Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 1. С. 34–41.

УДК 517.9+519.62+621.396 DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16103

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОГО ПОГРУЖАТЕЛЯ

Д. В. Костин[1,2,a], **Т. И. Костина**[2,3,b], **А. В. Журба**[1,c], **А. С. Мызников**[1,2,d]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия*
[3] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*
[a] *dvk605@mail.ru,* [b] *tata_sti@rambler.ru,* [c] *av.zhurba.93@gmail.com,* [d] *a.s.myznikov@ya.ru*

Описана математическая модель работы сваевдавливающего вибропогружателя, в основе которой лежит воздействие на погружаемый элемент в форме импульса Максвелла — Фейера. Данный импульс обладает рядом свойств, главным из которых является оптимальность в смысле коэффициента асимметрии. Исследована разрешимость полученной модели, представляющей собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Представление решения соответствует известному принципу разделения в сумму медленного и быстрого движений. Выписываются собственные функции, с помощью которых можно построить приближённые решения методом Галёркина. Данный алгоритм позволяет проводить численные эксперименты для определения оптимальных параметров и характеристик исследуемых устройств.

Ключевые слова: *математическое моделирование, метод Галёркина, сваевдавливающий вибропогружатель, импульсный погружатель, коэффициент асимметрии.*

1. Постановка задачи

Как известно, область возможных приложений вибромеханики [1] включает в себя моделирование процессов погружения свай, шпунтов, оболочек и пр. Как правило, в большинстве случаев сваи устанавливаются либо ударным методом, при котором опора с силой вбивается в грунт, либо же методом лидерного бурения, предусматривающим проделывание предварительного отверстия в земле. Однако если фундамент монтируется вблизи уже эксплуатируемых зданий или окружающие сооружения могут пострадать в результате сильных ударных воздействий, то от забивки с использованием молотов приходится отказаться. Альтернативой в данном случае становится вибропогружатель свай.

Вибрационным погружением называют проникновение (по вертикали вниз) твёрдого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил. Под *вибрационным внедрением* понимается внедрение твёрдого тела в сопротивляющуюся среду с фиксированной *средней скоростью*. Описание некоторых динамических моделей простейших вибропогружений свай можно найти в [1; 2]. В большинстве имеющейся литературы по данной теме рассматриваются, как правило, моногармонические генераторы вибровозбуждения и, в отдельных случаях, бигармонические генераторы. В настоящей статье предполагается, что погружаемый элемент (свая) жёстко присоединён к вибровозбудителю, генерирующему

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009).

полигармоническую (n-гармоническую) вынуждающую силу по закону

$$q = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(\omega\, kt)\,.$$

Выбору коэффициента асимметрии и вычислениям *оптимального набора коэффициентов* λ_k посвящены работы [3–5]. Характерный график силы, представляющий собой импульс Максвелла — Фейера, позволил дать определение такому типу изделий — *импульсный погружатель*.

В настоящей работе будут рассмотрены модель работы сваевдавливающей машины типа импульсного погружателя и модель грунта, в который свая погружается. С целью изучения закономерностей работы погружателя примем следующее соглашение: для силы сопротивления F (при движении сваи) выполняется представление (см. [1; 2; 6])

$$F = -P + \sigma\, s(\dot{x}) + f(\dot{x})\, x\,, \qquad \text{где} \ \ f(\dot{x}) = k_0 + k_1\, \dot{x}\,.$$

Здесь $x = x(t)$ — глубина погружения, $\dot{x}$ — скорость погружения, t — время, P — вес сваи (свайного агрегата), k_0 — суммарный коэффицент сопротивления и сухого трения на боковой поверхности сваи, k_1 — коэффицент вязкого трения на боковой поверхности сваи, σ — коэффицент лобового сопротивления на торце сваи. Функция $s(\dot{x})$ равна 1, если $\dot{x} > 0$, и равна 0 в противном случае. В таком случае модельное дифференциальное уравнение вибропогружения принимает следующий вид:

$$\ddot{x} + \sigma\, s(\dot{x}) + f(\dot{x})\, x + q = P\,. \tag{1}$$

Слагаемое $q = q(t)$ представляет оптимизированный виброимпульс (действующий на сваю) [5]. Задача состоит в получении приближённой формулы решения уравнения (1) и в изучении свойств этого решения. В качестве граничных условий естественно предположить нулевое значение скорости движения сваи и значение начальной глубины погружения:

$$\dot{x}(0) = 0\,,\ x(0) = a \geq 0\,. \tag{2}$$

В случае свай малого сечения можно пренебречь лобовым сопротивлением на торце, положив $\sigma = 0$. Тогда получим уравнение

$$\ddot{x} + f(\dot{x})\, x + q = P\,. \tag{3}$$

В качестве первого шага исследования будем искать решение уравнения (3) в виде

$$x(t) = y(t) + u(t)\,, \tag{4}$$

где $y(t)$, $u(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, при этом функция $u(t)$ является $\frac{2\pi}{\omega}$-периодической с нулевым средним. Или (что равносильно) $u(t) = \psi(\omega t)$, где $\psi(\tau)$ — 2π-периодическая функция с нулевым средним:

$$[\psi] := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\tau)\, d\tau = 0\,.$$

Ниже функция $\psi(\tau)$ будет использована в процедуре построении приближённого решения второго уравнения представленной ниже системы (5).

Разложение (4) соответствует известному принципу разделения в сумму медленного и быстрого движений [1]. Переменная τ при этом называется быстрым временем. Посредством разложения (4) уравнение (3) разбивается в систему двух уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{y} + k_0 y + k_1(\dot{y}y + \dot{y}u + y\dot{u}) & = & P\,, \\ \ddot{u} + k_0 u + k_1 \dot{u}u + q(\omega t) & = & 0\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Для первого уравнения этой системы сохраняются граничные условия (2). Из разложения (4) следует, что $\dot{y}(0) = -\dot{u}(0)$. Заметим также, что при $k_0 \neq 0$ равенство $[u] = 0$ автоматически выполняется, если u — произвольное решение второго уравнения системы (5) периода $\frac{2\pi}{\omega}$. Так как $\dot{u} = \omega\,\frac{d\psi}{d\tau}$, $\ddot{u} = \omega^2\frac{d^2\psi}{d\tau^2}$, то второе уравнение этой системы можно записать в виде

$$\omega^2\,\frac{d^2\psi}{d\tau^2} +\, k_0\psi + \omega\, k_1\dot{\psi}\psi + q(\tau) = 0$$

или

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \kappa_0\psi + \kappa_1\,\dot{\psi}\psi + \theta(\tau) = 0\,, \tag{6}$$

$$\kappa_0 = \frac{k_0}{\omega^2}\,,\ \kappa_1 = \frac{k_1}{\omega}\,,\ \theta(\tau) = \frac{q(\tau)}{\omega^2}\,.$$

Приближённое построение периодического решения уравнения (6) и решения системы уравнений (5) можно осуществить на основе метода Галёркина [7].

2. Применение метода Галёркина к уравнению быстрого движения

Рассмотрим порождённое уравнением (6) отображение

$$g : E \longrightarrow F\,, \qquad g(\psi) := \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \kappa_0\psi + \kappa_1\,\dot{\psi}\psi + \theta(\tau) = 0\,, \tag{7}$$

где E — банахово пространство функций $\psi(\tau)$ класса C^2, 2π-периодических, с нулевым средним, а F — банахово пространство непрерывных функций, 2π-периодических и с нулевым средним.

Теорема 1. *Отображение, заданное соотношением* (7)*, является (нелинейным) фредгольмовым оператором нулевого индекса*[1]*.*

Доказательство фредгольмовости вытекает из того, что слагаемое $-\ddot{u}$ представляет собой обратимый оператор $E \longrightarrow F$, а совокупность остальных слагаемых задаёт набор вполне непрерывных операторов (вследствие простейших теорем теории ОДУ и функционального анализа [7; 8]).

Известно, что фредгольмовость операторного уравнения позволяет при построении приближённых решений применять метод Галёркина [7], [9] и его нелинейные обобщения в виде методов Ляпунова — Шмидта, Каччиополи и др. [7–10]. В соответствии со схемой Галёркина необходимо сначала обратиться к системе собственных функций главной линейной части уравнения — оператора $-\frac{d^2}{d\tau^2}$ (при периодическом

[1]Непрерывный линейный оператор $A\ : E \to F$ (в паре банаховых пространств E, F) является фредгольмовым нулевого индекса, если $A = T + K$, где T — обратимый оператор, а K — вполне непрерывный (компактный). Гладкий нелинейный оператор называется фредгольмовым, если в каждой точке области определения его производная Фреше — линейный фредгольмов оператор [7; 8].

краевом условии и условии обнуления среднего значения). Получим набор функций (мод вибрации) $e_j = \sqrt{2}\cos(j\tau)$, $j = 1, 2, \ldots$. Число $\sqrt{2}$ здесь является нормирующим множителем в $H = L_2[0, 2\pi]$ (в пространстве функций с суммируемым квадратом на числовом отрезке $[0, 2\pi]$). Затем делается переход к конечномерной системе Галёркина, состоящей из аппроксимирующих уравнений:

$$\begin{cases} \langle G(\psi,\phi)\,,e_1\rangle &= \langle G(\psi,\phi)\,,e_2\rangle &= \cdots = &\langle G(\psi,\phi)\,,e_n\rangle = 0\,,\\ \langle G(\psi,\phi)\,,s_1\rangle &= \langle G(\psi,\phi)\,,s_2\rangle &= \cdots = &\langle G(\psi,\phi)\,,s_n\rangle = 0\,, \end{cases}$$

где $s_k = \sqrt{2}\,\sin(k\,\tau)\,,$

$$G(\psi,\phi) := g(\psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \cdots + \psi_n e_n + \varphi_1 s_1 + \varphi_2 s_2 + \cdots + \varphi_n s_n)\,,$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)\,.$$

Здесь $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} uv\,dt$ — скалярное произведение в $H = L_2[0, 2\pi]$.

Рассмотрим 3-модовый тригонометрический полином

$$\theta = \mu\sqrt{2}(3\cos(\tau) + 2\cos(2\tau) + \cos(3\tau)) = \mu\,(3e_1 + 2e_2 + e_3)\,,$$

$e_j = \sqrt{2}\,\cos(j\tau)$, $j \in \mathbb{N}$, в качестве функции, генерирующей виброимпульс. Параметр μ (амплитуда импульса) рассматривается как показатель мощности виброимпульса. Следуя схеме Галёркина, будем искать периодическую компоненту решения в виде $\psi(\tau) = \psi_1 e_1 + \psi_2 e_2 + \psi_3 e_3 + \varphi_1 s_1 + \varphi_2 s_2 + \varphi_3 s_3$. Система аппроксимирующих уравнений Галёркина, отвечающая уравнению (6), выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \langle G(\psi,\varphi)\,,e_1\rangle &= \langle G(\psi,\varphi)\,,e_2\rangle &= \langle G(\psi,\varphi)\,,e_3\rangle = 0\,,\\ \langle G(\psi,\varphi)\,,s_1\rangle &= \langle G(\psi,\varphi)\,,s_2\rangle &= \langle G(\psi,\varphi)\,,s_3\rangle = 0\,. \end{cases}$$

Здесь $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} uv\,dt$ — скалярное произведение в H. Компьютерные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} (\kappa_0-1)\psi_1 + \frac{\kappa_1\sqrt{2}}{2}(\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1 + \psi_2\varphi_3 - \psi_3\varphi_2) + \mu &= 0,\\ 2(\kappa_0-2)\psi_2 + \kappa_1\sqrt{2}(\psi_1\varphi_1 + \psi_1\varphi_3 - \psi_3\varphi_1) + 2\mu &= 0,\\ (\kappa_0-3)\psi_3 + \frac{\kappa_1}{2}\sqrt{2}(\psi_2\varphi_1 + \varphi_2\psi_1) + \mu &= 0,\\ (\kappa_0-1)\varphi_1 - \frac{\kappa_1}{2}\sqrt{2}(\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_3 + \varphi_2\varphi_3) &= 0,\\ 2(\kappa_0-2)\varphi_2 - \frac{\kappa_1}{2}\sqrt{2}(\psi_1^2 - \varphi_1^2 + 2(\varphi_1\varphi_3 + \psi_1\psi_3)) &= 0,\\ (\kappa_0-3)\varphi_3 - \frac{\kappa_1}{2}\sqrt{2}(\psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2) &= 0. \end{cases} \tag{8}$$

Напомним, что искомые величины суть φ_j, ψ_k, а величины κ_0, κ_1, μ — управляющие параметры. В системе уравнений (8) можно исключить переменные ψ_3, φ_3 — в силу третьего и шестого уравнений этой системы. В результате получим систему четырёх кубических полиномиальных уравнений относительно четырёх переменных.

Пусть далее

$$\begin{aligned} g_1(\psi,\varphi) &:= \psi_1 + \frac{\kappa_1}{\sqrt{2}(\kappa_0-1)}\,(\psi_1\varphi_2 - \psi_2\varphi_1) + \psi_2\varphi_3 - \psi_3\varphi_2) + \frac{\mu}{\kappa_0-1},\\ g_2(\psi,\varphi) &:= \psi_2 + \frac{\kappa_1}{\sqrt{2}(\kappa_0-2)}\,(\psi_1\varphi_3 - \psi_3\varphi_1 + \psi_1\varphi_1) + \frac{\mu}{\kappa_0-2},\\ h_1(\psi,\varphi) &:= \varphi_1 - \frac{\kappa_1}{\sqrt{2}(\kappa_0-1)}(\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_3 + \varphi_2\varphi_3),\\ h_2(\psi,\varphi) &:= \varphi_2 - \frac{\kappa_1}{2\sqrt{2}(\kappa_0-2)}(\psi_1^2 - \varphi_1^2 + 2(\psi_1\psi_3 + \varphi_1\varphi_3)). \end{aligned}$$

Тогда каждое решение системы уравнений (8) автоматически является точкой условного глобального минимума (равного нулю) функции

$$W(\psi,\varphi) = g_1^2(\psi,\varphi) + g_2^2(\psi,\varphi) + h_1^2(\psi,\varphi) + h_2^2(\psi,\varphi)$$

при условии

$$\psi_3 := \frac{\kappa_1\,(\psi_2\,\varphi_1 + \psi_1\,\varphi_2) + \frac{\mu}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,(\kappa_0 - 3)}; \quad \varphi_3 := \frac{\kappa_1\,(\psi_1\psi_2 - \varphi_1\varphi_2)}{\sqrt{2}\,(\kappa_0 - 3)}.$$

Посредством процедуры спуска в точку минимума «вдоль поля градиентов» этой функции можно достаточно эффективно вычислить приближение любого порядка точности к нулю этой функции и, следовательно, к решению системы уравнений (8).

Подставив приближённо вычисленную функцию u в первое уравнение системы (5), получим задачу Коши для ОДУ с квадратичной нелинейностью и переменными коэффициентами. Приближённое решение этого уравнение можно построить, используя стандартные вычислительные процедуры, разработанные для ОДУ [11].

3. Применение метода Галёркина к уравнению медленного движения

Обратимся далее к краевой задаче для первого уравнения системы (5) (уравнения медленного движения) на отрезке времени $[0,T]$, $T = 2\pi m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\ddot{y} + k_0 y + k_1(\dot{y}y + \dot{y}u + y\dot{u}) = P\,, \quad y(0) = a\,, \;\; \dot{y}(T) = 0\,,$$

считая функцию $u(t)$ (приближённо) вычисленной. Положив $y(t) = a + z(t)$, получим краевую задачу в более удобном виде:

$$\ddot{z} + \alpha(t)z + \beta(t)\dot{z} + k_1\dot{z}\,z = Q(t), \quad z(0) = \dot{z}(T) = 0\,, \tag{9}$$

где $\alpha(t) = k_0 + k_1\dot{u}(t)$, $\beta(t) = k_1(a + u(t))$, $Q(t) = P - k_0 a - k_1 a\dot{u}(t)$. Системой собственных функций оператора $\mathcal{A} : z \longmapsto -\ddot{z}$ при краевых условиях (9) является ортонормированное семейство функций

$$S_k(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{(2k-1)\,\pi\,t}{2T}\right)\,, \quad k = 1, 2, \,\ldots\,.$$

Им отвечают собственные значения $\mu_k = \left(\frac{(2k-1)\,\pi\,t}{2T}\right)^2$. На основе этой системы собственных функций можно построить аппроксимацию Галёркина для краевой задачи (9) и через неё получить приближённое решение этой задачи.

Список литературы

1. **Блехман И. И.** Вибрационная механика. М. : Физматлит, 1994. 400 с.
2. **Цейтлин М. Г., Верстов В. В., Азбелев Г. Г.** Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах Л. : Стройиздат, Ленинград. отд-ние, 1987.
3. **Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.** Многочлены Максвелла — Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // Докл. Акад. наук. 2012. Т. 445, № 3. С. 271–273.

4. **Ермоленко В. Н., Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.** Оптимизация полигармонического импульса // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. 2012. № 27 (286), вып. 13. С. 35–44.
5. **Костин Д. В.** Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 90–109.
6. **Дерягин Б. В.** Что такое трение? М. : Изд-во АН СССР, 1963.
7. **Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.** Приближённое решение операторных уравнений. М. : Наука, 1969.
8. **Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.** Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере — Шаудера // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, вып. 4. С. 3–54.
9. **Коротких А. С.** Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 115–127.
10. **Даринский Б. М., Сапронов Ю. И., Царев С. Л.** Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Соврем. математика. Фундамент. направления. 2004. Т. 12. С. 3–140.
11. **Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.** Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М. : Наука, 1965.

Поступила в редакцию 10.11.2020.
После переработки 03.02.2021.

Сведения об авторах

Костин Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов теории управления и оптимизации, Воронежский государственный педагогический университет; профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: dvk605@mail.ru.

Костина Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов теории управления и оптимизации, Воронежский государственный педагогический университет; доцент кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия; e-mail: tata_sti@rambler.ru.

Журба Александр Владимирович, аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: av.zhurba.93@gmail.com.

Мызников Александр Сергеевич, лаборант научно-исследовательской лаборатории математических методов теории управления и оптимизации, Воронежский государственный педагогический университет; аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия; e-mail: a.s.myznikov@ya.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2021. Vol. 6, iss. 1. P. 34–41.

DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16103

THE NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF THE IMPULSE PILE DRIVER

D.V. Kostin[1,2,a], **T.I. Kostina**[2,3,b], **A.V. Zhurba**[1,c], **A.S. Myznikov**[1,2,d]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia*
[3] *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*
[a] *dvk605@mail.ru,* [b] *tata_sti@rambler.ru,* [c] *av.zhurba.93@gmail.com,* [d] *a.s.myznikov@ya.ru*

A mathematical model of the operation of a pile-driving vibration loader, which is based on the impact on the submerged element in the form of a Maxwell — Feyer pulse, is described. This pulse has a number of properties, the main of which is optimality in the sense of the asymmetry coefficient. The solvability of the resulting model, which is a nonlinear differential equation of the second order, is investigated. The representation of the solution corresponds to the well-known principle of dividing into the sum of slow and fast movements. We write out eigenfunctions, on the basis of which we can construct approximate solutions using the Galerkin approximations. This algorithm allows us to conduct numerical experiments to determine the optimal parameters and characteristics of the devices under study.

Keywords: *mathematical modeling, Galerkin method, pile-driving vibration loader, impulse driver, asymmetry coefficient.*

References

1. **Blehman I.I.** *Vibrational Mechanics* [Nonlinear Dynamic Effects, General Approach, Applications]. Word Scientific, 2000.
2. **Tseytlin M.G., Verstov V.V., Azbelev G.G.** *Vibratsionnaya tekhnika i tekhnologiya v svaynykh i burovykh rabotakh* [Vibration engineering and technology in pile and drilling operations]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1987. (In Russ.).
3. **Kostin V.A., Kostin D.V., Sapronov Yu.I.** Maxwell — Fejer polynomials and optimization of polyharmonic impulse. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 512–514.
4. **Yermolenko V.N., Kostin V.A., Kostin D.V., Sapronov Yu.I.** Optimizatsiya poligarmonicheskogo impul'sa [Optimization of the polyharmonic pulse] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Ser.: Mathematical modeling and programming], 2012, no. 27 (286), iss. 13, pp. 35–44. (In Russ.).
5. **Kostin D.V.** Bifurcations of resonance oscillations and optimization of the trigonometric impulse by the nonsymmetry coefficient. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 12, pp. 1709–1728.
6. **Deryagin B.V.** *Chto takoe trenie?* [What is friction?]. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1963. (In Russ.).
7. **Krasnosel'skii M.A., Rutitcki Ja.B., Stecenko V.Ja., Vainikko G.M., Zabreiko P.P.** *Approximate Solutions of Operator Equations.* Groningen, Walters — Noordhoff Publ., 1972.

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state task in the field of science (topic number FZGF-2020-0009).

8. **Borisovich Yu.G., Zvyagin V.G., Sapronov Yu.I.** Non-linear Fredholm maps and the Leray-Schauder theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, no. 4, pp. 1–54.
9. **Korotkih A.S.** Bifurkatsii statsionarnykh resheniy uravneniya "reaktsiya-diffuziya" i perekhod kontsentratsiy v stabil'noye sostoyaniye [Bifurcations of stationary solutions of the reaction-diffusion equation and a transition of concentrations to a stable state]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Bulletin of Voronezh State University. Ser.: Physics. Mathematics.], 2017, no. 1, pp. 115–127. (In Russ.).
10. **Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L.** Bifurkatsii ekstremaley fredgol'movykh funktsionalov [Bifurcations of extremals of Fredholm functionals]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions], 2004, vol. 12, pp. 3–140. (In Russ.).
11. **Mikhlin S.G., Smolitskii Kh.L.** *Approximate Methods for Solution of Differential and Integral Equations*. New York, American Elsevier Publ., 1967.

Accepted article received 10.11.2020.
Corrections received 03.02.2021.