Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 342–351.

УДК 517.955+517.956 DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15308

ОДИН КЛАСС ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЁННОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Е. Федоров[1,2,3,a], **Т. Д. Фуонг**[4,b], **Б. Т. Киен**[4,c], **К. В. Бойко**[1,d], **Е. М. Ижбердеева**[1,e]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[3] *Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
[4] *Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам*
[a] *kar@csu.ru*, [b] *tdphuong@math.ac.vn*, [c] *btkien@math.ac.vn*, [d] *kvboyko@mail.ru*,
[e] *elizaveta.izhberdeeva@gmail.com*

Исследована задача Коши для одного класса полулинейных уравнений, разрешённых относительно распределённой производной Герасимова — Капуто, в банаховых пространствах с линейной частью, порождающей разрешающее семейство операторов. С использованием полученных ранее результатов о разрешимости задачи Коши для соответствующего линейного неоднородного уравнения, найденного операторного вида её решения и теоремы о сжимающем отображении при условии повышенной гладкости по пространственным переменным нелинейного оператора в уравнении доказана локальная однозначная разрешимость задачи Коши для рассматриваемого полулинейного уравнения. Полученный результат использован при исследовании класса начально-краевых задач для полулинейных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: *дробная производная Герасимова — Капуто, производная распределённого порядка, полулинейное уравнение, локальное решение, существование и единственность решения.*

В последние десятилетия возрастает интерес исследователей к уравнениям с распределёнными производными [1–4]. Линейные уравнения в банаховых пространствах с распределённой производной Герасимова — Капуто и с ограниченным оператором (для уравнений, разрешённых относительно производной) или с парой относительно ограниченных операторов (для уравнений, не разрешимых относительно производной) исследованы в работах [5; 6]. Аналогичные результаты для уравнений, разрешённых относительно распределённой производной Римана — Лиувилля, получены в [7], для уравнений с распределённой производной Герасимова — Капуто и с неограниченным секториальным оператором (для уравнений, разрешённых относительно производной) или с парой относительно секториальных операторов (для уравнений, не разрешимых относительно производной) — в [8]. Полулинейное уравнение, разрешённое относительно распределённой производной Герасимова — Капуто, с ограниченным линейным оператором исследовано в работе [9].

Работа первого автора выполнена в рамках исследований Уральского математического центра, а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 19-41-450001, и Правительства РФ, акт 211, контракт 02.A03.21.0011.

В работе [10] найдены необходимые и достаточные условия на замкнутый линейный оператор A для существования аналитического разрешающего семейства операторов уравнения

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t), \quad t > 0,$$

где $0 < b \le 1$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{C}$. При этих условиях получены теоремы об однозначной разрешимости соответствующего линейного неоднородного уравнения при условиях повышенной гладкости правой части уравнения по времени (гёльдеровость функции в правой части) или по пространству (непрерывность в норме графика оператора A этой функции). В статье [11] эти результаты распространены на случай любого $b > 0$, а также доказана теорема о возмущении генераторов аналитических разрешающих семейств операторов.

В данной работе для случая $0 < b \le 1$ рассмотрено полулинейное уравнение с распределённой производной Герасимова — Капуто в банаховом пространстве с оператором при искомой функции, удовлетворяющим условиям порождения разрешающего семейства операторов из работы [10]. При этом нелинейный оператор в уравнении предполагается непрерывным в норме графика оператора A. Полученный результат использован при исследовании класса начально-краевых задач для полулинейных уравнений в частных производных.

1. Линейное уравнение распределённого порядка

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := \int_0^t g_\beta(t-s) h(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \ t > 0.$$

Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $D_t^\alpha := \frac{d}{dt} J_t^{1-\alpha}(h(t) - h(0))$ — дробная производная Герасимова — Капуто, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $S_{\theta,a} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \, \mu \ne a\}$ при $\theta \in (\pi/2, \pi]$, $a \in \mathbb{R}$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, \, t \ne 0\}$ при $\psi \in (0, \pi/2]$, $\mathfrak{Z}$ — банахово пространство. Через $\mathrm{Lap}(\mathfrak{Z})$ обозначим множество функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Z}$, для которых определено преобразование Лапласа.

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{Z})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$, через $\mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определённых в $\mathfrak{Z}$, действующих в пространство $\mathfrak{Z}$. При $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0, \tag{1}$$

для уравнения распределённого порядка

$$\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $0 < b \le 1$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{C}$. Под решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что существует $\int_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{Z})$ и выполняются равенства (1) и (2). Здесь D_A — область определения оператора A, снабжённая его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathfrak{Z}}$.

Отметим, что если в исходной задаче интеграл берётся от некоторого $c \in (0, b)$ до b, то соответствующее уравнение также можно записать в виде (2), положив $\omega(\alpha) \equiv 0$ при $\alpha \in (0, c)$.

Лемма 1. [10]. *Пусть $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b)$. Тогда $W(\lambda) := \int\limits_0^b \omega(\alpha)\lambda^\alpha d\alpha$ — аналитическая функция на множестве $\mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$.*

Лемма 2. [10]. *Пусть $0 < b \leq 1$, ω — кусочно-непрерывная функция на $(0, b)$, непрывная слева в точке b, $\omega(b) \neq 0$. Тогда для $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$*

$$\exists C > 0 \quad \exists \varepsilon \in (0, b) \quad \exists \varrho > 0 \quad \forall \lambda \in S_{\theta_0, a_0} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \varrho\} \quad |W(\lambda)| \geq C|\lambda|^\varepsilon. \quad (3)$$

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geq 0\}$ называется *разрешающим* для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

(i) оператор-функция $S(t)$ сильно непрерывна при $t \geq 0$, $S(0) = I$;

(ii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Ax = AS(t)x$ при всех $x \in D_A$, $t \geq 0$;

(iii) $S(t)z_0$ — решение задачи Коши (1), (2) при всех $z_0 \in D_A$.

Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0, \pi/2]$. Аналитическое разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z}) : t \geq 0\}$ имеет тип (ψ_0, a_0) при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если при любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq C(\psi, a)e^{a\operatorname{Re} t}$.

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, если $A \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, что при $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ имеем $W(\lambda) \in \rho(A)$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдётся такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{|\lambda| K(\theta, a)}{|W(\lambda)||\lambda - a|}.$$

Обозначим

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} W(\lambda) \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda, \quad (4)$$

где $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. В случае $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ операторы $Z_0(t)$ определены при $t > 0$.

Теорема 1. *Пусть $0 < b \leq 1$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $\omega \in L_1(0, b)$, W удовлетворяет условию (3). Тогда существует аналитическое разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ уравнения (2) в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. При этом разрешающее семейство операторов единственно, имеет вид (4) и при $z_0 \in D_A$ функция $z(t) = Z_0(t)z_0$ является единственным решением задачи (1), (2) в пространстве $\operatorname{Lap}(\mathfrak{Z})$.*

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t) + g(t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

где $0 < b \leq 1$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{C}$, $T > 0$, $g \in C([0, T]; \mathfrak{Z})$. Обозначим

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \left(W(\lambda)I - A\right)^{-1} d\lambda, \quad \text{тогда} \quad Z_0(t) = \int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-1} Z(t) d\alpha.$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b)$, W *удовлетворяет условию* (3), $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, $g \in C([0, T]; D_A)$. *Тогда функция* $z(t) = Z_0(t) z_0 + \int\limits_0^t Z(t-s) g(s) ds$ *является единственным решением задачи* (1), (5).

2. Полулинейное уравнение

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}$, задан нелинейный оператор $B : U \to \mathfrak{Z}$, $0 < b \leq 1$, $z_0 \in \mathfrak{Z}$. Рассмотрим задачу Коши

$$z(0) = z_0 \tag{6}$$

для полулинейного уравнения распределённого порядка

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} z(t) d\alpha = Az(t) + B(t, z(t)). \tag{7}$$

Решением задачи (6), (7) на отрезке $[0, t_1]$ называется такая функция $z \in C([0, t_1]; \mathfrak{Z}) \cap C((0, t_1]; D_A)$, что выполняется условие (6), существует распределённая производная $\int\limits_0^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha} x(t) d\alpha \in C([0, t_1]; \mathfrak{Z})$, при $t \in (0, t_1]$ имеем $(t, z(t)) \in U$ и выполняется равенство (7).

Обозначим $S_\delta(z) = \{y \in \mathfrak{Z} : \|y - z\|_{\mathfrak{Z}} \leq \delta\}$. Отображение $B : U \to \mathfrak{Z}$ называется локально липшицевым по $z \in \mathfrak{Z}$, если при любом $(t, z) \in U$ найдутся такие $\delta > 0$, $l > 0$, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(z) \subset U$ и для всех $(s, y), (s, v) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(z)$ выполняется неравенство $\|B(s, y) - B(s, v)\|_{\mathfrak{X}} \leq l \|y - v\|_{\mathfrak{X}}$.

Лемма 3. *Пусть* $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b)$, W *удовлетворяет условию* (3), $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}$, $B \in C(U; D_A)$, $x_0 \in D_A$, $(0, x_0) \in U$. *Тогда* z *— решение задачи* (6), (7) *на отрезке* $[0, \tau]$, *если и только если* $z \in C([0, \tau]; \mathfrak{Z})$ *и при всех* $t \in (0, \tau]$

$$z(t) = Z_0(t) z_0 + \int\limits_0^t Z(t-s) B(s, z(s)) ds. \tag{8}$$

Доказательство. Если z — решение задачи (6), (7) на $[0, \tau]$, то $z \in C([0, \tau]; \mathfrak{Z})$, отображение $t \to B(t, z(t))$ действует из $[0, \tau]$ в D_A непрерывно, поэтому из теоремы 2 следует справедливость равенства (8).

Пусть $z \in C([0, \tau]; \mathfrak{Z})$ удовлетворяет равенству (8), тогда отображение $t \to B(t, z(t))$ непрерывно действует из $[0, \tau]$ в D_A. В таком случае непосредственно может быть доказано, как при доказательстве теоремы 2 в [10], что функция (8) является решением задачи (6), (7). □

Теорема 3. *Пусть* $0 < b \leq 1$, $\omega \in L_1(0, b)$, W *удовлетворяет условию* (3), $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, U *— открытое множество в* $\mathbb{R} \times \mathfrak{Z}$, *отображение*

$B \in C(U; D_A)$ локально липшицево по фазовой переменной z, $x_0 \in D_A$, $(0, x_0) \in U$. Тогда существует такое $\tau > 0$, что задача (6), (7) *имеет единственное решение на отрезке* $[0, \tau]$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать, что уравнение (8) имеет единственное решение $z \in C([0,\tau];\mathfrak{Z})$ при некотором $\tau > 0$. Выберем настолько малые $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$, что $V = [0,\tau] \times S_\varepsilon(z_0) \subset U$. Обозначим символом $\mathcal{S}$ множество таких функций $y \in C([0,\tau];\mathfrak{Z})$, что $\|y(t) - z_0\|_{\mathfrak{Z}} \leq \varepsilon$ при $0 \leq t \leq \tau$. Определим на $\mathcal{S}$ метрику $d(x,y) := \sup\limits_{t\in[0,\tau]} \|x(t) - y(t)\|_{\mathfrak{Z}}$, тогда S — полное метрическое пространство. Определим для $y \in \mathcal{S}$

$$G(y)(t) := Z_0(t)z_0 + \int\limits_0^t Z(t-s)B(s,y(s))\,ds,\ \ t \in [0,\tau],$$

и докажем, что оператор G отображает метрическое пространство $\mathcal{S}$ в себя и является сжимающим при достаточно малом $\tau > 0$.

Выберем контур Γ при $\theta \in (\theta_0, \pi/2)$ и достаточно большом $a > a_0$, тогда в силу включения $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ и условия (3) при $t > 0$

$$\|Z(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Z})} \leq \frac{e^{(a+\delta)t}K(\theta,a)(a+\delta)^{1-\varepsilon}}{C\delta} + \frac{e^{at}K(\theta,a)}{C\pi}\int\limits_\delta^\infty \frac{e^{rt\cos\theta}(r+\delta)^{1-\varepsilon}}{r}dr \leq$$

$$\leq \frac{e^{(a+\delta)t}K(\theta,a)(a+\delta)^{1-\varepsilon}}{C\delta} + \frac{e^{at}K(\theta,a)2^{1-\varepsilon}}{C\pi}\int\limits_\delta^\infty \frac{e^{rt\cos\theta}}{r^\varepsilon}dr \leq$$

$$\leq \frac{e^{(a+\delta)t}K(\theta,a)(a+\delta)^{1-\varepsilon}}{C\delta} + \frac{e^{at}K(\theta,a)}{C\pi}\left(\frac{-2}{t\cos\theta}\right)^{1-\varepsilon}\Gamma(1-\varepsilon). \tag{9}$$

Обозначим $K := \max\limits_{t\in[0,\tau]} \|B(t,z_0)\|_{\mathfrak{Z}}$. Тогда при $t \in [0,\tau]$ в силу (9)

$$\|G(y)(t) - z_0\|_{\mathfrak{Z}} \leq \|Z_0(t)z_0 - z_0\|_{\mathfrak{Z}} + C_1\int\limits_0^t (t-s)^{\varepsilon-1}\left(l\|y(s) - z_0\|_{\mathfrak{Z}} + K\right)ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + C_1(l\varepsilon + K)\frac{\tau^\varepsilon}{\varepsilon} \leq \varepsilon$$

при достаточно малом τ. Таким образом, $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Кроме того, при малом τ и для всех $t \in [0,\tau]$, $x, y \in \mathcal{S}$

$$\|G(x)(t) - G(y)(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq C_1 l\frac{\tau^\varepsilon}{\varepsilon}\sup_{t\in[0,\tau]}\|x(t) - y(t)\| \leq \frac{d(x,y)}{2}.$$

Следовательно, $d(G(x), G(y)) \leq d(x,y)/2$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{S}$. Она и является единственным решением задачи (6), (7) на отрезке $[0,\tau]$. $\square$

3. Приложение к начально-краевым задачам

Пусть $n < m$, $P_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$, $Q_m(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{m} d_j\lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $c_n \neq 0$, $d_m \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, пучок операторов $\Lambda, B_1, B_2, \ldots, B_r$ регулярно эллиптичен [12, с. 454], где

$$(\Lambda u)(s) = \sum_{|q|\leq 2r} a_q(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) = \sum_{|q|\leq r_l} b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \ldots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \cdots + q_d$. Определим оператор $\Lambda_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega)$ [12, с. 399] равенством $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряжённый оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [12, Теорема 5.6.3, с. 499]. Пусть, кроме того, $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит точки ноль, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учётом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(s, 0) = u_0(s),\ s \in \Omega, \tag{10}$$

$$B_l\Lambda^k u(s, t) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad l = 1, 2, \ldots, r, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \tau), \tag{11}$$

$$\int\limits_0^b \omega(\alpha)D_t^\alpha P_n(\Lambda)u(s, t)d\alpha = Q_m(\Lambda)u(s, t) + f(s, t, u(s, t)), \quad (s, t) \in \Omega \times (0, \tau), \tag{12}$$

где $0 < b \leq 1$, $\omega : [0, b] \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times (-c, T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c > 0$. Положим

$$\mathfrak{X} = \{v \in H^{2rn}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ l = 1, 2, \ldots, r,\ x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathfrak{Y} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(\Lambda), \quad M = Q_m(\Lambda),$$

$$D_M = \{v \in H^{2rm}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(s) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,\ l = 1, 2, \ldots, r,\ x \in \partial\Omega\}.$$

Тогда $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Пусть, кроме того, $P_n(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})$ и задача (10)–(12) представима в виде (6), (7), где $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X}$, $A = L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{Z})$, $D_A = D_M$, $z(t) = u(\cdot, t)$, $B(t, z(t)) = L^{-1}f(\cdot, t, u(\cdot, t))$, $z_0 = u_0(\cdot)$.

Лемма 4. [10]. *Пусть* $0 \leq b_0 < b \leq 1$, $\omega(\alpha) \equiv 0$ *при* $\alpha \in [0, b_0)$, $\omega \in C([b_0, b]; \mathbb{R})$, $\omega(\alpha) \geq 0$ *при* $\alpha \in [b_0, b)$, $\omega(b) > 0$; $(-1)^{m-n}d_m/c_n < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$ *не содержит нуля и корней многочлена* P_n *и выполняются обозначения этого параграфа. Тогда* $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$.

Определим отображение $g : (-c, T) \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ равенством $g(t, x(\cdot)) = f(\cdot, t, x(\cdot))$ при $(t, x(\cdot)) \in (-c, T) \times \mathfrak{X}$. Из леммы 4 и теоремы 3 сразу получим следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $0 \leq b_0 < b \leq 1$, $\omega(\alpha) \equiv 0$ *при* $\alpha \in [0, b_0)$, $\omega \in C([b_0, b]; \mathbb{R})$, $\omega(\alpha) \geq 0$ *при* $\alpha \in [b_0, b)$, $\omega(b) > 0$; $n < m \leq 2n$, $(-1)^{m-n}d_m/c_n < 0$, *спектр* $\sigma(\Lambda_1)$

не содержит нуля и корней многочлена P_n, $u_0 \in D_M$, $g \in C^1((-c,T)\times\mathfrak{X};\mathfrak{X})$. *Тогда при некотором* $\tau > 0$ *существует единственное решение задачи* (10)–(12).

Доказательство. Непрерывность в норме графика оператора $A = L^{-1}M$ отображения $B(t,x) = L^{-1}f(\cdot,t,x(\cdot))$ означает непрерывность отображения

$$P_n(\Lambda_1)^{-1}Q_m(\Lambda_1)P_n(\Lambda_1)^{-1}g : (-c,T)\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}.$$

Имеем для $n < m \leq 2n$

$$\|P_n(\Lambda_1)^{-1}Q_m(\Lambda_1)P_n(\Lambda_1)^{-1}f(\cdot,t,x(\cdot)) - P_n(\Lambda_1)^{-1}Q_m(\Lambda_1)P_n(\Lambda_1)^{-1}f(\cdot,t_1,x_1(\cdot))\|_{\mathfrak{X}} \leq$$

$$\leq C_1\|Q_m(\Lambda_1)P_n(\Lambda_1)^{-1}f(\cdot,t,x(\cdot)) - Q_m(\Lambda_1)P_n(\Lambda_1)^{-1}f(\cdot,t_1,x_1(\cdot))\|_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq C_2\|g(t,x(\cdot)) - g(t,x_1(\cdot))\|_{\mathfrak{X}} \to 0$$

при $(t,x(\cdot))\to(t_1,x_1(\cdot))\in(-c,T)\times\mathfrak{X}$ в силу условия теоремы на g. Локальная липшицевость по фазовой переменной доказывается аналогично с учётом непрерывной дифференцируемости отображения g. В силу лемм 2 и 4 по теореме 3 получим требуемое. □

Список литературы

1. **Нахушев, А. М.** О континуальных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах / А. М. Нахушев // Докл. Акад. наук СССР. — 1988. — Т. 300, № 4. — С. 796–799.
2. **Caputo, M.** Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters / M. Caputo // Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche. — 1995. — Vol. XLI. — P. 73–84.
3. **Псху, А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка / А. В. Псху. — М. : Наука, 2005. — 199 с.
4. **Umarov, S.** Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations / S. Umarov, R. Gorenflo // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 2005. — Vol. 24. — P. 449–466.
5. **Стрелецкая, Е. М.** Задача Коши для уравнения распределённого порядка в банаховом пространстве / Е. М. Стрелецкая, В. Е. Федоров, А. Дебуш // Мат. заметки Сев.-Вост. федер. ун-та. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 63–72.
6. **Fedorov, V. E.** Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces / V. E. Fedorov, E. M. Streletskaya // Electronic Journal of Differential Equations. — 2018. — Vol. 2018, no. 176. — P. 1–17.
7. **Fedorov, V. E.** A class of initial value problems for distributed order equations with a bounded operator / V. E. Fedorov, A. A. Abdrakhmanova // Stability, Control and Differential Games, eds. A. Tarasyev, V. I. Maksimov, T. Filippova. — Springer, 2020. — xi+389 p. — P. 251–262.
8. **Fedorov, V. E.** Distributed order equations in Banach spaxes with sectorial operators / V. E. Fedorov, A. A. Abdrakhmanova // Transmutation Operators and Applications, eds. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. — Cham : Springer Nature Switzerland AD, 2020. — P. 509–538.
9. **Федоров, В. Е.** Задача Коши для полулинейного уравнения распределённого порядка / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских // Челяб. физ.-мат. журн. — 2019. — Т. 4, вып. 4. — С. 439–444.
10. **Федоров, В. Е.** О порождении аналитического в секторе разрешающего семейства операторов дифференциального уравнения распределённого порядка / В. Е. Федоров // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 489. — С. 113–129.

11. **Fedorov, V. E.** Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations / V. E. Fedorov // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 1306. — 15 p.
12. **Трибель, Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — М. : Мир, 1980. — 664 с.

Поступила в редакцию 12.06.2020
После переработки 16.08.2020

Сведения об авторах

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kar@csu.ru.

Фуонг Та Дуй, главный научный сотрудник, отделение численного анализа и научного вычисления, Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам; e-mail: tdphuong@math.ac.vn.

Киен Буй Тронг, начальник отделения теории управления и оптимизации, Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам; e-mail: btkien@math.ac.vn.

Бойко Ксения Владимировна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: kvboyko@mail.ru.

Ижбердеева Елизавета Монировна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: elizaveta.izhberdeeva@gmail.com.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 342–351.

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15308

A CLASS OF DISTRIBUTED ORDER SEMILINEAR EQUATIONS IN BANACH SPACES

V.E. Fedorov[1,2,3,a], **T.D. Phuong**[4,b], **B.T. Kien**[4,c], **K.V. Boyko**[1,d], **E.M. Izhberdeeva**[1,e]

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2] *South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[3] *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*
[4] *Institute of Mathematics of the Vietnam Academy of Sciences and Technologies, Hanoi, Vietnam*
[a] *kar@csu.ru,* [b] *tdphuong@math.ac.vn,* [c] *btkien@math.ac.vn,* [d] *kvboyko@mail.ru,*
[e] *elizaveta.izhberdeeva@gmail.com*

The Cauchy problem is studied for a class of semilinear equations which are resolved with respect to the distributed Gerasimov — Caputo derivative in Banach spaces with a linear part generating a resolving family of operators. Using previously obtained results on the solvability of the Cauchy problem for the corresponding linear inhomogeneous equation, the found operator form of its solution, and the contraction mapping theorem, under the improved smoothness condition with respect to spatial variables for the nonlinear operator in the equation the local unique solvability of the Cauchy problem for the considered semilinear equation is proved. The obtained result is applied to the study of a class of initial-boundary value problems for semilinear partial differential equations.

Keywords: *the Gerasimov — Caputo fractional derivative, distributed order derivative, semilinear equation, local solution, the existence and the uniquenes of a solution.*

References

1. **Nakhushev A.M.** On continual differential equations and their difference analogues. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 1988, vol. 300, no. 4, pp. 796–799. (In Russ.).
2. **Caputo M.** Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters. *Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche*, 1995, vol. XLI, pp. 73–84.
3. **Pskhu A.V.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka Publ., 2005. 199 p.
4. **Umarov S., Gorenflo R.** Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2005, vol. 24, pp. 449–466.
5. **Streletskaya E.M., Fedorov B.E., Debbouche A.** The Cauchy problem for distributed order equations in Banach spaces. *Mathematical Notes of NEFU*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 63–72.
6. **Fedorov V.E., Streletskaya E.M.** Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, no. 176, pp. 1–17.

The work of the first author is done in the framework of the Ural Mathematical Center research, it is also supported by grant 19-41-450001 of Russian Foundation for Basic Research, by Act 211 of Government of the Russian Federation, contract 02.A03.21.0011.

7. **Fedorov V.E., Abdrakhmanova A.A.** A class of initial value problems for distributed order equations with a bounded operator. *Stability, Control and Differential Games*, eds. A.Tarasyev, V.I.Maksimov, T.Filippova. Springer, 2020. xi+389 p. P. 251–262.
8. **Fedorov V.E., Abdrakhmanova A.A.** Distributed order equations in Banach spaxes with sectorial operators. Transmutation Operators and Applications. Cham, Springer Nature Switzerland AD, 2020. 686 p. P. 509–538.
9. **Fedorov V.E., Gordievskikh D.M.** The Cauchy problem for a semilinear equation of the distributed order. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2019, vol. 4, iss. 4, pp. 439–444.
10. **Fedorov V.E.** O porozhdenii analiticheskogo v sektore razreshayushchego semeystva operatorov differentsial'nogo uravneniya raspredelyonnogo poryadka [On generating of an analytic in a sector resolving family of operators for a differential equation of the distributed order]. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* [Notes of scientific seminars of PDMI], 2020, vol. 489, pp. 113–129. (In Russ.).
11. **Fedorov V.E.** Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations. *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 1306, 15 p.
12. **Triebel H.** *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. 528 p.

Accepted article received 12.06.2020
Corrections received 16.08.2020