МАТЕМАТИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 3. С. 7–14.

УДК 517.957

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА — ШОУЛСА

М. М. Дышаев

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Проведена групповая классификация одного семейства уравнений теории финансовых рынков, включающего в себя в простейшем случае уравнение Блэка — Шоулса. С помощью найденной пятимерной группы преобразований эквивалентности уравнения осуществлён поиск трёхмерных основных алгебр Ли уравнения в случае двух спецификаций свободного элемента. Для каждой из алгебр найдены оптимальные системы подалгебр и соответствующие этим подалгебрам инвариантные решения или инвариантные подмодели уравнения.

Ключевые слова: *нелинейное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение Блэка — Шоулса, уравнение Сиркара — Папаниколау, уравнение Шёнбухера — Уилмотта, групповой анализ, инвариантное решение, инвариантная подмодель.*

Введение

В работе рассмотрен один класс нелинейных уравнений типа уравнения Блэка — Шоулса [1]

$$u_t + \frac{w(t,x)u_{xx}}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0 \tag{1}$$

с произвольным множителем $w(t,x)$ в главном члене. В случае когда $w(t,x) = \sigma^2x^2$, исследуемая модель относится к классу моделей Сиркара — Папаниколау [2] и Шёнбухера — Уилмотта [3]

$$u_t + \frac{\sigma^2x^2u_{xx}}{2\left(1-v(u_x)xu_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \tag{2}$$

разработанных на основании модели Блэка — Шоулса для того, чтобы учесть эффекты обратной связи, возникающие при хеджировании на рынке базового актива купленных или проданных производных финансовых инструментов, таких, например, как опционы.

Отметим, что начало исследованиям уравнений теории финансовых рынков методами группового анализа [4] положили Р. К. Газизов и Н. Х. Ибрагимов, исследовавшие в своей работе уравнение Блэка — Шоулса [5]. Симметрийный анализ уравнения (2) при $r = 0$ проводился в работах [6; 7].

В данной работе найдены группы преобразований эквивалентности уравнения (1). С их помощью удалось показать, что для двух спецификаций свободного элемента w уравнение имеет трёхмерную основную алгебру Ли, а в случаях, не приводимых к указанным преобразованиями эквивалентности, основная алгебра Ли двумерная. Отмечено, что частному случаю модели (2) соответствует один из случаев трёхмерной алгебры Ли уравнения (1). Осуществлён поиск инвариантных решений и подмоделей уравнения (1) при различных спецификациях свободного элемента.

1. Группы преобразований эквивалентности

Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{wu_{xx}}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0. \tag{3}$$

Для нахождения спецификаций функции $w = w(t,x)$ и постоянной β, при которых появляются дополнительные к задаваемым ядром главных алгебр Ли симметрии уравнения (3), найдём непрерывную группу преобразований эквивалентности этого уравнения. Для этого далее считаем, что w, β — это дополнительные переменные, зависящие от переменных t, x, u. Генераторы непрерывной группы преобразований эквивалентности будем искать в виде $Y = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u + \mu\partial_\beta + \nu\partial_w$, где функции τ, ξ, η зависят от t, x, u, а функции μ и ν — от t, x, u, β, w. Здесь и далее для краткости используется запись $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ и т. п. Дополним уравнение (3) уравнениями

$$\beta_t = 0, \quad \beta_x = 0, \quad \beta_u = 0, \quad w_u = 0, \tag{4}$$

означающими, что в исходной постановке задачи β является константой, а w зависит только от t, x.

Будем рассматривать систему (3), (4) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на левую часть системы (3), (4) продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\partial_{u_t} + \varphi^x\partial_{u_x} + \varphi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \mu^t\partial_{\beta_t} + \mu^x\partial_{\beta_x} + \mu^u\partial_{\beta_u} + \nu^u\partial_{w_u},$$

сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим уравнения

$$\varphi^t + \frac{\beta w u_{xx}^2 \xi}{\left(1-\beta x u_{xx}\right)^3} + \frac{w(1+\beta x u_{xx})\varphi^{xx}}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^3} + \frac{u_{xx}\nu}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^2} + \frac{w x u_{xx}^2 \mu}{\left(1-\beta x u_{xx}\right)^3} +$$

$$+ r(u_x\xi + x\varphi^x - \eta)\Big|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{5}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^u|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \nu^u|_{\mathfrak{N}} = 0.$$

По формулам продолжения на $\mathfrak{N}$, т. е. с учётом равенств (3), (4),

$$\widetilde{D}_t = \partial_t + w_t\partial_w + w_{tt}\partial_{w_t} + w_{tx}\partial_{w_x} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_x = \partial_x + w_x\partial_w + w_{tx}\partial_{w_t} + w_{xx}\partial_{w_x} + \ldots, \quad \widetilde{D}_u = \partial_u.$$

Тогда

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = \mu_t + w_t\mu_w = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = \mu_x + w_x\mu_w = 0, \quad \mu^u|_{\mathfrak{N}} = \mu_u = 0, \tag{6}$$

$$\nu^u|_{\mathfrak{N}} = \nu_u - w_t\tau_u - w_x\xi_u = 0. \tag{7}$$

В силу равенства

$$\varphi^{xx} = \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_t\tau_{xx} - 2u_t u_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t {u_x}^2\tau_{uu} -$$

$$- 2u_x u_{tx}\tau_u - u_t u_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_x u_{xx}\xi_u$$

перепишем уравнение (5) в виде

$$\eta_t + u_t\eta_u - u_t\tau_t - u_t^2\tau_u - u_x\xi_t - u_tu_x\xi_u + \frac{1}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^3}\big(2\beta wu_{xx}^2\xi + 2xwu_{xx}^2\mu +$$
$$+ u_{xx}\nu - \beta xu_{xx}^2\nu + w(1+\beta xu_{xx})(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u -$$
$$- u_t\tau_{xx} - 2u_tu_x\tau_{xu} - 2u_{tx}\tau_x - u_t{u_x}^2\tau_{uu} - 2u_xu_{tx}\tau_u -$$
$$- u_tu_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u)\big) +$$
$$+ ru_x\xi + rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_t\tau_x - u_tu_x\tau_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta|_{\mathfrak{N}} =$$
$$= \eta_t + \frac{wu_{xx}(\tau_t - \eta_u)}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)(\tau_t - \eta_u) - \frac{w^2u_{xx}^2\tau_u}{4\left(1-\beta xu_{xx}\right)^4} -$$
$$-(rxu_x - ru)^2\tau_u - \frac{wu_{xx}(rxu_x - ru)\tau_u}{\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} - u_x\xi_t +$$
$$+ \frac{wu_xu_{xx}\xi_u}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)u_x\xi_u + \frac{1}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^3}\big(2\beta wu_{xx}^2\xi + 2xwu_{xx}^2\mu +$$
$$+ u_{xx}\nu - \beta xu_{xx}^2\nu + w(1+\beta xu_{xx})\big(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u +$$
$$+ \frac{wu_{xx}\tau_{xx}}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)\tau_{xx} + \frac{wu_xu_{xx}\tau_{xu}}{\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + 2(rxu_x - ru)u_x\tau_{xu} -$$
$$- 2u_{tx}\tau_x + \frac{wu_x^2u_{xx}\tau_{uu}}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)u_x^2\tau_{uu} - 2u_xu_{tx}\tau_u + \frac{wu_{xx}^2\tau_u}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} +$$
$$+ (rxu_x - ru)u_{xx}\tau_u - u_x\xi_{xx} - 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u)\big) +$$
$$+ ru_x\xi + rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta +$$
$$+ \frac{rxwu_{xx}(\tau_x + u_x\tau_u)}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + rx(rxu_x - ru)(\tau_x + u_x\tau_u) = 0. \tag{8}$$

Продифференцируем последнее уравнение по u_{tx} и получим $w(1 + \beta xu_{xx})(\tau_x + u_x\tau_u) = 0$, следовательно, $\tau = \tau(t)$ при $w \neq 0$. Поэтому уравнения (7), (8) примут вид

$$\nu_u - w_x\xi_u = 0, \tag{9}$$

$$\eta_t + \frac{wu_{xx}(\tau' - \eta_u)}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)(\tau' - \eta_u) - u_x\xi_t +$$
$$+ \frac{wu_xu_{xx}\xi_u}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + (rxu_x - ru)u_x\xi_u + \frac{1}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^3}\big(2\beta wu_{xx}^2\xi + 2xwu_{xx}^2\mu +$$
$$+ u_{xx}\nu - \beta xu_{xx}^2\nu + w(1+\beta xu_{xx})\big(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} -$$
$$- 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_xu_{xx}\xi_u)\big) + ru_x\xi +$$
$$+ rx(\eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi_x - u_x^2\xi_u) - r\eta = 0.$$

Последнее уравнение умножим на $2(1 - \beta xu_{xx})^3$, тогда

$$2(1-\beta xu_{xx})^3(\eta_t + (rxu_x - ru)\tau' + ru\eta_u - ruu_x\xi_u) + (1-\beta xu_{xx})wu_{xx}(\tau' - \eta_u) -$$
$$- 2(1-\beta xu_{xx})^3u_x\xi_t + (1-\beta xu_{xx})wu_xu_{xx}\xi_u + 2\beta wu_{xx}^2\xi + 2xwu_{xx}^2\mu +$$
$$+ u_{xx}\nu - \beta xu_{xx}^2\nu + w(1+\beta xu_{xx})\big(\eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + {u_x}^2\eta_{uu} + u_{xx}\eta_u - u_x\xi_{xx} -$$

$$- 2{u_x}^2\xi_{xu} - 2u_{xx}\xi_x - {u_x}^3\xi_{uu} - 3u_x u_{xx}\xi_u) +$$
$$+ 2(1-\beta x u_{xx})^3(ru_x\xi + rx(\eta_x - u_x\xi_x) - r\eta) = 0. \tag{10}$$

Это уравнение при $\beta \neq 0$ имеет при u_{xx}^3 множитель

$$\eta_t + rxu_x\tau' - ru(\tau' - \eta_u + u_x\xi_u) - u_x\xi_t + ru_x\xi + rx(\eta_x - u_x\xi_x) - r\eta,$$

который после расщепления по u_x даёт два уравнения:

$$\eta_t + rx\eta_x + ru\eta_u - r\eta - ru\tau' = 0, \tag{11}$$

$$rx\tau' - \xi_t - rx\xi_x - ru\xi_u + r\xi = 0. \tag{12}$$

Расщепление по u_x множителя при u_{xx} в нулевой степени в уравнении (10) приводит к равенствам $\xi = A(t,x)u + B(t,x)$, $\eta = A_x(t,x)u^2 + C(t,x)u + D(t,x)$ и с учётом (11), (12) — к равенствам

$$2\eta_t - 2ru\tau' + 2ru\eta_u + 2rx\eta_x - 2r\eta + w\eta_{xx} = w\eta_{xx} = 0, \tag{13}$$

$$2rx\tau' - 2ru\xi_u - 2\xi_t + 2r\xi - 2rx\xi_x - w\xi_{xx} + 2w\eta_{xu} = -w\xi_{xx} + 2w\eta_{xu} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $A_{xx} = 0$, $A(t,x) = A_1(t)x + A_0(t)$, $C(t,x) = \frac{1}{2}B_x(t,x) + E(t)$, $\xi = A_1(t)xu + A_0(t)u + B(t,x)$, $\eta = A_1(t)u^2 + \frac{1}{2}B_x(t,x)u + E(t)u + D(t,x)$. Тогда (13) влечёт равенства $B_{xxx} = 0$, $D_{xx} = 0$, $\xi = A_1(t)xu + A_0(t)u + B_2(t)x^2 + B_1(t)x + B_0(t)$, $\eta = A_1(t)u^2 + B_2(t)xu + \frac{1}{2}B_1(t)u + E(t)u + D_1(t)x + D_0(t)$.

Теперь из уравнения (12) следует, что $A_1(t) = Fe^{-rt}$, A_0 — константа, $B_2(t) = Ge^{-rt}$, $B_1(t) = r\tau(t) + H$, $B_0(t) = Je^{rt}$, $\xi = Fe^{-rt}xu + A_0u + Ge^{-rt}x^2 + r\tau(t)x + Hx + Je^{rt}$, $\eta = Fe^{-rt}u^2 + Ge^{-rt}xu + \frac{1}{2}(r\tau(t) + H)u + E(t)u + D_1(t)x + D_0(t)$.

В силу равенства (11) D_1 — константа, $D_0(t) = Ke^{rt}$, $E(t) = \frac{1}{2}r\tau(t) + P$, $\eta = Fe^{-rt}u^2 + Ge^{-rt}xu + r\tau(t)u + Pu + D_1x + Ke^{rt}$.

Приравняем коэффициент при u_{xx} в (10) к нулю и получим уравнение

$$w\tau' + \nu - 2w\xi_x - 2wu_x\xi_u + 2\beta xwu_x\eta_{xu} + \beta xwu_x^2\eta_{uu} - \beta xwu_x\xi_{xx} - 2\beta xwu_x^2\xi_{xu} = 0.$$

Подставляя в него найденные выражения для ξ, η, ν и расщепляя по переменной u_x, получим $F = A_0 = 0$, $\xi = Ge^{-rt}x^2 + r\tau(t)x + Hx + Je^{rt}$, $\eta = Ge^{-rt}xu + r\tau(t)u + Pu + D_1x + Ke^{rt}$, $\nu = (4Ge^{-rt}x + 2r\tau(t) + 2H - \tau'(t))w$. Поэтому уравнение (9) выполняется автоматически.

Аналогичные действия с коэффициентом при u_{xx}^2 в (10) приводят к уравнению

$$-\beta xw(\tau' - \eta_u) + 2\beta w\xi + 2xw\mu - \beta x\nu + \beta xw(\eta_u - 2\xi_x) = 0,$$

которое влечёт равенство $\mu = \beta\left(2Ge^{-rt}x + H - P - \frac{J}{x}e^{rt}\right)$. Поэтому $\mu_w = 0$ и в силу уравнений (6) $\mu_t = \mu_x = 0$. Следовательно, $G = J = 0$, $\xi = r\tau x + Hx$, $\eta = r\tau u + Pu + D_1x + Ke^{rt}$, $\mu = (H-P)\beta$, $\nu = (2r\tau - \tau' + 2H)w$.

В результате получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Алгебра Ли инфинитезимальных генераторов групп преобразований эквивалентности для уравнения* (3) *при ненулевых* β, w *порождается операторами*

$$Y_1 = e^{rt}\partial_u, \quad Y_2 = x\partial_u, \quad Y_3 = x\partial_x + u\partial_u + 2w\partial_w, \quad Y_4 = x\partial_x + \beta\partial_\beta + 2w\partial_w,$$

$$Y_5 = \tau(t)\partial_t + r\tau(t)x\partial_x + r\tau(t)u\partial_u + (2r\tau(t) - \tau'(t))w\partial_w.$$

Замечание 1. Легко проверить, что бесконечномерная часть алгебры Ли из теоремы 1 состоит только из операторов вида Y_5.

Следствие 1. *Ядро главных алгебр Ли уравнения* (3) *при ненулевых* β, w *имеет базис, состоящий из операторов* $X_1 = e^{rt}\partial_u$, $X_2 = x\partial_u$.

Замечание 2. Теорема 1 и следствие 1 справедливы, в частности, при $r = 0$.

2. Групповая классификация

Рассмотрим алгебру Ли проекций операторов из теоремы 1 на подпространство переменных t, x, β, w, т. е. алгебру, порождённую операторами

$$Z_1 = \beta\partial_\beta,\ Z_2 = x\partial_x + 2w\partial_w,\ Z_3 = \tau\partial_t + r\tau x\partial_x + (2r\tau - \tau')w\partial_w.$$

Она является прямой суммой подалгебр $\langle Z_1\rangle$ и $\langle Z_2, Z_3\rangle$, которые соответствуют различным функциям β и w и их различным аргументам. Поэтому подалгебры могут быть рассмотрены отдельно. При этом $Z_1(B-\beta)|_{\beta=B} = -B = 0$, это не соответствует возможным спецификациям константы β в условиях теоремы 1. Поэтому из дальнейших рассуждений подалгебру $\langle Z_1\rangle$ можно исключить.

Подалгебра $\langle Z_2, Z_3\rangle$ не содержит нетривиальных внутренних автоморфизмов, её оптимальная система одномерных подалгебр имеет вид $\Theta_1 = \{\langle Z_2\rangle, \langle bZ_2 + Z_3\rangle, b \in \mathbb{R}\}$. Тогда

$$Z_2(W(t,x) - w)|_{w=W} = xW_x - 2W = 0,$$

отсюда $W = D(t)x^2$. Далее

$$(bZ_2 + Z_3)(W(t,x) - w)|_{w=W} = \tau(t)W_t + (r\tau(t) + b)xW_x - (2r\tau(t) - \tau'(t) + 2b)W = 0,$$

$$W = \frac{e^{2rt+2b\int\frac{dt}{\tau(t)}}}{\tau(t)}\phi\left(xe^{-rt-b\int\frac{dt}{\tau(t)}}\right)$$

при произвольных функциях $\phi \neq 0$, $\tau \neq 0$.

Для каждого из базисных операторов оптимальной системы вычислим проекцию соответствующего генератора группы преобразований эквивалентности на пространство переменных t, x, u и получим дополнительную симметрию для найденной выше спецификации. Оператору Z_2 соответствует $\mathrm{pr}_{(t,x,u)}Y_3 = x\partial_x + u\partial_u$, оператору bZ_2+Z_3 — проекция $\mathrm{pr}_{(t,x,u)}(bY_3+Y_5) = \tau(t)\partial_t + (r\tau(t)+b)x\partial_x + (r\tau(t)+b)u\partial_u$. В итоге получаем следующую теорему.

Теорема 2. *При ненулевых* β, w *справедливы следующие утверждения.*

1. *Главная алгебра Ли уравнения*

$$u_t + \frac{D(t)x^2u_{xx}}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \quad D \neq 0,$$

имеет базис

$$X_1 = e^{rt}\partial_u, \quad X_2 = x\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u.$$

2. *Главная алгебра Ли уравнения*

$$u_t + \frac{T'(t)e^{2rt+2bT(t)}\phi(xe^{-rt-bT(t)})u_{xx}}{2\left(1-\beta xu_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0,\ T' \neq 0,\ \phi \neq 0,\ b \in \mathbb{R},$$

порождается операторами

$$X_1 = e^{rt}\partial_u, \quad X_2 = x\partial_u, \quad X_3 = \frac{1}{T'(t)}\partial_t + \left(\frac{r}{T'(t)} + b\right)x\partial_x + \left(\frac{r}{T'(t)} + b\right)u\partial_u.$$

Замечание 3. Теорема 2 справедлива и при $r = 0$.

3. Инвариантные решения в первом случае

Рассмотрим уравнение

$$u_t + \frac{D(t)x^2u_{xx}}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0, \tag{14}$$

алгебра Ли L_3 которого имеет базис

$$X_1 = e^{rt}\partial_u, \quad X_2 = x\partial_u, \quad X_3 = x\partial_x + u\partial_u. \tag{15}$$

Её ненулевые структурные константы есть $c_{13}^1 = 1$, $c_{31}^1 = -1$, поэтому группы внутренних автоморфизмов имеют вид $E_1 : \bar{e}^1 = e^1 + a_1e^3$, $E_3 : \bar{e}^1 = e^1e^{a_3}$. Используя их, осуществим поиск оптимальной системы одномерных подалгебр данной алгебры Ли L_3. Инфинитезимальные генераторы искомых базисных векторов для этих подалгебр операторов будут иметь вид $X = \sum\limits_{k=1}^{3} e^kX_k = (e^1, e^2, e^3)$.

1. Пусть $e^3 \neq 0$, тогда с помощью E_1 получим $e^1 = 0$, поэтому базисный вектор подалгебры имеет вид $X = (0, a, 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

2.1. При $e^3 = 0$, $e^1 \neq 0$, $e^2 \neq 0$ получим $X = (1, 1, 0)$. При этом использованы внутренние автоморфизмы E_3 и $\bar{e}^1 = -e^1$.

2.2. Остались случаи $X = (1, 0, 0)$ и $X = (0, 1, 0)$.

Лемма 1. *Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_3 с базисом* (15) *имеет вид* $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle X_2\rangle, \langle X_1 + X_2\rangle, \langle aX_2 + X_3\rangle, a \in \mathbb{R}\}$.

Используя операторы оптимальной системы, найдём инвариантные подмодели уравнения (14) и по возможности его инвариантные решения. Для подалгебр $\langle X_1\rangle$, $\langle X_2\rangle$, $\langle X_1+X_2\rangle$ инвариантами являются t и x, и поэтому инвариантных подмоделей нет. Для подалгебры $\langle aX_2 + X_3\ \rangle$ инварианты имеют вид t, $a\ln|x| - u/x$, поэтому инвариантное решение ищется в виде $u = ax\ln x + x\varphi(t)$. Подставив его в уравнение (14), получим решение

$$u = ax\ln x - artx - \frac{ax}{2(1-a\beta)^2}\int D(t)dt + Ax, \quad a \neq 1/\beta,$$

где знаком интеграла обозначена первообразная, символом A — произвольная константа интегрирования. Используя допускаемую алгебру (15), получим инвариантное относительно соответствующей группы более общее решение

$$u = ax\ln x - artx - \frac{ax}{2(1-a\beta)^2}\int D(t)dt + Ax + Be^{rt}, \quad a \neq 1/\beta.$$

Замечание 4. Заметим, что спецификация $W(t,x) = \sigma^2x^2$ соответствует моделям Шёнбухера — Уилмотта и Сиркара — Папаниколау и представляет собой частный случай рассмотренной в данном параграфе спецификации. При этом функция $D(t)$ имеет смысл волатильности, которая в данном случае зависит от t и может быть (в смысле сохранения групповой структуры уравнения) отрицательной.

4. Инвариантные решения и подмодели во втором случае

Уравнение

$$u_t + \frac{T'(t)e^{2rt+2bT(t)}\phi(xe^{-rt-bT(t)})u_{xx}}{2\left(1-\beta x u_{xx}\right)^2} + r(xu_x - u) = 0,\ T' \neq 0,\ \phi \neq 0,\ b \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

имеет алгебру Ли L_3 с базисом

$$X_1 = e^{rt}\partial_u, \quad X_2 = x\partial_u, \quad X_3 = \frac{1}{T'(t)}\partial_t + \left(\frac{r}{T'(t)} + b\right)x\partial_x + \left(\frac{r}{T'(t)} + b\right)u\partial_u. \quad (17)$$

При $b \neq 0$ группы внутренних автоморфизмов этой алгебры имеют тот же вид, что и для алгебры (15). Поэтому оптимальная система одномерных подалгебр имеет тот же вид, что и в лемме 1. Для оптимальной системы Θ_1 рассмотрим только существенный случай подалгебры $\langle aX_2 + X_3\rangle$. Её инвариантами являются $xe^{-rt-bT(t)}$, $(u - axT(t))e^{-rt-bT(t)}$. Инвариантное решение будем искать в виде $u = axT(t) + e^{rt+bT(t)}\varphi\left(xe^{-rt-bT(t)}\right)$. Его производные подставляем в (16) и получаем инвариантную подмодель

$$\frac{\phi(z)\varphi''(z)}{2(1-\beta z\varphi''(z))^2} - bz\varphi'(z) + b\varphi(z) + az = 0, \quad z = xe^{-rt-bT(t)}.$$

При $b = 0$ нетривиальных внутренних автоморфизмов алгебра (17) не имеет, поэтому оптимальная система одномерных подалгебр имеет вид $\Theta_1 = \{\langle X_1\rangle, \langle aX_1 + X_2\rangle, \langle aX_1 + cX_2 + X_3\rangle, a, c \geq 0\}$. Здесь использованы автоморфизмы $e^1 \to -e^1$, $e^2 \to -e^2$.

Нетрудно заметить, что инвариантная подмодель может быть только у третьей подалгебры $\langle cX_1 + aX_2 + X_3\rangle$. Её инвариантами являются функции xe^{-rt}, $(u - axT(t))e^{-rt} - cT(t)$. Решение будем искать в виде $u = axT(t) + cT(t)e^{rt} + e^{rt}\varphi\left(xe^{-rt}\right)$. Подставив эту функцию в уравнение (16), получим инвариантную подмодель

$$\frac{\phi(z)\varphi''(z)}{2(1-\beta z\varphi''(z))^2} + az + c = 0, \quad z = xe^{-rt-bT(t)}.$$

Список литературы

1. **Black, F.** The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // J. of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–659.
2. **Sircar, K. R.** General Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies / K. R. Sircar, G. Papanicolaou // Applied Mathematical Finance. — 1998. — Vol. 5. — P. 45–82.
3. **Schönbucher, P.** The feedback effect of hedging in illiquid markets / P. Schönbucher, P. Wilmott // SIAM J. on Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 61. — P. 232–272.
4. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
5. **Gazizov, R. K.** Lie symmetry analysis of differential equations in finance / R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov // Nonlinear Dynamics. — 1998. — Vol. 17. — P. 387–407.
6. **Bordag, L. A.** Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives / L. A. Bordag, A. Y. Chmakova // Intern. J. of Theoretical and Applied Finance. — 2007. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–21.
7. **Bordag, L. A.** Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions/ L. A. Bordag, A. Mikaelyan // J. Letters in Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 96, no. 1–3. — P. 191–207.

Поступила в редакцию 26.09.2016
После переработки 03.10.2016

Сведения об авторе

Дышаев Михаил Михайлович, аспирант кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 3. P. 7–14.

GROUP ANALYSIS OF A NONLINEAR GENERALIZATION FOR BLACK — SCHOLES EQUATION

M. M. Dyshaev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

Group classification is obtained for an equations family with a free parameter that contains Black — Scholes equation as a partial case. A five-dimensional group of equivalence transformations is calculated and three-dimensional principal Lie algebras in cases of two free element specifications were found. Optimal subalgebras systems and corresponding invariant solutions or invariant submodels are calculated for every Lie algebra.

Keywords: *nonlinear partial differential equation, nonlinear Black — Scholes equation, Sircar — Papanicolaou equation, Schönbucher — Wilmott equation, group analysis, invariant solution, invariant submodel.*

References

1. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, vol. 81, pp. 637–659.
2. **Sircar K.R., Papanicolaou G.** General Black–Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 1998, vol. 5, pp. 45–82.
3. **Schonbucher P., Wilmott P.** The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2000, vol. 61, pp. 232–272.
4. **Ovsyannikov L.V.** *Group Analysis of Differential Equations.* New York, Academic Press, 1982. 416 p.
5. **Gazizov R.K., Ibragimov N.H.** Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 1998, vol. 17, pp. 387–407.
6. **Bordag L.A., Chmakova A.Y.** Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 1–21.
7. **Bordag L.A., Mikaelyan A.** Models of self-financing hedging strategies in illiquid markets: symmetry reductions and exact solutions. *Journal Letters in Mathematical Physics*, 2011, vol. 96, no. 1–3, pp. 191–207.

Accepted article received 26.09.2016
Corrections received 03.10.2016