Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 316–326.

УДК 517.958 DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15306

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

А. В. Панов

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
gjd@bk.ru

Рассматривается система уравнений, описывающая динамику газовзвеси в изотермическом случае. Выведена подмодель однородных движений среды, инвариантных относительно галилеевых сдвигов по первой координате. Данная подмодель является дифференциально инвариантной подмоделью относительно четырёхмерной подалгебры с базисом из операторов сдвига по всем пространственным координатам и оператора преобразования Галилея по первой координате. Подмодель приведена в инволюцию и проинтегрирована, найдено точное решение рассматриваемой системы. Проведено сравнение полученного решения с известным частично инвариантным решением. Относительно этой же подалгебры из оптимальной системы подалгебр алгебры Ли симметрий уравнений динамики газовзвеси, порождающей однородные движения среды, инвариантные относительно галилеевых сдвигов по первой координате, построено групповое расслоение уравнений динамики газовзвеси, разбивающее исходную систему на две части: автоморфную и разрешающую. Данное разбиение содержит все решения исходной системы и наоборот.

Ключевые слова: *группа симметрий, дифференциально инвариантное решение, двухфазная среда.*

Введение

Рассматривается система уравнений в частных производных, описывающая динамику двухфазной среды,

$$\begin{gathered}
\frac{d\rho_1}{dt_1} + \rho_1 \mathrm{div}\ \mathbf{u}_1 = 0, \\
\frac{d\rho_2}{dt_2} + \rho_2 \mathrm{div}\ \mathbf{u}_2 = 0, \\
\rho_1 \frac{d\mathbf{u}_1}{dt_1} + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \\
\rho_2 \frac{d\mathbf{u}_2}{dt_2} + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),
\end{gathered} \tag{1}$$

здесь $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ — векторы скоростей первой и второй фаз, ρ_1, ρ_2 — парциальные плотности фаз, $P(\rho_1, \rho_2)$ — давление смеси (функциональный параметр системы), $m_2 = \dfrac{\rho_2}{\rho_{22}}$ — объёмная доля второй фазы, ρ_{22} — абсолютная плотность второй фазы (постоянная величина), $m_1 = 1 - m_2$ — объёмная доля первой фазы, $\dfrac{d}{dt_1} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla$, $\dfrac{d}{dt_2} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 18-71-00041).

Система (1) была предложена в работе [1], её исследовали и развивали разные авторы (см., например, [2; 3]). Исследования системы (1) были направлены на решение различных проблем: корректность задачи Коши, задача о распаде произвольного разрыва, расчёт распространения ударных волн, расчёт разлёта сжатого объёма и другие задачи. Большинство этих задач решались численными методами. В современных исследованиях начали рассматривать полидисперсные смеси с существенно различными размерами дисперсных компонент среды [4], что приводит к дополнительным трудностям в численных расчётах. Как ранее некорректность задачи Коши, так и сейчас проблемы, связанные с жёсткостью уравнений полидисперсной среды, приводят к трудностям в решении задач многофазной газодинамики численными методами. Поэтому поиск точных решений, которые могут быть использованы для апробации численных схем, остаётся актуальной проблемой.

Одним из самых эффективных методов поиска точных решений нелинейных уравнений в частных производных является подход на основе свойств симметрии изучаемой системы. Среди основных монографий по данному направлению можно указать работы [5–8].

Ранее был найден ряд точных решений системы (1) в одномерном и трёхмерном случаях [9; 10]. Это были инвариантные либо частично инвариантные решения. Поиск таких решений основан на упрощении исходной системы за счёт свойств её симметрии. В инвариантном случае упрощения могут быть довольно различными: к алгебраической системе, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, к системе уравнений в частных производных с меньшим числом независимых переменных. В случае частично инвариантных решений исходная система упрощается, однако редуцированная система разбивается на две части — инвариантную и «активную» системы. Последняя включает как параметры функции из инвариантной системы и имеет нетривиальные условия совместности. Такие упрощения можно делать, основываясь на любой подалгебре из алгебры Ли симметрий исследуемой системы. Однако сопряжённые подалгебры будут давать подмодели (упрощения), переводимые друг в друга преобразованием из группы симметрий. Поэтому вывод и анализ подмоделей необходимо делать для несопряжённых подалгебр. Таким образом возникает задача о построении оптимальной системы подалгебр данной алгебры Ли симметрий. Можно сказать, что в этой оптимальной системе, т. е. в полном наборе несопряжённых подалгебр, содержится алгебраическая «структура» множества точных решений системы.

Некоторые подалгебры не порождают инвариантные подмодели в силу специфики действия соответствующей подгруппы в заданном пространстве зависимых и независимых переменных. В этом случае можно искать дифференциально инвариантные решения [11], что кажется более простой задачей по сравнению с поиском частично инвариантных решений. В данной работе предлагается пример поиска точного дифференциально инвариантного решения системы (1).

1. Дифференциально инвариантное решение

Алгебра Ли группы симметрий системы (1) с произвольной функцией давления P имеет базис [12]

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2},\ X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2},\ X_6 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$X_7 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + v_1\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial w_2} - w_2\frac{\partial}{\partial v_2},$$
$$X_8 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + w_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial w_1} + w_2\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial w_2},$$
$$X_9 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial v_1} - v_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial v_2} - v_2\frac{\partial}{\partial u_2},\ X_{10} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Эта алгебра является алгеброй Ли группы Галилея, действующей в пространстве зависимых и независимых переменных системы (1). Оптимальная система подалгебр алгебры Ли группы Галилея была получена, например, в работе [13].

Рассмотрим подалгебру из оптимальной системы с базисными операторами X_1, X_2, X_3, X_4. Если рассматривать действие группы Ли, порождённое данной подалгеброй, в пространстве переменных $J^0 = (t, x, y, z, \rho_1, \rho_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, то полным набором функционально независимых инвариантов являются следующие функции:

$$I_0 = \{t,\ \rho_1,\ \rho_2,\ u_1 - u_2,\ v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2\}.$$

Инвариантного решения не построить, так как недостаточно инвариантов — «зависимых переменных». Найдём дифференциально инвариантное решение системы (1). Для этого расширим пространство, на котором действует группа, до пространства 1-струй $J^1 = (t, x, y, z, \rho_1, \rho_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \rho_{1t}, \rho_{1x}, \rho_{1y}, \rho_{1z}, \rho_{2t}, \ldots, \mathbf{u}_{2t}, \mathbf{u}_{2x}, \mathbf{u}_{2y}, \mathbf{u}_{2z})$ — 44-мерное пространство с координатами: независимые переменные, зависимые переменные, все первые производные зависимых переменных по независимым. Продолжим действие группы на пространство J^1, используя стандартные формулы продолжения (см., например, в [5]). Смысл данного продолжения заключается в том, что переменные, отвечающие за производные, должны преобразовываться так, чтобы производные преобразованной функции $f(t, x, y, z)$ совпадали с преобразованными производными функции $f(t, x, y, z)$. Итак, используя стандартную процедуру, получим продолжение данных операторов на первые производные

$$X_1^1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2^1 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3^1 = \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_4^1 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} - u_{1x}\frac{\partial}{\partial u_{1t}} - u_{2x}\frac{\partial}{\partial u_{2t}} - v_{1x}\frac{\partial}{\partial v_{1t}} - v_{2x}\frac{\partial}{\partial v_{2t}} -$$
$$-w_{1x}\frac{\partial}{\partial w_{1t}} - w_{2x}\frac{\partial}{\partial w_{2t}} - \rho_{1x}\frac{\partial}{\partial \rho_{1t}} - \rho_{2x}\frac{\partial}{\partial \rho_{2t}}.$$

Теперь полный набор функционально независимых инвариантов состоит из ранее полученных функций и дифференциальных инвариантов:

$$I_1 = I_0 \cup \{f_x,\ f_y,\ f_z,\ g_{1t}g_{2x} - g_{2t}g_{1x},\ h_{1x}\rho_{1t} - \rho_{1x}h_{1t},\ h_{2x}\rho_{2t} - \rho_{2x}h_{2t}\},$$

где f принимает значения из множества $\{\rho_1, \rho_2, u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2\}$, g принимает значения из множества $\{\rho, u, v, w\}$, а h из множества $\{v, w\}$. Стандартная техника поиска инвариантных решений предписывает построение следующих анзацев: необходимо приравнять инварианты с зависимыми переменными $(\rho_1, \rho_2, u_1, \ldots)$ к новым неизвестным функциям, которые зависят от инвариантов, содержаших только независимые переменные. В случае дифференциально инвариантного решения получим равенства

$$\rho_i = r_i(t),\ v_i = \psi_i(t),\ w_i = \chi_i(t),\ u_1 - u_2 = \varphi(t),\ u_{1x} = \alpha(t),\ u_{1y} = \beta(t),\ u_{1z} = \gamma(t), \ldots \tag{2}$$

Выполнение условий совместности приведёт к тому, что все неизвестные функции в уравнениях (2), оставшихся в точках, будут определяться из представленных уравнений. К примеру, неизвестная функция $k(t)$ в уравнении $v_{1y} = k(t)$ определяется в силу уравнения $v_1 = \psi_1(t)$, а из уравнения $u_1 - u_2 = \varphi(t)$ и последних выписанных уравнений в (2) следуют равенства $u_{2x} = \alpha(t)$, $u_{2y} = \beta(t)$, $u_{2z} = \gamma(t)$. Подставим в систему (1) выписанные в (2) равенства. Получим уравнения

$$r_i' + r_i\alpha = 0,\ \psi_1' = -\frac{r_2}{r_1\tau}(\psi_1 - \psi_2),\ \psi_2' = \frac{1}{\tau}(\psi_1 - \psi_2),$$

$$\chi_1' = -\frac{r_2}{r_1\tau}(\chi_1 - \chi_2),\ \chi_2' = \frac{1}{\tau}(\chi_1 - \chi_2), \tag{3}$$

$$\varphi' + \alpha\varphi + (\psi_1 - \psi_2)\beta + (\chi_1 - \chi_2)\gamma = -\frac{\frac{r_2}{r_1} + 1}{\tau}\varphi,$$

составляющие инвариантную часть системы (1), также остались уравнения на функцию u_2

$$\begin{gathered} F \equiv u_{2t} + u_2 u_{2x} + \psi_2 u_{2y} + \chi_2 u_{2z} - \frac{\varphi}{\tau} = 0, \\ G_1 \equiv u_{2x} - \alpha = 0,\ G_2 \equiv u_{2y} - \beta = 0,\ G_3 \equiv u_{2z} - \gamma = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

составляющие «активную» часть системы (1). Функции φ, ψ_2, χ_2, α, β, γ входят в систему (4) как параметры. Поэтому уравнения $F = 0$, $G_i = 0$, $i \in \{1, 2, 3\}$, должны удовлетворять условиям совместности, которые выражаются равенствами нулю скобок Якоби $[F, G_i] = 0$, $[G_i, G_j] = 0$ на решениях системы (4).

Скобкой Якоби [14] двух уравнений $F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ \ldots, \ u_{x_n}) = 0$, $G(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ \ldots, \ u_{x_n}) = 0$ на функцию $u(x_1, \ \ldots, \ x_n)$ называется выражение

$$[F, G] = \sum_{i=1}^{n} \left((F_{x_i} + u_{x_i}F_u)\, G_{u_{x_i}} - (G_{x_i} + u_{x_i}G_u)\, F_{u_{x_i}} \right).$$

Подсчёт скобок $[F, G_i] = 0$ вместе с уравнениями $G_i = 0$ даёт уравнения на параметры α, β, γ, при которых система (4) имеет решение:

$$\alpha' + \alpha^2 = 0,\ \beta' + \alpha\beta = 0,\ \gamma' + \alpha\gamma = 0.$$

Решения этих уравнений $\alpha = \frac{1}{t+c_1}$, $\beta = \frac{c_2}{|t+c_1|}$, $\gamma = \frac{c_3}{|t+c_1|}$, либо $\alpha = 0$, $\beta = c_2$, $\gamma = c_3$. В первом случае решение системы (3) имеет вид

$$r_1 = \frac{r_0}{|t + c_1|},\ r_2 = \frac{\mu r_0}{|t + c_1|},\ \psi_1 = c_5 + \mu c_4 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \psi_2 = c_5 - c_4 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},$$

$$\chi_1 = c_7 + \mu c_6 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \chi_2 = c_7 - c_6 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \varphi = \frac{-(\mu+1)(c_2c_4 + c_3c_6)t + c_8}{|t + c_1|} e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t}.$$

Подставляя найденные функции, в том числе α, β, γ, в уравнение $F = 0$ и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, найдём, что

$$u_2 = \frac{1}{|t + c_1|} \left(-(c_5c_2 + c_7c_3)t + (c_2c_4 + c_3c_6)te^{-\frac{\mu+1}{\tau}t} - \frac{c_8}{\mu+1} e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t} + l(x, y, z) \right).$$

Наконец, функция $l(x, y, z)$ находится из оставшихся уравнений $G_i = 0$. Она имеет вид $l(x, y, z) = \mathrm{sgn}(t + c_1)x + c_2y + c_3z$.

Во втором случае, когда $\alpha = 0$, $\beta = c_2$, $\gamma = c_3$, аналогично получим

$$r_1 = r_0,\ r_2 = \mu r_0,\ \psi_1 = c_5 + \mu c_4 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \psi_2 = c_5 - c_4 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},$$

$$\chi_1 = c_7 + \mu c_6 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \chi_2 = c_7 - c_6 e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},\ \varphi = (-(\mu+1)(c_2c_4 + c_3c_6)t + c_8)\, e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t},$$

$$u_2 = \left(-(c_5c_2 + c_7c_3)t + (c_2c_4 + c_3c_6)te^{-\frac{\mu+1}{\tau}t} - \frac{c_8}{\mu+1}e^{-\frac{\mu+1}{\tau}t} + c_2y + c_3z\right).$$

Если вернуться к операторам X_1, X_2, X_3, X_4 и пространству переменных J^0 с набором инвариантов I_0, то здесь возможен поиск частично инвариантного решения в виде

$$\rho_i = r_i(t),\ v_i = \psi_i(t),\ w_i = \chi_i(t),\ u_1 - u_2 = \varphi(t),$$

где функция u_2, или u_1, выражающая дефект инвариантности, является функцией переменных t, x, y, z. Здесь нет дополнительных предположений о производных, как ранее в дифференциально инвариантном случае. Это усложняет анализ и решение полученной системы, но найденное частично инвариантное решение обладает бо́льшим произволом — оно содержит произвольную функцию, такое решение найдено ранее в работе [12].

2. Групповое расслоение

В приведённом примере осуществлена редукция системы (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом выделено одно из возможных решений системы (1), зависящее от некоторого набора констант интегрирования. Используя факт симметричности системы (1) относительно преобразований, порожденных операторами X_1, X_2, X_3, X_4, можно выполнить редукцию системы (1) так, что полученная система будет эквивалентна исходной системе (1), т. е. все решения исходной системы будут решениями новой системы и наоборот. Новая система называется групповым расслоением системы (1).

Несколько слов о конструкции, подробности алгоритма и основные теоремы есть в [5]. Данная группа Ли преобразований разбивает множество решений рассматриваемой системы на классы эквивалентных: два решения эквивалентны, если одно можно перевести в другое групповым преобразованием. Класс эквивалентных решений называется орбитой действия группы на множестве решений. Задача группового расслоение состоит в следующем: для заданной системы и группы Ли G её симметрий найти уравнения AG, определяющие орбиту произвольной функции, и найти уравнения RS, решения которых задают всю совокупность орбит решений системы. Система AG является автоморфной, то есть любое её решение получается из одного при помощи преобразований допускаемой группы Ли G. Уравнения RS называют разрешающей системой.

Так как автоморфная система является инвариантной относительно действия группы G, то строить её надо так же, как инвариантное решение. Однако, чтобы учесть все решения системы (1), необходимо задавать многообразие в пространстве инвариантов размерности 4, размерность графиков решений системы (1) равна 4. Поэтому вместо (2) здесь будет анзац вида

$$v_1 = V_1(t, \rho_1, \rho_2, u),\ v_2 = V_2(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_1 = W_1(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_2 = W_2(t, \rho_1, \rho_2, u),$$

$$\rho_{im} = R_i^m(t, \rho_1, \rho_2, u),\ u_{im} = U_i^m(t, \rho_1, \rho_2, u), \tag{5}$$

$$v_{im} = V_i^m(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_{im} = W_i^m(t, \rho_1, \rho_2, u),$$

где за u обозначен инвариант $u_1 - u_2$, $i = 1, 2$, $m \in \{x, y, z\}$. Остались ещё уравнения

$$\begin{aligned}
&\rho_{1t}\rho_{2x} - \rho_{2t}\rho_{1x} = R(t, \rho_1, \rho_2, u),\ u_{1t}u_{2x} - u_{2t}u_{1x} = U(t, \rho_1, \rho_2, u),\\
&v_{1t}v_{2x} - v_{2t}v_{1x} = V(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_{1t}w_{2x} - w_{2t}w_{1x} = W(t, \rho_1, \rho_2, u),\\
&v_{1x}\rho_{1t} - \rho_{1x}v_{1t} = F_1(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_{1x}\rho_{1t} - \rho_{1x}w_{1t} = F_2(t, \rho_1, \rho_2, u),\\
&v_{2x}\rho_{2t} - \rho_{2x}v_{2t} = F_3(t, \rho_1, \rho_2, u),\ w_{2x}\rho_{2t} - \rho_{2x}w_{2t} = F_4(t, \rho_1, \rho_2, u).
\end{aligned} \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) образуют AG систему (аналог системы (4)), в которой функции, стоящие в правых частях равенств, считаются параметрами. Они находятся предварительно из разрешающей системы RS — аналог системы (3) и уравнений на функции α, β, γ — которая состоит из условий совместности AG системы и проекции системы (1) в пространство инвариантов (пространство переменных I_1), учитывая равенства (5), (6).

Найдём разрешающую систему RS. Выпишем проекцию системы (1) в пространство инвариантов с учётом равенств (5), (6). Для этого умножим первое уравнение в (1) на ρ_{2x} и вычтем из него второе уравнение, умноженное на ρ_{1x}, тогда вместо разности $\rho_{1t}\rho_{2x} - \rho_{2t}\rho_{1x}$ в силу первого равенства в (6) запишем R, а вместо остальных слагаемых подставим их значения из равенств (5). Получим уравнение

$$R + R_1^x R_2^x u + R_2^x R_1^y V_1 - R_2^y R_1^x V_2 + R_2^x R_1^z W_1 - R_2^z R_1^x W_2 + R_2^x \rho_1 \left(U_1^x + V_1^y + W_1^z\right) -$$
$$-R_1^x \rho_2 \left(U_2^x + V_2^y + W_2^z\right) = 0,$$

поступая аналогично, выпишем первую часть разрешающей системы

$$U + U_2^x U_1^x u + U_1^y U_2^x V_1 - U_2^y U_1^x V_2 + U_1^z U_2^x W_1 - U_2^z U_1^x W_2 + \left(\frac{m_1}{\rho_1} U_2^x - \frac{m_2}{\rho_2} U_1^x\right) P_x =$$
$$= -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} U_2^x - U_1^x\right) \frac{u}{\tau},$$

$$V + V_1^x V_2^x u + V_2^x V_1^y V_1 - V_1^x V_2^y V_2 + V_2^x V_1^z W_1 - V_1^x V_2^z W_2 + \left(\frac{m_1}{\rho_1} V_2^x - \frac{m_2}{\rho_2} V_1^x\right) P_y =$$
$$= -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} V_2^x - V_1^x\right) \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$W + W_1^x W_2^x u + W_2^x W_1^y V_1 - W_1^x W_2^y V_2 + W_2^x W_1^z W_1 - W_1^x W_2^z W_2 + \left(\frac{m_1}{\rho_1} W_2^x - \frac{m_2}{\rho_2} W_1^x\right) P_z =$$
$$= -\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} W_2^x - W_1^x\right) \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$F_1 + \left(V_1^x R_1^y - R_1^x V_1^y\right) V_1 + \left(V_1^x R_1^z - R_1^x V_1^z\right) W_1 + V_1^x \rho_1 \left(U_1^x + V_1^y + W_1^z\right) -$$
$$-\frac{m_1}{\rho_1} R_1^x P_y = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$F_2 + \left(W_1^x R_1^y - R_1^x W_1^y\right) V_1 + \left(W_1^x R_1^z - R_1^x W_1^z\right) W_1 + W_1^x \rho_1 \left(U_1^x + V_1^y + W_1^z\right) -$$
$$-\frac{m_1}{\rho_1} R_1^x P_z = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

$$F_3 + \left(V_2^x R_2^y - R_2^x V_2^y\right) V_2 + \left(V_2^x R_2^z - R_2^x V_2^z\right) W_2 + V_2^x \rho_2 \left(U_2^x + V_2^y + W_2^z\right) -$$

$$-\frac{m_2}{\rho_2}R_2^x P_y = -\frac{V_1 - V_2}{\tau},$$

$$F_4 + (W_2^x R_2^y - R_2^x W_2^y)\, V_2 + (W_2^x R_2^z - R_2^x W_2^z)\, W_2 + W_2^x \rho_2\, (U_2^x + V_2^y + W_2^z) -$$
$$-\frac{m_2}{\rho_2}R_2^x P_z = -\frac{W_1 - W_2}{\tau},$$

где $P_m = P_{\rho_1}R_1^m + P_{\rho_2}R_2^m$. Заметим, что полученные равенства являются алгебраическими уравнениями на функции из правых частей (5), (6). Вторая часть разрешающей системы RS состоит из условий совместности AG системы. Удобнее всего получать условия совместности на языке распределений Картана. В пространстве 1-струй J^1 рассмотрим стандартные формы Картана в заданных координатах

$$\omega_i = d\rho_i - \rho_{ix}dx - \rho_{iy}dy - \rho_{iz}dz - \rho_{it}dt, \quad i = 1, 2,$$

$$\omega_j = du_j - u_{jx}dx - u_{jy}dy - u_{jz}dz - u_{jt}dt, \quad j = 3, 4,$$
$$\omega_k = dv_k - v_{kx}dx - v_{ky}dy - v_{kz}dz - v_{kt}dt, \quad k = 5, 6,$$
$$\omega_l = dw_l - w_{lx}dx - w_{ly}dy - w_{lz}dz - w_{lt}dt, \quad l = 7, 8.$$

Для проверки совместности уравнений (5), (6) необходимо сузить формы Картана на поверхность, которую задают уравнения (5), (6) в пространстве J^1, и проверить является ли идеал, порождённый суженными формами Картана, дифференциальным. Условия, обеспечивающие последнее требование(дифференциальность идеала внешних форм), и будут условиями совместности AG системы.

Уравнения (5), (6) задают 8-мерную поверхность в 44-мерном пространстве J^1. На этой поверхности, точнее в её касательном расслоении, после сужения форм Картана будет 8 уравнений, задающих распределение Картана. Выпишем их. Взяв за координаты на поверхности переменные $(t, x, y, z, \rho_1, \rho_2, u_1, u_2)$ и подставив в формы Картана равенства (5), (6), получим

$$\Omega_1 \equiv R_2^x d\rho_1 - R_1^x d\rho_2 - (R_2^x R_1^y - R_2^y R_1^x)\, dy - (R_2^x R_1^z - R_1^x R_2^z)\, dz - R dt = 0,$$

$$\Omega_2 \equiv U_2^x du_1 - U_1^x du_2 - (U_2^x U_1^y - U_1^x U_2^y)\, dy - (U_2^x U_1^z - U_1^x U_2^z)\, dz - U dt = 0,$$
$$\Omega_3 \equiv V_2^x\, (V_{1\rho_1}d\rho_1 + V_{1\rho_2}d\rho_2 + V_{1u}(du_1 - du_2)) -$$
$$-V_1^x\, (V_{2\rho_1}d\rho_1 + V_{2\rho_2}d\rho_2 + V_{2u}(du_1 - du_2)) -$$
$$-(V_2^x V_1^y - V_1^x V_2^y)\, dy - (V_2^x V_1^z - V_1^x V_2^z)\, dz + (V_2^x V_{1t} - V_1^x V_{2t} - V)\, dt = 0,$$
$$\Omega_4 \equiv W_2^x\, (W_{1\rho_1}d\rho_1 + W_{1\rho_2}d\rho_2 + W_{1u}(du_1 - du_2)) - W_1^x\, (W_{2\rho_1}d\rho_1 + W_{2\rho_1}d\rho_1 +$$
$$+W_{2u}(du_1 - du_2)) - (W_2^x W_1^y - W_1^x W_2^y)\, dy - (W_2^x W_1^z - W_1^x W_2^z)\, dz +$$
$$+(W_2^x W_{1t} - W_1^x W_{2t} - W)\, dt = 0,$$
$$\Omega_5 \equiv V_1^x d\rho_1 - R_1^x\, (V_{1\rho_1}d\rho_1 + V_{1\rho_2}d\rho_2 + V_{1u}(du_1 - du_2)) - (V_1^x R_1^y - R_1^x V_1^y)\, dy -$$
$$-(V_1^x R_1^z - R_1^x V_1^z)\, dz - (R_1^x V_{1t} + F_1)\, dt = 0,$$
$$\Omega_6 \equiv W_1^x d\rho_1 - R_1^x\, (W_{1\rho_1}d\rho_1 + W_{1\rho_2}d\rho_2 + W_{1u}(du_1 - du_2)) - (W_1^x R_1^y - R_1^x W_1^y)\, dy -$$
$$-(W_1^x R_1^z - R_1^x W_1^z)\, dz - (R_1^x W_{1t} + F_2)\, dt = 0,$$
$$\Omega_7 \equiv V_2^x d\rho_2 - R_2^x\, (V_{2\rho_1}d\rho_1 + V_{2\rho_2}d\rho_2 + V_{2u}(du_1 - du_2)) - (V_2^x R_2^y - R_2^x V_2^y)\, dy -$$
$$-(V_2^x R_2^z - R_2^x V_2^z)\, dz - (R_2^x V_{2t} + F_3)\, dt = 0,$$
$$\Omega_8 \equiv W_2^x d\rho_2 - R_2^x\, (W_{2\rho_1}d\rho_1 + W_{2\rho_2}d\rho_2 + W_{2u}(du_1 - du_2)) - (W_2^x R_2^y - R_2^x W_2^y)\, dy -$$

$$- (W_2^x R_2^z - R_2^x W_2^z)\, dz - (R_2^x W_{2t} + F_4)\, dt = 0.$$

Интегральные многообразия распределения Картана на рассматриваемой поверхности должны иметь размерность 4, так как интегральное многообразие — это график произвольной функции переменных (t, x, y, z). Значит, среди уравнений $\Omega_i = 0, i = 1, \ldots, 8$, должны быть только 4 линейно независимых. Выписывая условия линейной зависимости, к примеру, последних четырёх форм от первых четырёх, получим первую часть условий совместности. Вторая часть уравнений совместности получится из требования замкнутости идеала, порождённого четырьмя независимыми формами Ω_i, относительно операции взятия внешнего дифференциала.

3. Заключение

Для системы уравнений двухфазной газодинамики найдено точное решение, являющееся дифференциально инвариантным относительно подалгебры, порождающей трансляции по координатам и галилеев сдвиг по первой координате. Сравнительно с поиском частично инвариантного решения на этой же подалгебре поиск дифференциально инвариантного решения оказался проще, что вызвано бо́льшим количеством накладываемых ограничений. Выведена часть уравнений группового расслоения системы (1) относительно этой же подалгебры. Оставшаяся часть уравнений может быть получена после выполнения стандартных выкладок, указанных в конце предыдущего пункта.

Автор выражает благодарность профессору Воронину Сергею Михайловичу, доктору физ.-мат. наук, профессору кафедры математического анализа ЧелГУ, за критику и обсуждения результатов работы.

Список литературы

1. **Рахматулин, Х. А.** Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х. А. Рахматулин // Прикл. математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 2. — С. 184–195.

2. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц / Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухин, А. Н. Папырин, В. М. Фомин. — Новосибирск : Наука, 1980. — 160 с.

3. Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц / А. В. Федоров, П. А. Фомин, В. М. Фомин, Д. А. Тропин, Дж.-Р. Чен. — Новосибирск : НГАСУ, 2011. — 156 с.

4. **Стояновская, О. П.** Анализ численных алгоритмов расчёта быстрого обмена импульсом между газом и пылью при моделировании околозвездных дисков / О. П. Стояновская, Э. И. Воробьёв, В. Н. Снытников // Астроном. журн. — 2018. — Т. 95, № 7. — С. 487–500.

5. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

6. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А. И. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др. — М. : Факториал Пресс, 2005. — 380 с.

7. **Олвер, П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 639 с.

8. **Bluman, G.** Symmetry and Intergration Methods for Differential Equations / G. Bluman, S. Anco. — New York : Springer-Verlag, 2002. — 419 p.

9. **Федоров, В. Е.** Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды / В. Е. Федоров, А. В. Панов // Вестн. Челяб. гос. ун-та. — 2011. — № 38 (253). — Физика. Вып. 11. — С. 65–69.
10. **Panov, A. V.** Invariant solutions and submodels in two-phase fluid mechanics generated by 3-dimensional subalgebras: barochronous flows / A. V. Panov // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2019. — Т. 116. — С. 140–146.
11. **Хабиров, С. В.** Классификация дифференциально инвариантных подмоделей / С. В. Хабиров // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 682–701.
12. **Панов, А. В.** Точные решения уравнений динамики двухфазной среды. Коллапс газа и частиц в пространстве / А. В. Панов // Сиб. журн. индустр. математики. — 2017. — Т. 20, № 2. — С. 71–82.
13. **Хабиров, С. В.** Симметрийный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры / С. В. Хабиров. — Уфа : Гилем, 2004. — 37 с.
14. **Камке, Э.** Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. — М. : Наука, 1966. — 260 с.

Поступила в редакцию 01.05.2020
После переработки 18.08.2020

Сведения об авторе

Панов Александр Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: gjd@bk.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, iss. 3. P. 316–326.

DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15306

A DIFFERENTIAL INVARIANT SOLUTION OF TWO-PHASE FLUID DYNAMICS EQUATIONS

A.V. Panov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
gjd@bk.ru

A system of differential equations, which describes the dynamics of a gas suspension in an isothermal case is considered. It is derived the submodel of homogeneous medium movements, which are invariant with respect to Galilean shifts at the first coordinate. This submodel is a differentially invariant submodel with respect to a four-dimensional subalgebra with a basis of shift operators over all spatial coordinates and a Galilean transformation operator over the first coordinate. This submodel has been led to an involution and integrated. An exact solution of the system is found. A comparison of the solution with a known partially invariant solution is done. A group bundle of the system is constructed with respect to the subalgebra from the optimal system of subalgebras of the Lie algebra of the symmetry group for the system of two-phase fluid dynamics. This group bundle divides the system into two parts: automorphic and resolution. All solutions of the system are contained in the set of solutions of the group bundle and vice versa.

Keywords: *symmetry group, differential invariant solution, two-phase fluid.*

References

1. **Rakhmatulin Kh.A.** Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimayemykh sred [Fundamentals of gasdynamics of interpenetrating motions of compressible media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1956, vol. 20, no. 2, pp. 184–195. (In Russ.).
2. **Yanenko N.N., Soloukhin R.I., Papyrin A.N., Fomin V.M.** *Sverkhzvukovye dvukhfaznye techeniya v usloviyakh skorostnoy neravnovesnosti chastits* [Supersonic two-phase flows under conditions of nonequilibrium of the velocities of the particles]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 160 p. (In Russ.).
3. **Fedorov A.V., Fomin P.A., Fomin V.M., Tropin D.A., Chen J.-R.** *Fiziko-matematicheskoe modelirovanie podavleniya detonatsii oblakami melkikh chastits* [Physical and mathematical modeling of detonation quenching with clouds of fine particles]. Novosibirsk, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 2011. 156 p. (In Russ.).
4. **Stoyanovskaya O.P., Snytnikov V.N., Vorobyov E.I.** Analysis of numerical algorithms for computing rapid momentum transfers between the gas and dust in simulations of circumstellar disks. *Astronomy reports*, 2018, vol. 62, no. 7, pp. 455–468.
5. **Ovsyannikov L.V.** Group Analysis of Differential Equations. New York, Academic Press, 1982. 432 p.
6. **Bocharov A.I., Verbovetskii A.M., Vinogradov A.M. et al.** *Simmetrii i zakoni sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki* [Symmetry and conservation laws of the equations of mathematical physics]. Moscow, Factorial Press Publ., 2005. 380 p. (In Russ.).
7. **Olver P.J.** *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* New York, Springer-Verlag, 1986. 639 p.

The work is supported the Russian Science Foundation, project 18-71-00041.

8. **Bluman G., Anco S.** *Symmetry and Intergration Methods for Differential Equations.* New York, Springer-Verlag, 2002. 419 p.
9. **Fedorov V.E., Panov A.V.** Invariantnye i chastichno invariantnye resheniya sistemy uravneniy mekhaniki dvukhphaznoy sredy [Invariant and partially invariant solutions of the system of equations of a two-phase medium mechanics]. *Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of Chelyabinsk State University], 2011, no. 38, pp. 65–69. (In Russ.).
10. **Panov A.V.** Invariant solutions and submodels in two-phase fluid mechanics generated by 3-dimensional subalgebras: barochronous flows. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, vol. 116, pp. 140–146.
11. **Khabirov S.V.** Classification of differential invariant submodels. *Siberian Mathematical Journal*, 2004, vol. 45, pp. 562–579.
12. **Panov A.V.** Exact solutions of the equations of two-phase dynamics. Collapse of gas and particles in space. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 263–273.
13. **Khabirov S.V.** *Simmetriynyy analiz modeli neszhimayemoy zhidkosti s vyazkost'yu i teploprovodnost'yu, zavisyashchimi ot temperatury* [Symmetry analysis of an incomressible fluid model with viscosity and heat conductivity that depends on temperature]. Ufa, Gilem Publ., 2004. (In Russ.).
14. **Kamke E.** *Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen. I. Gewohnliche Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Leipzig, 1977. xxvi+670 p.

Accepted article received 01.05.2020
Corrections received 18.08.2020