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения / И. В. Тихонов // Интеграл. преобразования и спец. функции : информ. бюл. — 2001. — Т. 2, № 1. — С. 119–128.

25. **Тихонов, И. В.** Структурные свойства нуль-решений абстрактной задачи Коши / И. В. Тихонов // Интеграл. преобразования и спец. функции : информ. бюл. — 2002. — Т. 3, № 1. — С. 22–38.
26. **Тихонов, И. В.** Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 2. — С. 273–290.

Поступила в редакцию 17.09.2016
После переработки 29.09.2016

Сведения об авторах

Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: ivtikh@mail.ru.

Гаврись Юлия Васильевна, студентка математического факультета, Московский государственный педагогический университет, Москва, Россия; e-mail: yvgavris@mail.ru.

Аджиева Татьяна Загировна, магистрант факультета ВМК, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; e-mail: adzhievatz@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 3. P. 37–62.

STRUCTURE OF SOLUTIONS OF MODEL INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION IN CLASSES OF EXPONENTIAL GROWTH FUNCTIONS

I.V. Tikhonov[1,a], **Yu.V. Gavris'**[2,b], **T.Z. Adzhieva**[1,c]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia*
[a] *ivtikh@mail.ru;* [b] *yvgavris@mail.ru;* [c] *adzhievatz@gmail.com*

Model inverse problem of finding the inhomogeneous term of the one-dimensional heat equation is considered. The research is performed in classes of exponential growth functions. The condition of uniqueness of solution is established. It is shown that in case of breakdown of this condition any non-trivial solution of exponential growth can be represented as a linear combination of elementary solutions. Examples of special solutions with superexponential growth are given.

Keywords: *inverse problem, heat equation, exponential growth functions.*

References

1. **Tychonov A.N.** Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur. *Recueil Mathématique*, 1935, vol. 42, no. 2, pp. 199–216.
2. **Tychonov A.N.** *Sobranie nauchnykh trudov v 10 t. T. II. Matematika. Ch. 2. Vychislitel'naya matematika, 1956–1979. Matematicheskaya fizika, 1933–1948* [Collection of science works in 10 vol. Vol. II. Mathematics. Pt. 2. Computational mathematics, 1956–1979. Mathematical physics, 1933–1948], ed. by T.A. Sushkevich, A.V. Gulin. Moscow, Nauka Publ., 2009. (In Russ.).

3. **Tikhonov I.V., Eydelman Yu.S.** The unique solvability of a two-point inverse problem for an abstract differential equation with an unknown parameter. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1256–1258.
4. **Tikhonov I.V.** Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 333–363.
5. **Popov A.Yu., Tikhonov I.V.** Exponential classes of uniqueness in heat conduction problems, *Doklady Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 234–236.
6. **Popov A.Yu., Tikhonov I.V.** Uniqueness classes in a time-nonlocal problem for the heat equation and complex eigenfunctions of the Laplace operator. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 3, pp. 428–437.
7. **Popov A.Yu., Tikhonov I.V.** Razreshimost' zadachi teploprovodnosti s nelokal'nym usloviem srednego po vremeni. [Solubility of a problem of heat conduction with a non-local condition for the time averages]. *Doklady Akademii Nauk* [Reports of the Academy of Science], 2004, vol. 398, no. 6, pp. 738–742. (In Russ.).
8. **Popov A.Yu., Tikhonov I.V.** Exponential solubility classes in a problem for the heat equation with a non-local condition for the time averages. *Sbornik: Mathematics*, 2005, vol. 196, no. 9, pp. 1319–1348.
9. **Denisov A.M.** *Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach.* [Introduction into theory of inverse problems]. Moscow, MSU Publ., 1994. 208 p. (In Russ.).
10. **Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** *Methods for solving inverse problems in mathematical physics.* N.Y., Basel, Marcel Dekker, 2000. xiii+709 p.
11. **Carleman T.** *Les fonctions quasi analytiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1926. 116 p.
12. **Mandel'broyt S.** *Kvazianaliticheskiye klassy funktsiy* [Quasianalytic classes of functions]. Leningrad—Moscow, ONTI Publ., 1937. 108 p. (In Russ.).
13. **Hörmander L.** *The analysis of linear partial differential operators I, Distribution theory and Fourier analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 256. Berlin, Heidelberg, N.Y., Tokyo, Springer-Verlag, 1983. ix+391 p.
14. **Mikhailov V.P.** *Partial differential equations.* Moscow, Mir Publ., 1978, 396 p.
15. **Leont'yev A.F.** *Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire functions. Series of exponents]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 176 p. (In Russ.).
16. **Widder D.V.** Positive temperatures on an infinite rod. *Transactions of American Mathematical Society*, 1944, vol. 55, no. 1, pp. 85–95.
17. **Widder D.V.** *The heat equation.* NY, San Francisco, London, Academic Press, 1975, xvi+267 p.
18. **Goursat E.** *Cours d'Analyse mathématique. Tome III. Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du seconde ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* Troisième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1923.
19. **Holmgren E.** Sur l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1907, vol. 145, pp. 1401–1403.
20. **Holmgren E.** Sur l'équation de la propagation de la chaleur. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 1908, vol. 4, no. 14, pp. 1–11.
21. **Holmgren E.** Sur les solutions quasianalytiques de l'équation de la chaleur. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 1924, vol. 18, no. 9, pp. 1–9.
22. **Täcklind S.** Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux dérivées partielles du type parabolique. *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis*, ser. IV, 1936, vol. 10, no. 3, pp. 1–57.
23. **Rosenbloom P.C., Widder D.V.** A temperature function which vanishes initially. *American Mathematics Monthly*, 1958, vol. 65, no. 8, pp. 607–609.
24. **Tikhonov I.V.** Soobrazheniya monotonnosti v obratnoy zadache dlya abstraktnogo differentsial'nogo uravneniya [Concepts of monotoneness in inverse problem for abstract differential equation]. *Integral'nye preobrazovaniya i spetsial'nye funktsii* [Integral transformations and special functions], 2001, vol. 2, no. 1, pp. 119–128. (In Russ.).

25. **Tikhonov I.V.** Strukturnye svoystva nul'-resheniy abstraktnoy zadachi Koshi [Structural properties of null-solutions of abstract Cauchy problem]. *Integral'nye preobrazovaniya i spetsial'nye funktsii* [Integral transformations and special functions], 2002, vol. 3, no. 1, pp. 22–38. (In Russ.).
26. **Tikhonov I.V., Eydelman Yu.S.** Uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with nonstationary inhomogeneous term. *Mathematical Notes*, 2005, vol. 77, no. 1, pp. 246–262.

Accepted article received 17.09.2016
Corrections received 29.09.2016